

УДК 531.8

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МНОГОЗВЕННЫХ СИСТЕМ,
СВЯЗАННЫЕ С УДАРНЫМИ ЯВЛЕНИЯМИ. II

РУБАНОВИЧ Е. М., ФОРМАЛЬСКИЙ А. М.

Рассматривается плоский механизм, состоящий из двух шарнирно-соединенных звеньев, а также плоский многозвенный двуногий механизм. Изучается вопрос о возможном движении механизмов после абсолютно неупругого удара одного из звеньев о поверхность¹.

1. Рассмотрим двузвенный механизм BOD , состоящий из звеньев OB и OD , соединенных плоским шарниром в точке O [1].

Пусть при $t < 0$ тело двигалось так, что точка B была неподвижной. В момент $t = 0$ конец D звена OD касается с ударом поверхности. Удар предполагается абсолютно неупругим (см. равенства (1.1) в [1]). Следует определить, останется точка B после удара на поверхности или уйдет вверх (связь, наложенная на точку B , предполагается односторонней).

Уравнения удара (3.3) выписаны в п. 3 [1], где получены также некоторые общие утверждения относительно изменения кинетической энергии при ударе, взаимного расположения векторов ударных реакций в точках B и D и векторов скоростей этих точек. Здесь решается задача о характере движения точки B после удара.

Двузвенник с жестко закрепленными звеньями рассматривался в п. 1 [1]. Для такого двузвенника

$$x_1^*(-0) = 0 \quad (1.1)$$

Для двузвенника с шарнирно-соединенными звеньями равенство (1.1), конечно, может не иметь места. Дальнейшее рассмотрение, однако, будем проводить при условии (1.1).

Если после удара скорость точки B остается равной нулю, то из выражений (3.10), (3.11) (см. [1]) при условии (1.1) имеем

$$E_{R_{1x}} = -g_{12}y_1^*(-0) \quad (1.2)$$

$$E_{R_{1y}} = -g_{22}y_1^*(-0) \quad (1.3)$$

$$E_{R_{2x}} = -g_{32}y_1^*(-0) \quad (1.4)$$

$$E_{R_{2y}} = -g_{42}y_1^*(-0) \quad (1.5)$$

Если точка B покидает поверхность, то из выражений (3.12), (3.13) (см. [1]) при условии (1.1) находим

$$E_{R_{1x}} = -\frac{1}{\det G_{22}} \begin{vmatrix} g_{13} & g_{13} & g_{14} \\ g_{23} & g_{33} & g_{24} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} y_1^*(-0) \quad (1.6)$$

$$E_{R_{1y}} = -\frac{1}{\det G_{22}} \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} y_1^*(-0) \quad (1.7)$$

¹ Публикуемые результаты являются непосредственным продолжением работы [1].

$$x_2 \dot{(+0)} = \frac{1}{\det G_{22}} (g_{44}g_{32} - g_{34}g_{42}) y_1 \dot{(-0)} \quad (1.8)$$

$$y_2 \dot{(+0)} = \frac{1}{\det G_{22}} (g_{42}g_{33} - g_{32}g_{43}) y_1 \dot{(-0)} \quad (1.9)$$

Будем считать, что точка D касается поверхности с ненулевой скоростью

$$y_1 \dot{(-0)} < 0 \quad (1.10)$$

Поскольку $G > 0$, постольку при условии (1.10) величины (1.3) и (1.7) положительны. Следовательно, условие (1.17) (см. [1]) выполняется.

При отрыве звена OB от поверхности

$$y_2 \dot{(+0)} > 0 \quad (1.11)$$

Из соотношений (1.9), (1.10) заключаем, что условие (1.11) выполняется при

$$g_{42}g_{33} - g_{32}g_{43} < 0 \quad (1.12)$$

Учитывая выражение (3.4) в [1] для матрицы G , перепишем неравенство (1.12) так:

$$9 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 5 > 0 \quad (1.13)$$

При условии $0 < \alpha < 1/2\pi$ неравенство (1.13) имеет решения:

$$0 < \alpha < \alpha^0, \quad \alpha^0 = 1/2 \arccos((-3 + \sqrt{189})/18) \approx 26^\circ 40' \quad (1.14)$$

$$\alpha^{00} < \alpha < 1/2\pi, \quad \alpha^{00} = 1/2 \arccos((-3 - \sqrt{189})/18) \approx 79^\circ 15' \quad (1.15)$$

Величина (1.5) неотрицательна при

$$g_{42} \geq 0 \quad (1.16)$$

Это неравенство выполняется при условии (см. также (1.24) в [1])

$$\alpha_0 \leq \alpha < 1/2\pi, \quad \alpha_0 = \arcsin(1/\sqrt{3}) \approx 35^\circ 16' \quad (1.17)$$

Итак, на интервале (1.14)

$$y_2 \dot{(+0)} > 0, \quad E_{R2y} < 0 \quad (1.18)$$

На правом конце интервала (1.14) $y_2 \dot{(+0)} = 0$. При

$$\alpha^0 < \alpha < \alpha_0 \quad (1.19)$$

имеют место неравенства

$$y_2 \dot{(+0)} < 0, \quad E_{R2y} < 0 \quad (1.20)$$

На правом конце интервала (1.19) $E_{R2y} = 0$. При

$$\alpha_0 < \alpha < \alpha^{00} \quad (1.21)$$

имеют место неравенства

$$y_2 \dot{(+0)} < 0, \quad E_{R2y} > 0 \quad (1.22)$$

На правом конце интервала (1.21) $y_2 \dot{(+0)} = 0$. На интервале (1.15):

$$y_2 \dot{(+0)} > 0, \quad E_{R2y} > 0 \quad (1.23)$$

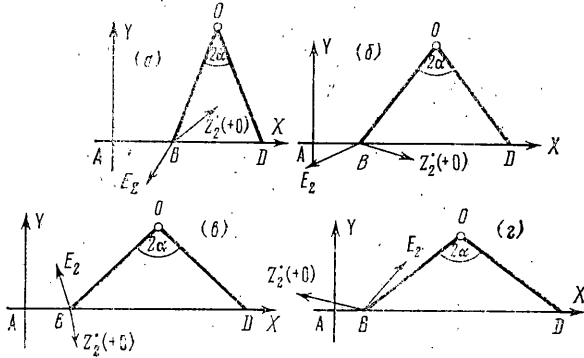
Неравенства (1.18) показывают, что при условии (1.14) скорость $z_2 \dot{(+0)}$ направлена вверх, а реакция E_2 — вниз (фиг. 1, а). Значит, в этом случае звено OB покидает поверхность.

Из рассмотрения неравенств (1.20) следует, что при условии (1.19) векторы $z_2 \dot{(+0)}$ и E_2 направлены под поверхность (фиг. 1, б). Следовательно, при этом условии точка B не может ни покинуть поверхность, ни сохранить неподвижность.

Рассмотрение неравенств (1.22) показывает, что при условии (1.21) скорость $z_2^*(+0)$ направлена под поверхность, а реакция E_2 — вверх (фиг. 1, ε). Значит, при этом условии отрыв точки B от поверхности невозможен.

При условии (1.15), как вытекает из неравенств (1.23), векторы $z_2^*(+0)$ и E_2 направлены вверх (фиг. 1, ε). Следовательно, при этом условии не исключается ни возможность отрыва точки B от поверхности, ни возможность сохранения ею неподвижности.

Для двузвенника с закрепленными звеньями [1] возможны только два случая расположения векторов $z_2^*(+0)$, E_2 : (1.18) и (1.22). В первом слу-



Фиг. 1

чае точка B отрывается от поверхности, во втором — остается на ней без движения. Для механизма с шарниром в точке O , возможными оказываются и другие случаи: (1.20), (1.23).

2. Поскольку при условии (1.19) точка B не может ни покинуть поверхность, ни остаться на ней без движения, постольку при этом условии возможным является только проскальзывание точки B по поверхности. Для исследования такой возможности воспользуемся гипотезой Рауса о трении при ударном взаимодействии [2]. В соответствии с этой гипотезой, аналогичной закону Кулона [3] в случае конечных сил

$$|E_{R2x}| \leq f E_{R2y} \tag{2.1}$$

где f — коэффициент трения. Условие (2.1) означает, что вектор E_2 всегда должен лежать в некотором угле (конусе трения).

Что касается звена OD , то будем по-прежнему считать, что проскальзывание точки D невозможно (см. равенства (1.1) или (3.7) в [1]).

При проскальзывании точки B вектор реакции E_2 лежит на границе конуса трения, т. е. $|E_{R2x}| = f E_{R2y}$. Учитывая равенства (3.7) из [1], равенство (1.1), условие $y_2^*(+0) = 0$ и условие

$$x_2^*(+0) \cdot E_{R2x} \leq 0 \tag{2.2}$$

перепишем уравнения (3.6) из [1] в виде

$$\begin{aligned} -g_{12}y_1^*(-0) + g_{13}x_2^*(+0) &= E_{R1x} \\ -g_{22}y_1^*(-0) + g_{23}x_2^*(+0) &= E_{R1y} \\ -g_{32}y_1^*(-0) + g_{33}x_2^*(+0) &= -f E_{R2y} \operatorname{sgn} x_2^*(+0) \\ -g_{42}y_1^*(-0) + g_{43}x_2^*(+0) &= E_{R2y} \end{aligned} \tag{2.3}$$

При условии (1.19) величина (1.9) отрицательна. В соответствии с утверждениями, сформулированными в п. 3 [1], реакция абсолютно гладкой поверхности ($f=0$) при этом направлена вертикально вверх. Если коэффициент трения мал, то, исходя из соображений непрерывности, можно ожидать, что вектор E_2 силы реакции будет располагаться на границе конуса трения. Точка B при этом скользит по поверхности. Рассмотрим этот вопрос строго, анализируя уравнения (2.3).

Из уравнений (2.3) при условии

$$x_2(+0) > 0 \quad (2.4)$$

получаем

$$x_2(+0) = \frac{g_{32} + fg_{42}}{g_{33} + fg_{43}} y_1(-0) \quad (2.5)$$

$$E_{R_{1y}} = \frac{1}{g_{33} + fg_{43}} [g_{32}g_{23} - g_{22}g_{33} + f(g_{42}g_{23} - g_{22}g_{43})] y_1(-0) \quad (2.6)$$

$$E_{R_{2x}} = \frac{f(g_{42}g_{33} - g_{32}g_{43})}{g_{33} + fg_{43}} y_1(-0) \quad (2.7)$$

$$E_{R_{2y}} = \frac{g_{32}g_{43} - g_{42}g_{33}}{g_{33} + fg_{43}} y_1(-0) \quad (2.8)$$

При всех допустимых значениях α справедливы неравенства $g_{43} > 0$, $g_{42}g_{23} - g_{22}g_{43} < 0$. При условии (1.19) $g_{32} < 0$, $g_{42} < 0$. Пользуясь этими неравенствами и условием (1.10), легко показать, что величины (2.5), (2.6) и (2.8) положительны, а величина (2.7) отрицательна при любых значениях f .

Если допустить, что

$$x_2(+0) < 0 \quad (2.9)$$

то из уравнений (2.3) получаем

$$x_2(+0) = \frac{g_{32} - fg_{42}}{g_{33} - fg_{43}} y_1(-0) \quad (2.10)$$

$$E_{R_{1y}} = \frac{1}{g_{33} - fg_{43}} [g_{32}g_{23} - g_{22}g_{33} - f(g_{42}g_{23} - g_{22}g_{43})] y_1(-0) \quad (2.11)$$

$$E_{R_{2x}} = \frac{f(g_{32}g_{43} - g_{42}g_{33})}{g_{33} - fg_{43}} y_1(-0) \quad (2.12)$$

$$E_{R_{2y}} = \frac{g_{32}g_{43} - g_{42}g_{33}}{g_{33} - fg_{43}} y_1(-0) \quad (2.13)$$

Соотношения (2.10)–(2.13), справедливые при $f \neq g_{33}/g_{43}$, получаются из соотношений (2.5)–(2.8) заменой f на $-f$. Несложный анализ равенств (2.10), (2.13) показывает, что при условии (1.19) не выполняется либо допущение $E_{R_{2y}} > 0$, либо допущение (2.9).

Таким образом, при условии (1.19) точка B , независимо от значения f , будет скользить по поверхности со скоростью (2.5) (в момент $t=+0$, разумеется).

Исходя из принятой гипотезы о трении можно рассмотреть также случай (1.21). Опуская подробные рассуждения, приведем лишь окончательные результаты такого рассмотрения.

В случае, когда

$$0 \leq f < |g_{32}/g_{42}| \quad (2.14)$$

точка B скользит по поверхности. Скорость скольжения, а также реакции вычисляются по формулам (2.5)–(2.8), если $\alpha_0 < \alpha < 1/4\pi$, и по формулам (2.10)–(2.13), если $1/4\pi < \alpha < \alpha^{00}$.

В случае, когда

$$f \geq |g_{32}/g_{42}| \quad (2.15)$$

точка B сохраняет неподвижность. При $\alpha = 1/4\pi$ звено OB остается на поверхности независимо от величины коэффициента f .

Проанализируем теперь условие (1.15). При этом условии $g_{32} > 0$, $g_{42} > 0$, поэтому величина (2.5) отрицательна. Следовательно, решение системы (2.3), если таковое существует, может быть получено только при допущении (2.9). При условии (1.15) имеет место неравенство (1.12). Поэтому в случае $0 \leq f < g_{33}/g_{43}$ величина (2.13) отрицательна. При $f = g_{33}/g_{43}$ система (2.3) не имеет решения. В случае $g_{33}/g_{43} < f < g_{32}/g_{42}$ величина (2.10) положительна. Итак, в случае (2.14) система (2.3) не имеет решения. Значит, проскальзывания быть не может и, следовательно, звено OB покидает поверхность.

При условии (2.15) величина (2.10) отрицательна, а величины (2.11)–(2.13) положительны. Следовательно, система (2.3) имеет решение (2.10)–(2.13). Реакция E_2 , вычисляемая по формулам (1.4), (1.5), при условии (2.15) оказывается в конусе трения. Поэтому при условии (2.15) нельзя исключить ни возможность проскальзывания точки B по поверхности, ни возможность сохранения ею неподвижности. Напомним, что в случае (1.15) не исключается также возможность отрыва точки B от поверхности.

Таким образом, в случае (1.15) введение гипотезы сухого трения (2.1) с коэффициентом f , удовлетворяющим условию (2.15), не дает возможности однозначно решить вопрос о движении точки B после удара. Поверхность, для которой выполняется неравенство (2.15), т. е. коэффициент трения f достаточно велик, можно условно назвать «сильно шероховатой». Откажемся от принятого выше закона трения (2.1) и рассмотрим «микроструктуру» сильно шероховатой поверхности.

Будем считать поверхность зубчатой (см. фиг. 2). Пусть грани зубьев являются абсолютно гладкими, а точка B звена OB в момент удара находится в вершине угла (фиг. 3).

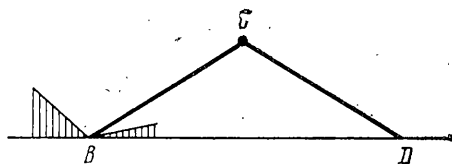
Допустим сначала, что вектор скорости $z_2^*(+0)$, вычисленный по формулам (1.8), (1.9), находится внутри угла, образованного гранями (фиг. 4, а). Так как стороны угла предполагаются абсолютно гладкими, то реакция каждой из сторон перпендикулярна ей. Поэтому вектор суммарной реакции, разбиваемой сторонами угла, может находиться только в угле с вершиной в точке B , образованном перпендикулярами к сторонам исходного угла. Этот угол — «сопряженный конус» — на фиг. 4, а заштрихован (горизонтально). В соответствии с утверждениями п. 3 в [1] векторы $z_2^*(+0)$ и E_2 , вычисляемые по формулам (1.8), (1.9) и (1.4), (1.5), образуют тупой угол. Поэтому если вектор $z_2^*(+0)$ лежит внутри угла, образованного сторонами зубьев, то вектор E_2 не может лежать в сопряженном конусе. В этом случае точка B покидает поверхность.

Допустим теперь, что вектор скорости $z_2^*(+0)$ находится вне угла (фиг. 4, б, в). При этом точка B не может покинуть опорную поверхность. Если вектор E_2 лежит вне сопряженного конуса (фиг. 4, б), то звено OB не может остаться на месте. При этом точка B будет скользить по одной из сторон угла. Выясним, по какой стороне будет происходить это скольжение.

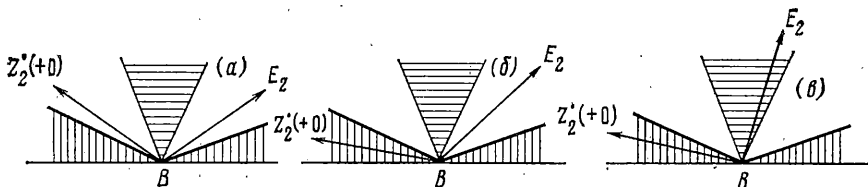
Если точка B скользит по какой-либо из сторон угла, то реакция этой стороны должна быть перпендикулярна ей и направлена внутрь угла, по-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

скользку поверхность предполагается абсолютно гладкой и не является удерживающей. Направим ось X параллельно той стороне угла, по которой скользит точка B , а ось Y — перпендикулярно ей. Если углы α_1 и α_2 отсчитывать от этой новой оси Y , то в момент постановки звена OD на горизонтальную поверхность $\alpha_1 \neq -\alpha_2$. Между скачками скоростей концов ног и импульсными воздействиями при этом по-прежнему имеет место соотношение вида (3.3) [1]. Вместо матрицы (3.4) в таком соотношении фигурирует другая матрица кинетической энергии. Утверждения относительно взаимного расположения векторов реакций и скоростей, сформулированные в п. 3 [1], сохраняются, поскольку они вытекают только из положительной определенности соответствующей матрицы кинетической энергии. В соответствии с одним из этих утверждений составляющая скорости свободного движения $z_2'(+0)$ (см. формулы (1.8), (1.9)), ортогональная той абсолютно гладкой поверхности, по которой происходит скольжение, и реакция этой поверхности направлены в разные стороны от поверхности. Из изложенного выше следует, что точка B будет скользить по той стороне угла, с которой вектор $z_2'(+0)$ образует минимальный угол.

Допустим, что вектор E_2 лежит в сопряженном конусе (фиг. 4, в). В этом случае точка B может остаться на месте, но не исключается также и возможность скольжения по той стороне угла, с которой вектор $z_2'(+0)$ составляет минимальный угол. Для окончательного решения вопроса о движении точки B нужно привлекать какие-то дополнительные соображения.

Все выводы о возможном движении точки B от скорости $y_1'(-0)$ не зависят. Во все формулы (1.2)–(1.9), (2.5)–(2.8), (2.10)–(2.13) величина $y_1'(-0)$ входит в качестве множителя.

Сопоставим теперь результаты исследования двузвенников со скрепленными (см. [1]) и с шарнирно-соединенными звеньями. При $\alpha \in (0, \alpha_0)$ точка B первого двузвенника отрывается от поверхности, при $\alpha \in [\alpha_0, \frac{1}{2}\pi]$ — остается на ней без движения. Исследование второго двузвенника приводит к разбиению интервала $(0, \frac{1}{2}\pi)$ не на два, а на четыре промежутка. При $\alpha \in (0, \alpha^0)$ точка B покидает поверхность, при $\alpha \in$

$\in [\alpha^0, \alpha_0]$ — скользит по ней независимо от величины коэффициента трения f . В случае $\alpha \in (\alpha_0, \alpha^{00})$ точка B или скользит по поверхности (при значениях f , меньших некоторого), или остается неподвижной. Если $\alpha \in [\alpha^{00}, \frac{1}{2}\pi]$, то при малых значениях f точка B покидает поверхность при значениях f , больших некоторого, в случае зубчатой поверхности возможен отрыв точки B , скольжение, а также сохранение ею неподвижности.

3. Рассмотрим плоский механизм, состоящий из p -звенного корпуса ($p \geq 0$) и двух r -звенных ($r \geq 1$) ног OB и OD (фиг. 5). Все звенья соединяются между собой плоскими шарнирами. В качестве обобщенных координат, описывающих положение механизма, выберем координаты x и y точки O (тазобедренного сустава), углы $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, которые образуют с вертикалью звенья передней ноги OD , углы β_1, \dots, β_r , которые образуют с вертикалью звенья задней ноги OB , углы ψ_1, \dots, ψ_p , которые образуют с вертикалью звенья корпуса (фиг. 5). Вектор (столбец) обобщенных координат обозначим через q :

$$q^* = \|x, y, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \psi_1, \dots, \psi_p\|$$

Размерность $2+2r+p$ вектора q обозначим через k .

Кинетическая энергия системы имеет вид $T = \frac{1}{2} q^* A(q) q^*$, где $A(q)$ — положительно-определенная симметрическая матрица.

Четыре обобщенные координаты x, y, α_1, β_1 заменим на координаты x_1, y_1, x_2, y_2 концов ног $D(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \sum_{i=1}^r l_i \sin \alpha_i, & y_1 &= y - \sum_{i=1}^r l_i \cos \alpha_i \\ x_2 &= x + \sum_{i=1}^r l_i \sin \beta_i, & y_2 &= y - \sum_{i=1}^r l_i \cos \beta_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

где l_i ($i=1, \dots, r$) — длины соответствующих звеньев ног. Остальные $k-4$ координаты оставим без изменения. Формулы (3.1) аналогичны формулам (3.2) в [1]. Матрица Якоби J перехода к новым обобщенным координатам имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & l_1 \cos \alpha_1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & l_1 \sin \alpha_1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & l_1 \cos \beta_1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \sin \beta_1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

При $\alpha_i \neq \beta_i + \pi n$ ($n=0, 1, \dots$) преобразование (3.1) является невырожденным. Обозначим через v вектор новых обобщенных координат

$$v^* = \|x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_r, \beta_r, \psi_1, \dots, \psi_p\| \quad (3.2)$$

Выражение для кинетической энергии в новых координатах приобретает вид

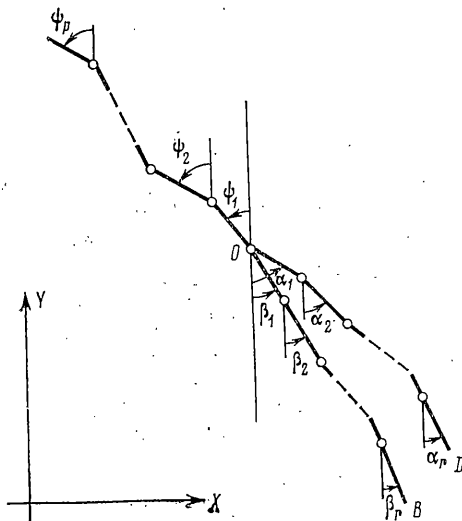
$$T = \frac{1}{2} v^* (J^{-1})^* A(q) J^{-1} v^* = \frac{1}{2} v^* G(v) v^* \quad (3.3)$$

где $G(v)$ — матрица кинетической энергии системы в новых переменных.

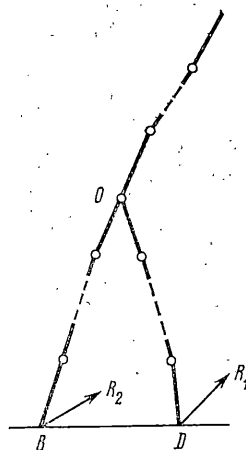
Пусть при $t < 0$ рассматриваемый механизм двигался так, что точка B была неподвижной. В момент $t=0$ конец D ноги OD с ударом (абсолютно

неупругим) касается поверхности (фиг. 6). Реакции поверхности R_1 и R_2 , прикладываемые к концам ног в момент удара (фиг. 6), являются импульсными: $R_{1x} = E_{R_{1x}} \delta(t)$, $R_{1y} = E_{R_{1y}} \delta(t)$, $R_{2x} = E_{R_{2x}} \delta(t)$, $R_{2y} = E_{R_{2y}} \delta(t)$, где $E_{R_{1x}}$, $E_{R_{1y}}$, $E_{R_{2x}}$, $E_{R_{2y}}$ — интенсивности импульсных воздействий, а $\delta(t)$ — дельта-функция.

Допустим, что в момент удара к механизму, кроме реакций, не прикладываются никакие другие импульсные воздействия. Тогда из выраже-



Фиг. 5



Фиг. 6

ния (3.3) и уравнений Лагранжа второго рода вытекает [4] следующее матричное равенство, связывающее вектор скачков скоростей с вектором импульсных воздействий:

$$G(v)[v] = \begin{Bmatrix} E \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad E^* = \| E_{R_{1x}}, E_{R_{1y}}, E_{R_{2x}}, E_{R_{2y}} \| \quad (3.4)$$

Матрицы $[v]$, $G(v)$ можно представить в блочной форме:

$$[v] = \begin{Bmatrix} [z'] \\ [w'] \end{Bmatrix}, \quad G(v) = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{Bmatrix}$$

Вектор $[z']$ описывает скачки скоростей первых четырех координат, порядок матриц D_{11} , D_{12} и D_{22} равен (4×4) , $(4 \times (k-4))$ и $((k-4) \times (k-4))$ соответственно. Соотношение (3.4) переписывается так:

$$D_{11}[z'] + D_{12}[w'] = E, \quad D_{21}[z'] + D_{22}[w'] = 0 \quad (3.5)$$

Отсюда имеем

$$(D_{11} - D_{12}D_{22}^{-1}D_{21})[z'] = E \quad (3.6)$$

Поскольку $G(v) > 0$, постольку

$$D_{11} - D_{12}D_{22}^{-1}D_{21} > 0 \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) аналогично уравнению (3.3) в [1]. Соотношение (3.6), очень удобное для решения ряда вопросов, удается выделить из уравнений удара благодаря использованию координат (3.2).

Таким образом, независимо от количества звеньев системы для решения вопроса о возможном движении точки B после удара достаточно ис-

следовать лишь систему четвертого порядка (3.6) (некоторый приведенный двузвенник). Кроме того, из соотношения (3.6) следует, что скорость точки B после удара не зависит от угловых скоростей звеньев корпуса до удара, а от угловых скоростей звеньев ног зависит лишь в той мере, в какой от них зависит скорость точки D до удара. При этом значения элементов матрицы (3.7) зависят от конфигурации всего механизма.

Пользуясь соотношениями (3.3)–(3.6), можно выписать выражения для скачка кинетической энергии при ударе. Эти выражения аналогичны выражениям (3.14) в [1]. Из них вытекает, в частности, теорема Карно как для случая, когда точка B после удара остается на месте, так и для случая, когда точка B отрывается от поверхности. Справедливыми остаются также высказанные в п. 3 [1] утверждения относительно взаимного расположения векторов реакции и скоростей концов B и D ног. Эти утверждения вытекают только из соотношений (3.6), (3.7).

Так же как и для двузвенного механизма, для многозвенника после удара возможно одно из трех движений точки B : отрыв, скольжение, неподвижность. Для механизма с произвольным числом звеньев, расположенного в момент удара в произвольной конфигурации, разрешить вопрос о том, какое из движений произойдет, не представляется возможным. В этом общем случае приходится ограничиться указанными выше утверждениями. Для механизма с конкретным количеством звеньев, расположенного при ударе в конкретной конфигурации, вопрос о движении точки B можно исследовать, по-видимому, таким же образом, как для двузвенника.

Авторы благодарны Э. К. Лавровскому и В. А. Самсонову за неоднократные обсуждения результатов публикуемой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубанович Е. М., Формальский А. М. Некоторые задачи динамики многозвенных систем, связанные с ударными явлениями. I.—Изв. АН СССР. МТТ, № 2, 1981, с. 166–174.
2. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 223 с.
3. Березкин Е. Н. Лекции по теоретической механике. Ч. 2, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. 314 с.
4. Appel' П. Теоретическая механика. Т. 2, М.: Физматгиз, 1960, 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.X.1979