

УДК 539.3.01

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ И СЦЕПЛЕНИЕМ

СПЕКТОР А. А.

Проводится исследование и строится численное решение пространственных задач статики с кулоновским трением, когда на площадке контакта возникают области проскальзывания, в точках которых имеет место относительный сдвиг контактирующих тел, и области сцепления, где этот сдвиг отсутствует. В областях проскальзывания касательные напряжения трения равны по величине произведению давления на коэффициент трения, а по направлению совпадают с относительным сдвигом. В областях сцепления величины касательных напряжений трения не превосходят указанного произведения. Граница между областями двух типов заранее не известна и должна определяться в ходе решения задачи.

Контактирующие тела аппроксимируются полупространствами. Предполагается также, что задача определения давления и площадки контакта может быть решена вне зависимости от задачи определения касательных напряжений и относительных сдвигов. Считается, что касательные напряжения на площадке контакта возникают вследствие относительного сдвига тел как абсолютно жестких и их взаимного поворота вокруг оси, нормальной к площадке контакта.

Задачи рассматриваемого класса сводятся к эквивалентным вариационным задачам минимизации квадратичного функционала, выражающегося через интегральный оператор с интегрированием по площадке контакта тел и зависящего от касательных напряжений на ней, причем на эти напряжения наложены нелинейные ограничения в форме неравенств.

Для численного решения вариационная задача приближенно заменяется конечно-мерной задачей математического программирования, решение которой строится методом проекций градиента.

Задачи для двух полупространств, которые решаются в публикуемой работе, исследовались в [1], где они сведены к эквивалентной проблеме минимизации недифференцируемого функционала с ограничениями в форме неравенств. Численная реализация минимума функционалов этого класса, как показывает опыт ее проведения в пространственных контактных задачах качения с проскальзыванием и сцеплением¹, представляет большие трудности, чем для квадратичного функционала, предложенного здесь.

В [2] для задач о контакте с трением тел конечных размеров под действием массовых и поверхностных сил сформулированы эквивалентные вариационные постановки в напряжениях и смещениях. Искомые поля определяются во внутренних точках тел. Вычислительные методы реализации указанных вариационных подходов разрабатывались и обосновывались в [3]. Численные реализации вариационных подходов к контактным задачам с трением приведены в [4] для осесимметричного случая, и в [3, 5] — для плоского случая. Качественное исследование вариационными методами поведения характеристик решения контактных задач проводилось в [3, 6, 7].

¹ Гольдштейн Р. В., Завовский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П. Решение пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением вариационным методом. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1979, препринт № 134. 67 с.

Гольдштейн Р. В., Завовский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П. Вариационный метод решения пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1980, препринт № 138. 42 с.

Федоренко Р. П. Метод численного решения пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением. М., Ин-т прикладной математики АН СССР, 1979, препринт № 158. 33 с.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два упругих тела, которые в недеформированном состоянии соприкасаются в одной точке O , а под действием приложенных сил и моментов контактируют по некоторой области. Будем считать контактирующие тела гладкими и обладающими непрерывными радиусами кривизны, а размеры площадки контакта много меньшими радиусов кривизны тел в точке O .

Вследствие указанных предположений будем сносить граничные условия, справедливые в точках поверхностей тел, в точки проекций этих поверхностей на общую касательную к ним в недеформированном состоянии плоскость. Введем декартову систему координат $OXYZ$, в которой касательная к телам плоскость является плоскостью $z=0$, и обозначим через E проекцию площадки контакта на эту плоскость.

Под действием приложенных сил и моментов в телах возникают поля смещений $u^\pm(x, y, z)$, каждое из которых представляет собой сумму двух полей $u^\pm(x, y, z) = v^\pm(x, y, z) + U^\pm(x, y, z)$. Поля v^\pm определяют смещения тел как абсолютно жестких, поля U^\pm задают их упругие смещения.

Граничные условия в плоскости $z=0$, связывающие разности смещений тел $u(x, y, 0) = u^+(x, y, 0) - u^-(x, y, 0)$ с нормальными σ_{zz} и касательными $\tau(\tau_{xz}, \tau_{yz})$ напряжениями, имеют вид

$$\text{при } u_z = U_z - \delta = f^- - f^+ \quad \sigma_{zz} \leq 0 \quad (1.1)$$

а также

$$|\tau| \leq -\rho \sigma_{zz} \quad \text{при } |u| = 0; \quad \tau = -\rho \sigma_{zz} (u/|u|) \quad \text{при } |u| \neq 0 \quad (1.2)$$

$$\text{при } u_z = U_z - \delta < f^- - f^+ \quad |\tau| = \sigma_{zz} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь f^\pm — функции, описывающие форму контактирующих тел, u — вектор с проекциями $(u_x(x, y, 0), u_y(x, y, 0))$, δ — сближение тел.

Равенство в (1.1) является условием отсутствия зазора между поверхностями контактирующих тел и, следовательно, определяет точки, принадлежащие площадке контакта E . Неравенство в (1.1) означает, что в точках площадки контакта нормальные напряжения не растягивающие. Условия (1.2) задают закон трения в точках E и означают, что рассматриваемая точка принадлежит либо области сцепления E_0 , где $|u| = 0$, либо области проскальзывания E_+ , где $|u| > 0$. При этом в точках E_0 величина локальной силы трения $|\tau|$ не превышает произведения давления $-\sigma_{zz}$ на коэффициент трения ρ , а в точках E_+ величина $|\tau|$ равна этому произведению, причем направления локальной силы трения и относительного касательного сдвига контактирующих тел совпадают. Неравенство в (1.3) является условием ненулевого зазора между поверхностями и, следовательно, определяет точки, принадлежащие свободным поверхностям тел. Равенства в (1.3) определяют отсутствие напряжений на этих поверхностях.

Будем считать известным поле $v(v_x^+(x, y, 0) - v_x^-(x, y, 0), v_y^+(x, y, 0) - v_y^-(x, y, 0))$ — относительных касательных смещений контактирующих тел как абсолютно жестких. Силы и моменты, их вызывающие, определяются после решения контактной задачи по найденному полю напряжений.

В силу сделанных выше предположений о локальности контакта будем аппроксимировать смещения поверхностей тел под действием напряжений σ_{zz} , τ смещениями двух полупространств $z > 0$ и $z < 0$ под действием тех же напряжений. Как следует из выражений [8] для смещений границ двух полупространств, разность их упругих нормальных смещений U_z , входящих в условия (1.1), (1.3), представляет собой результат применения суммы двух интегральных операторов, один из которых определен на функциях σ_{zz} , а другой — на τ . Значения второго оператора содержат множителем величину $K = (1 - 2\nu^+)/G^+ - (1 - 2\nu^-)/G^-$; ν^\pm , G^\pm — коэффициенты

Пуассона и модули сдвига материалов тел. При $K=0$ задача определения площадки контакта E и давления $-\sigma_{zz}$ отщепляется от задачи определения сил трения τ и касательных смещений u . Равенство $K=0$ имеет место в случае контакта тел из одинаковых материалов, либо абсолютно жесткого тела с несжимаемым, либо двух несжимаемых тел. В дальнейшем ограничимся случаем одинаковых материалов тел.

Будем аппроксимировать функции f^\pm их разложениями в ряд Тейлора в окрестности точки O до вторых членов включительно. Тогда задача определения области E и функции σ_{zz} из условий (1.1) – (1.3) совпадает с задачей Герца, из решения которой вытекает, что E – внутренность эллипса с полуосями a и b ; $\sigma_{zz} = -\sigma_0 [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2}$ [8].

Задача определения функции τ свелась, таким образом, к следующей задаче. При известных функциях $v_x(x, y, 0)$, $v_y(x, y, 0)$, $f = \rho\sigma_0 [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2}$ в известной области E : $1 - (x/a)^2 - (y/b)^2 \geq 0$ найти вектор-функцию $\tau(x, y)$ по условию

$$|\tau| \leq f \text{ при } |u|=0, \tau = f(u/|u|) \text{ при } |u| > 0 \quad (1.4)$$

причем $u = v + U = v - B(\tau)$, где оператор $B(\tau)$ имеет вид [8]:

$$B(\tau(x, y)) = \frac{1}{\pi G} \int_E \left\| \begin{array}{cc} \frac{1 - \nu \sin^2 \theta}{R} & \frac{\nu \sin \theta \cos \theta}{R} \\ \frac{\nu \sin \theta \cos \theta}{R} & \frac{1 - \nu \cos^2 \theta}{R} \end{array} \right\| \tau(x', y') dx' dy' \quad (1.5)$$

2. Переход к эквивалентной вариационной задаче. Утверждение 2.1. Граничная задача (1.4) эквивалентна вариационной задаче

$$\min_{\tau \in V: |\tau| \leq f} \left\{ F(\tau) = \int_F \left[\frac{1}{2} B(\tau) \tau - \tau \cdot v \right] dx dy \right\} \quad (2.1)$$

Доказательство, аналогичное схеме, используемой в [2], состоит из двух этапов. На первом устанавливается эквивалентность (2.1) решению вариационного неравенства, выражающего неотрицательность линейной части приращения F в точке минимума. На втором этапе доказывается эквивалентность вариационного неравенства исходной граничной задаче.

Для доказательства рассмотрим приращение функционала F в точке $\tau = \tau_0$ при $\tau \in V$. С учетом симметрии ядра $B(\tau)$ оно имеет вид

$$\Delta F = F(\tau) - F(\tau_0) = \int_E \left[(B(\tau_0) - \nu)(\tau - \tau_0) + \frac{1}{2} B(\tau - \tau_0)(\tau - \tau_0) \right] dx dy \quad (2.2)$$

Покажем, что вариационная задача (2.1) эквивалентна нахождению на множестве V функции τ_0 , такой, что для любого $\tau \in V$ справедливо неравенство

$$\int_E (B(\tau_0) - \nu)(\tau - \tau_0) dx dy = - \int_E u_0(\tau_0)(\tau - \tau_0) dx dy \geq 0 \quad (2.3)$$

При любых $\tau - \tau_0$ имеет место неравенство

$$\int_E B(\tau - \tau_0)(\tau - \tau_0) dx dy \geq 0 \quad (2.4)$$

так как выписанный квадратичный по $\tau - \tau_0$ функционал представляет собой, по определению оператора $B(\tau)$, удвоенную упругую энергию полупространства $z < 0$ от приложения к его поверхности нагрузок $\tau - \tau_0$.

Из выполнения неравенства (2.3) с учетом (2.4) вытекает условие $\Delta F \geq 0$ для любого $\tau \in V$ и, следовательно, наличие минимума при $\tau = \tau_0$.

Для доказательства необходимости выполнения неравенства (2.3) предположим противное, а именно, что при $\tau = \tau_0$ имеется минимум F на V и при этом для некоторого $\tau^* \in V$ реализуется обратное к (2.3) неравенство

$$-\int_E \mathbf{u}_0(\tau^* - \tau_0) dx dy < 0 \quad (2.5)$$

Множество V допустимых τ , очевидно, выпуклое, поэтому если $\tau^*, \tau \in V$, то $\tau_\lambda = \tau_0 + \lambda(\tau^* - \tau_0) \in V$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Рассмотрим выражение

$$F(\tau_\lambda) - F(\tau_0) = -\lambda \int_E \mathbf{u}_0(\tau^* - \tau_0) dx dy + \lambda^2 \int_E B(\tau^* - \tau_0)(\tau^* - \tau_0) dx dy$$

При достаточно малых λ знак приращения F определяется первым, линейным по λ слагаемым, следовательно, в силу предположения (2.5) не выполняются условия минимума при $\tau = \tau_0$. Это доказывает необходимость неравенства (2.3) и, следовательно, эквивалентность его решения вариационной задаче (2.1).

Покажем далее эквивалентность неравенства (2.3) и исходной граничной задачи (1.4). Пусть сначала функция τ_0 удовлетворяет условиям (1.4). Докажем, что выполняется (2.3). Имеем в силу (1.4)

$$\begin{aligned} -\int_E \mathbf{u}_0(\tau - \tau_0) dx dy &= -\int_E [(\mathbf{u}_0\tau) - |\mathbf{u}_0|f] dx dy = \\ &= \int_E [|\mathbf{u}_0|(f - |\tau| \cos(\tau \hat{\mathbf{u}}_0))] dx dy \geq 0 \end{aligned}$$

так как $|\tau| \leq f$. Итак, функция, удовлетворяющая граничным условиям, является одновременно и решением неравенства (2.3).

Пусть теперь функция τ_0 является решением неравенства (2.3). Покажем, что она удовлетворяет граничным условиям (1.4).

Пусть в точке $P \in E$ имеет место относительный сдвиг поверхностей, т. е. справедливо условие $|\mathbf{u}_0(P)| > 0$. Докажем, что в этой точке выполняется равенство $\tau_0 = f\mathbf{u}_0/|\mathbf{u}_0|$. Допустим противное. Предполагая функции τ_0 и \mathbf{u}_0 непрерывными, можно считать, что в некоторой окрестности R точки P имеют место неравенства $f - |\tau_0| \cos(\tau_0 \mathbf{u}_0) > \varepsilon > 0$. Выбираем теперь $\tau = \tau^*$ таким, что $\tau^* = \tau_0$ вне R , а во внутренних точках R выполняется неравенство $f > |\tau^*| \cos(\tau^* \mathbf{u}_0) > |\tau_0| \cos(\tau_0 \mathbf{u}_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} -\int_E \mathbf{u}_0(\tau^* - \tau_0) dx dy &= \int_E -f|\mathbf{u}_0|(|\tau^*| \cos(\mathbf{u}_0\tau^*) - \\ &\quad - |\tau_0| \cos(\mathbf{u}_0\tau_0)) dx dy < 0 \end{aligned}$$

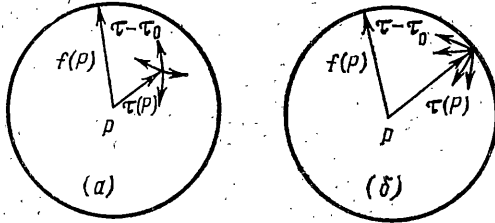
Таким образом, построена функция τ^* , для которой τ_0 не является решением неравенства (2.3), что противоречит нашему предположению. Следовательно, если τ_0 является решением (2.3), то либо $|\mathbf{u}_0| = 0$ и $|\tau_0| \leq f$, либо $|\mathbf{u}_0| \neq 0$ и $\tau_0 = f\mathbf{u}_0/|\mathbf{u}_0|$, что совпадает с исходными граничными условиями (1.4).

Геометрическая иллюстрация эквивалентности условий (1.4) решению неравенства (2.3) приведена на фиг. 1, а, б. В каждой точке P множество допустимых $\tau(P)$ представляет совокупность векторов, концы которых принадлежат кругу с центром в P и радиусом $f(P)$. Неравенство (2.3) означает, что скалярное произведение \mathbf{u}_0 с любым допустимым приращением

ем $\tau - \tau_0$ неположительно. Если $\tau_0(P) < f$ и конец вектора $\tau_0(P)$ совпадает с внутренней точкой рассматриваемого круга, то векторы $\tau - \tau_0$ могут быть любыми по направлению (фиг. 1, а) и, следовательно, указанное требование на скалярное произведение $(u_0, \tau - \tau_0)$ выполняется лишь при $|u_0| = 0$.

Если $\tau_0(P) = f$ (фиг. 1, б) и конец вектора $\tau_0(P)$ находится на ограничении, то допустимые направления $\tau - \tau_0$ образуют конус с раствором 180° и осью, параллельной вектору τ_0 . Поэтому для неположительности $(u_0, \tau - \tau_0)$ необходима коллинеарность векторов τ_0 и u_0 .

3. Некоторые свойства решения вариационной задачи. Ниже на основе вариационной формулировки устанавливается ряд свойств локальных и интегральных характеристик решения задачи. Доказывается монотонность



Фиг. 1

зависимостей проекций полной силы трения от проекций относительного сдвига тел, момента поворота — от величины поворота. Устанавливаются свойства симметрии решения относительно осей координат; доказывается единственность решения при задании кинематических или силовых факторов.

Утверждение 3.1. Решение вариационной задачи (2.1) единственно.

Предположим противное. Пусть имеются две функции $\tau_1 \in V$ и $\tau_2 \in V$, на которых функционал $F(\tau)$ принимает минимальное на V значение. Имеем

$$F(\tau_1) - F(\tau_2) = \int_E [B(\tau_2) - v] (\tau_1 - \tau_2) dx dy + \frac{1}{2} \int_E B(\tau_1 - \tau_2) (\tau_1 - \tau_2) dx dy = 0 \quad (3.1)$$

Первое слагаемое в правой части (3.1) неотрицательно в силу (2.3) с учетом $\tau_1 \in V$. Второе слагаемое также неотрицательно, причем равно нулю только при $\tau_1 - \tau_2 = 0$, так как оно представляет собой упругую энергию полупространства $z \leq 0$ от приложения к его поверхности напряжений $\tau_1 - \tau_2$. Следовательно, равенство (3.1) возможно лишь в случае $\tau_1 = \tau_2$.

Замечание. Сформулированное утверждение и его доказательство имеют точный смысл для функций класса $\tau (\tau_{xz} \in H_{-1/2}^0(E), \tau_{yz} \in H_{-1/2}^0(E))$, если $v (v_x \in H_{1/2}, v_y \in H_{1/2})$. Здесь $H_{-1/2}^0(E)$ — подпространство пространства $H_{-1/2}$, состоящее из функций с носителем в \bar{E} [9]; $H_{1/2}$ и $H_{-1/2}$ — пространства Соболева — Слободецкого дробного порядка (см., например, [9]). В указанном классе имеет место разрешимость задачи (2.1).

Строгая оценка второго слагаемого в (3.1) имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_E B(\tau_1 - \tau_2) (\tau_1 - \tau_2) dx dy \geq \frac{1 - |v|}{4\pi} \|\tau_1 - \tau_2\|_{H_{1/2}^0(E)}^2$$

Здесь под квадратом нормы вектор-функции понимается сумма квадратов норм ее проекций на оси координат.

Будем в дальнейшем в силу малости площадки контакта заменять величину относительного жесткого сдвига тел ее разложением по x и y до первых членов в окрестности точки O . Тогда получим $v_x = v_x^\circ - \Omega y$, $v_y = v_y^\circ + \Omega x$, где v_x° и v_y° — проекции относительного сдвига тел в точке O , Ω — угол взаимного поворота тел относительно оси Z .

Следствие. Из утверждения (3.1) вытекают некоторые свойства симметрии решения вариационной задачи.

1. При $v_x^\circ \neq 0$, $\Omega \neq 0$, $v_y^\circ = 0$ выполняются равенства: $\tau_{xz}(x, y) = \tau_{xz}(-x, y)$, $u_x(x, y) = u_x(-x, y)$, $\tau_{yz}(x, y) = -\tau_{yz}(-x, y)$, $u_y(x, y) = -u_y(-x, y)$.

2. При $v_x^\circ \neq 0$, $v_y^\circ = \Omega = 0$ выполняются равенства: $\tau_{xz}(x, y) = \tau_{xz}(-x, y)$, $u_x(x, y) = u_x(-x, y)$, $\tau_{yz}(x, y) = -\tau_{yz}(-x, y)$, $u_y(x, y) = -u_y(-x, y)$, $\tau_{zz}(x, y) = \tau_{zz}(x, -y)$, $u_x(x, y) = u_x(x, -y)$, $\tau_{yz}(x, y) = -\tau_{yz}(x, -y)$, $u_y(x, y) = -u_y(x, -y)$.

Справедливы также аналогичные приведенным выше утверждения, получаемые заменой в условиях 1, 2 x на y и v_x° на v_y° .

Докажем первое утверждение, второе утверждение доказывается аналогично. Пусть функция $\tau(x, y)$ доставляет минимум функционалу $F(\tau)$ на множестве V . Рассмотрим функцию $\tau^*(x, y)$, $(\tau_{xz}^*(x, y) = \tau_{xz}(-x, y)$, $\tau_{yz}^*(x, y) = -\tau_{yz}(-x, y)$). Так как для функции f , задающей множество V , справедливо равенство $f(x, y) = f(-x, y)$ (см. п. 1), то функция $\tau^*(x, y)$ принадлежит V . Делая замену x' на $-x'$ при интегрировании в (1.5) и учитывая, что $\cos \theta = (x-x')/R$, получаем $B_x(\tau^*(x, y)) = B_x(\tau(-x, y))$, $B_y(\tau^*(x, y)) = -B_y(\tau(x, y))$.

Подставляя $B(\tau^*)$ и τ^* в функционал $F(\tau)$, получаем с учетом равенств $v_x(-x, y) = v_x(x, y)$, $v_y(x, y) = -v_y(-x, y)$, что $F(\tau^*) = F(\tau)$. Из утверждения 3.1 следует, что функция, минимизирующая F на V , единственна, т. е. $\tau^* \equiv \tau$. Поэтому $\tau_{xz}(x, y) = \tau_{xz}(-x, y)$, $\tau_{yz}(x, y) = -\tau_{yz}(-x, y)$.

Учитывая установленные выше свойства проекций $B(\tau)$ и \mathbf{v} , а также выражение для α (п. 1), получаем $u_x(x, y) = u_x(-x, y)$, $u_y(x, y) = -u_y(-x, y)$.

Утверждение 3.2. Пусть

$$F_x = \int_E \tau_{xz} dx dy, \quad F_y = \int_E \tau_{yz} dx dy, \quad M_z = \int_E x \tau_{yz} - y \tau_{xz} dx dy$$

соответственно проекции полной силы трения на оси X , Y и полного момента сил трения на ось Z .

Тогда зависимости: (а) $F_x(v_x^\circ)$ при фиксированных Ω и v_y° , (б) $F_y(v_y^\circ)$ при фиксированных v_x° и Ω , (в) $M_z(\Omega)$ при фиксированных v_x° и v_y° — монотонно возрастающие.

Рассмотрим решения вариационной задачи (2.1) $\tau(v_1)$ и $\tau(v_2)$, полученные соответственно при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$. Отметим, что в обоих случаях функция f одна и та же, поэтому $\tau(v_1)$ и $\tau(v_2)$ принадлежат одному множеству V . Запишем необходимые условия минимума на V функционала $F(\tau, \mathbf{v}_1)$ при $\tau = \tau(v_1)$ и функционала $F(\tau, \mathbf{v}_2)$ при $\tau = \tau(v_2)$ на том же множестве V . Имеем

$$F(\tau(v_1), \mathbf{v}_1) = \int_E \left[\frac{1}{2} B(\tau(v_1)) \tau(v_1) - \tau(v_1) \mathbf{v}_1 \right] dx dy \leq F(\tau(v_2), \mathbf{v}_1) =$$

$$= \int_E \left[\frac{1}{2} B(\tau(v_2)) \tau(v_2) - \tau(v_2) \mathbf{v}_1 \right] dx dy$$

$$F(\tau(v_2), \mathbf{v}_2) = \int_E \left[\frac{1}{2} B(\tau(v_2)) \tau(v_2) - \tau(v_2) \mathbf{v}_2 \right] dx dy \leq F(\tau(v_1), \mathbf{v}_2) =$$

$$= \int_E \left[\frac{1}{2} B(\tau(\mathbf{v}_1)) \tau(\mathbf{v}_1) - \tau(\mathbf{v}_1) \mathbf{v}_2 \right] dx dy$$

Складывая приведенные неравенства, получаем

$$\begin{aligned} & \int_E (\tau(\mathbf{v}_1) - \tau(\mathbf{v}_2)) (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) dx dy = \\ & = F(\tau(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1) - F(\tau(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1) + F(\tau(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2) - F(\tau(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_2) \geq 0 \end{aligned}$$

Используя представления п. 2 для приращения функционала $F(\tau)$ с учетом вида функции \mathbf{v} , а также определения F_x , F_y и M_z , получаем

$$\begin{aligned} & (F_x(\mathbf{v}_1) - F_x(\mathbf{v}_2)) (\mathbf{v}_{1x}^\circ - \mathbf{v}_{2x}^\circ) + (F_y(\mathbf{v}_1) - F_y(\mathbf{v}_2)) (\mathbf{v}_{1y}^\circ - \mathbf{v}_{2y}^\circ) + \\ & + (M_z(\mathbf{v}_1) - M_z(\mathbf{v}_2)) (\Omega_1 - \Omega_2) \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \int_E B(\tau(\mathbf{v}_1) - \tau(\mathbf{v}_2)) (\tau(\mathbf{v}_1) - \tau(\mathbf{v}_2)) dx dy \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выведем утверждение (а) из неравенства (3.2). Утверждения (б) и (в) доказываются аналогично. При фиксированных \mathbf{v}_y° и Ω (т. е. при $\mathbf{v}_{1y}^\circ = \mathbf{v}_{2y}^\circ$, $\Omega_1 = \Omega_2$), получаем

$$(F_x(\mathbf{v}_{1x}^\circ) - F_x(\mathbf{v}_{2x}^\circ)) (\mathbf{v}_{1x}^\circ - \mathbf{v}_{2x}^\circ) \geq 0$$

что эквивалентно монотонной зависимости F_x от \mathbf{v}_x° при фиксированных \mathbf{v}_y° и Ω .

В данной работе решения контактных задач с трением строятся при заданном распределении относительных сдвигов тел как абсолютно жестких $v(x, y)$. Из утверждения 3.1 вытекает, что задание $v(x, y)$ единственным образом определяет решение задачи. В то же время построенные для некоторых случаев точные и приближенные аналитические решения контактных задач с трением [10, 11] единственным образом определяются заданием полной силы трения. Установим аналогичное свойство для рассматриваемого здесь класса задач.

Утверждение 3.3. Задание сил F_x , F_y и момента M_z единственным образом определяет решение вариационной задачи (2.1).

Пусть заданы значения указанных характеристик и предположим, что им соответствуют два вектора \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , которым отвечают два различных решения задачи (2.1) $\tau(\mathbf{v}_1)$ и $\tau(\mathbf{v}_2)$. Для этих двух решений справедливо неравенство (3.2), причем его левая часть равна нулю, так как значения F_x , F_y и M_z для обоих решения одинаковы. Правая же его часть строго положительна, если решения $\tau(\mathbf{v}_1)$ и $\tau(\mathbf{v}_2)$ различны (см. доказательство утверждения 3.1). Указанное противоречие устраняется лишь при $\tau(\mathbf{v}_1) \equiv \tau(\mathbf{v}_2)$, т. е. при заданных полных силах и моменте решения вариационной задачи единственно (в том же смысле, что и в утверждении 3.1).

4. Аппроксимация решения вариационной задачи решением задачи математического программирования и численный метод ее решения. Для приближенного сведения вариационной задачи (2.1) к конечно-мерной задаче математического программирования площадка контакта E вписывается в прямоугольник со сторонами, параллельными осям X, Y . Разобьем его прямыми $X = k\Delta x$, $Y = l\Delta y$, $0 \leq k \leq k_1$, $0 \leq l \leq L_1$ на одинаковые прямоугольные ячейки со сторонами $\Delta x, \Delta y$. Для координат центров этих ячеек имеем место выражения: $x_k = 1/2 \Delta x (2k - 1)$, $y_l = 1/2 \Delta y (2l - 1)$, $1 \leq k \leq k_1$, $1 \leq l \leq L_1$.

Аппроксимируем искомую функцию $\tau(x, y)$ кусочно-постоянной функцией, полагая в точках (x, y) ячейки с центром (x_h, y_l) $\tau(x, y) \equiv \tau(x_h, y_l)$. Если центр ячейки лежит вне области E , то в соответствии с граничным условием (1.3) полагаем $\tau(x_h, y_l) = 0$. При подсчете интеграла по E , определяющего F , заменим область E совокупностью ячеек, центры которых принадлежат E . Для величин, задающих подынтегральную функцию в F , положим в каждой ячейке с центром (x_h, y_l) $U(x, y) = U(x_h, y_l)$, $v(x, y) = v(x_h, y_l)$.

Величины $U_x(x_h, y_l)$, $U_y(x_h, y_l)$ выражаются через τ с помощью интегрального оператора, ядро которого имеет особенность $\sim 1/R$. Для уменьшения погрешности, вносимой дискретизацией в решение вариационной задачи, функции U_x и U_y вычислялись по точным формулам в классе кусочно-постоянных функций τ . Указанное интегрирование проводится аналогично изложенному в [8] приему вычисления интеграла типа простого слоя по области, представляющей внутренность многоугольника.

С учетом сказанного выше приходим к следующей задаче математического программирования:

$$\min_{\tau_x(x_h y_l), \tau_y(x_h y_l)} [F(\tau_x(x_h y_l), \tau_y(x_h y_l))] \quad (4.1)$$

при $\{[\tau_x(x_h y_l)]^2 + [\tau_y(x_h y_l)]^2\}^{1/2} \leq f(x_h y_l)$

$$F = \sum_{\substack{1 \leq h \leq K1 \\ 1 \leq l \leq L1}} \left\{ \frac{1}{2} [\tau_x(x_h y_l) U_x(x_h y_l) + \tau_y(x_h y_l) U_y(x_h y_l)] - \right.$$

$$\left. - \tau_x(x_h y_l) v_x(x_h y_l) - \tau_y(x_h y_l) v_y(x_h y_l) \right\}$$

$$U_x(x_h y_l) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq K1 \\ 1 \leq j \leq L1}} B11[|i-k|+1, |j-l|+1] \tau_x(x_h y_l) +$$

$$+ \text{sign}(i-k) \text{sign}(j-l) B12[|i-k|+1, |j-l|+1] \tau_y(x_h y_l) \quad (4.2)$$

$$U_y(x_h y_l) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq K1 \\ 1 \leq j \leq L1}} B22[|i-k|+1, |j-l|+1] \tau_y(x_h y_l) +$$

$$+ \text{sign}(i-k) \text{sign}(j-l) B12[|i-k|+1, |j-l|+1] \tau_x(x_h y_l)$$

$$B11[r, t] = \frac{1}{\pi G} (J_1 - v J_3), \quad B12[r, t] = \frac{v}{\pi G} J_2, \quad B22[r, t] = \frac{1}{\pi G} [(1-v) J_1 + v J_3]$$

$$J_1 = \frac{1}{2} u \ln \frac{(1+p_1)(1-p_4)}{(1+p_4)(1-p_1)} + \frac{1}{2} (u-\Delta x) \ln \frac{(1+p_3)(1-p_2)}{(1-p_3)(1+p_2)} +$$

$$+ \frac{1}{2} v \ln \frac{(1-q_2)(1+q_1)}{(1+q_2)(1-q_1)} + \frac{1}{2} (v-\Delta y) \ln \frac{(1-q_4)(1+q_3)}{(1+q_4)(1-q_3)}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= u(q_4 - q_1) + v(p_2 - p_1) + (u - \Delta x)(q_2 - q_3) + (v - \Delta y)(p_4 - p_3) \\
 J_3 &= \frac{u}{2} \ln \frac{(1+p_1)(1-p_4)}{(1-p_1)(1+p_4)} - u(p_1 - p_4) + v(q_1 - q_2) + \\
 &+ \frac{u - \Delta x}{2} \ln \frac{(1+p_3)(1-p_2)}{(1-p_3)(1+p_2)} - (u - \Delta x)(p_3 - p_2) + (v - \Delta y)(q_3 - q_4) \\
 u &= \frac{\Delta x}{2}(2r-1), \quad v = \frac{\Delta y}{2}(2t-1), \quad p_1(q_1) = \frac{v(u)}{\sqrt{u^2+v^2}} \\
 p_2(q_2) &= \frac{v(u-\Delta x)}{\sqrt{v^2+(u-\Delta x)^2}}, \quad p_3(q_3) = \frac{v-\Delta y(u-\Delta x)}{\sqrt{(v-\Delta y)^2+(u-\Delta x)^2}}
 \end{aligned}$$

Для численного решения задачи (2.1) использовался метод проекций градиента с автоматическим контролем шага в соответствии с точностью представления истинного приращения функционала его линейной относительно приращений искомого величин частью [12]. Вычисления градиента функционала и проектирование на ограничения осуществлялись по явным формулам. Для повышения скорости счета значения $Bij[r, t]$ хранились в памяти ЭВМ. Метод, аналогичный описанному, использовался при решении пространственных контактных задач².

Рассмотренный выше численный метод в задачах, связанных с квадратичным функционалом, которые решаются в данной работе, показал весьма высокую эффективность. Точность решения контролировалась по выполнению исходных граничных условий (1.4). В рассмотренных случаях в точках области схода с ограничений, где $|\tau|/f < 1$, величина относительного сдвига тел составляет $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$ среднего ее значения в области $|\tau|/f = 1$. В области, где $|\tau|/f = 1$, угол между векторами τ и u составляет $\sim 1' - 10'$. Указанная точность достигалась после 20 итераций метода за десять минут работы БЭСМ-6 при сетке 30×30 .

5. Результаты расчетов. Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x/\sqrt{ab}, \quad y_1 = y/\sqrt{ab}, \quad R_1 = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2} = R/\sqrt{ab}, \\
 \tau_1 &= \tau/(\rho\sigma_0), \quad u_1 = u/v_x^\circ, \quad v_1 = v/v_x^\circ.
 \end{aligned}$$

В дальнейшем для простоты у безразмерных переменных сохраним прежние обозначения. Для безразмерных величин получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 -g \leq x \leq g, \quad -g^{-1} \leq y \leq g^{-1}, \quad g = (a/b)^{1/2} \\
 v_x = 1 - \omega y, \quad v_y = w + \omega x, \quad u = -\gamma B(\tau, v, g) + v \\
 \omega = \Omega \sqrt{ab}/v_x^\circ, \quad w = v_y^\circ/v_x^\circ, \quad \gamma = \rho\sigma_0 \sqrt{ab}/(Gv_x^\circ)
 \end{aligned}$$

где оператор $B(\tau, v, g)$ получается в результате замены в операторе B (п. 1) размерных величин на безразмерные согласно приведенным выше формулам. Здесь и далее предполагается, что $v_x^\circ > 0$.

Рассматриваемые задачи характеризуются пятью безразмерными параметрами: ω , w , γ , g , v . Параметры ω , w , γ оказывают наиболее существенное влияние на форму границы раздела между областями проскальзывания и сцепления, а также

² Гольдштейн Р. В., Завосский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П. Указ. публ., с. 12.

на структуру полей касательных напряжений и относительных касательных смещений. Параметры ω и w характеризуют соответственно соотношения между величиной относительного смещения вдоль оси x и величинами относительного сдвига поверхностей от смещения вдоль оси y и от поворота вокруг оси z . Параметр γ характеризует соотношение между вкладом в величину относительного смещения членов от жесткого относительного сдвига тел и членов от их упругих смещений. В дальнейшем ограничимся исследованием влияния на решение указанных параметров ω , w и γ . Для остальных параметров расчета положим $\nu=0,3$, $g=(0,5)^{1/2}$.

Сначала рассматривается случай отсутствия взаимного поворота тел и наличия относительного жесткого сдвига в направлении x . Дается сравнение с приближенным аналитическим решением [13]. Затем рассматривается случай сдвига в том же направлении при наличии взаимного поворота тел. Строится граница между областями проскальзывания и сцепления и поля направлений τ и u . Далее рассматривается наличие поворота, а также сдвига и в направлении x , и в направлении y . Кроме границы между E_+ и E_0 и поля направлений τ и u строятся распределения величин τ_{xz} , τ_{yz} , u_x , u_y вдоль некоторых прямых $y=\text{const}$. В заключение рассматриваются зависимости некоторых интегральных характеристик решения — полных сил и момента трения — от величин жестких сдвигов и взаимного поворота тел.

В случае $\omega=w=0$, $\gamma \neq 0$ было построено приближенное аналитическое решение задачи [13]. Из него вытекает, что если область E — внутренность эллипса $(x/a^*)^2 + (y/b^*)^2 = 1$, $(a/a^*) = (b/b^*) = k [1 - 1/(K(g) - \nu D(g)) \gamma g]^{1/2}$, где $K(g)$, $D(g)$ — эллиптические интегралы [14] и распределение касательных напряжений имеет вид

$$\tau_{xz} = \rho \sigma_0 [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2} - K \rho \sigma_0 [1 - (x/a^*)^2 - (y/b^*)^2]^{1/2} \quad (x, y \in E^*)$$

$$\tau_{xz} = \rho \sigma_0 [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2} \quad (x, y \in E/E^*), \quad \tau_{yz} = 0 \quad (x, y \in E)$$

тогда: в области E^* выполняется условие сцепления контактирующих тел, т. е. равенство нулю проекций относительно сдвига оси X и Y ; в области E величина касательных напряжений меньше произведения давления на коэффициент трения; в области $E \setminus E^*$ эта величина равна указанному произведению.

Условие сонаправленности векторов τ и u в области $E \setminus E^*$ не учитывалось.

Результаты расчетов в случае $\omega=w=0$ оказались весьма близкими к решению [13]. Отметим, что для достоверности сравнения с [13] они проводились на сетке 45×50 , более частой, чем в остальных случаях. Расчеты показали, что проекция напряжений и относительных смещений на ось X существенно меньше, чем проекция на ось Y (хотя в окрестности границы площадки контакта их отношение доходит до 10%). Область сцепления имеет форму эллипса.

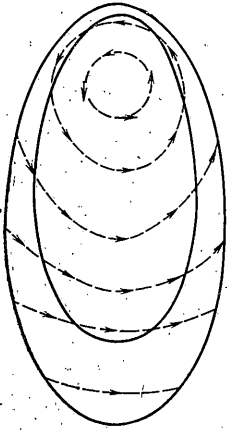
При $\gamma=2,5$, $b/a=2$ отношение его полуосей равно 1,94; при $\gamma=1,5$, $b/a=2$ оно равно 1,87, что хорошо соответствует условию подобия этого эллипса эллипсу контакта, имеющему место в решении [13]. Под длинами полуосей расчетного эллипса, ограничивающего область сцепления, понимаются суммы длин сторон ячеек, примыкающих к осям X и Y , в которых реализуется неравенство $|\tau|/f < 1$.

Ниже приведено сравнение значений напряжений τ_{xz} для точек оси x в численном расчете и τ_{xz}° в решении [13]:

x/g	0	$3/45$	$5/45$	$7/45$	$12/45$	$17/45$
τ_{xz}	0,172	0,174	0,177	0,183	0,216	0,336
τ_{xz}°	0,178	0,180	0,184	0,189	0,221	0,332

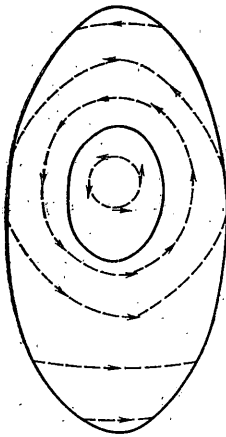
Видно, что сравниваемые значения весьма близки и почти во всех точках расчетные значения несколько меньше полученных в решении [13]. Вследствие этого в расчете получается несколько меньшее значение полной силы трения. Так, при $b/a=2$, $\gamma=2,5$, $F_x=0,913$, $F_x=0,929$ [13].

Перейдем к описанию расчетов при наличии обеих проекций жесткого относительного смещения, а также взаимного поворота контактирующих тел. На фиг. 2 — 6 приведены поля направлений касательных напряжений (в области проскальзывания эти поля задают также направления относительных касательных смещений, что следует из граничных условий (1.4)) и линии раздела (сплошные линии) между областями проскальзывания и сцепления ($\gamma = 2,5$). Пунктиром задаются линии, касательными к которым являются векторы направлений касательных напряжений. Результаты расчетов на фиг. 2—4 получены при фиксированном значении сдвига v_x° ($v_y^\circ = 0$) для трех последовательно увеличивающихся значений поворота Ω ($\omega = 0,7, 2,5, 6$). В силу определения безразмерных параметров это эквивалентно расчетам при фиксированном γ и изменении ω пропорционально Ω .

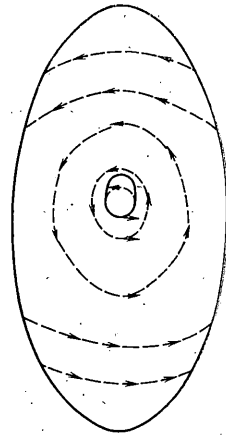


Фиг. 2

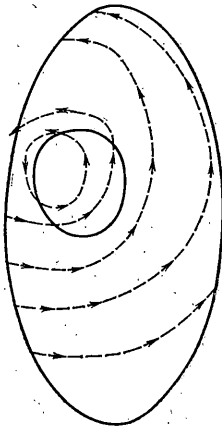
Для полученного численного решения выполняется свойство его симметрии относительно оси Y , установленное в п. 3. Увеличение степени взаимного пово-



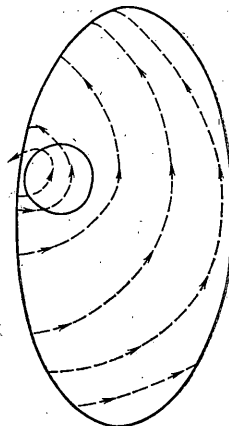
Фиг. 3



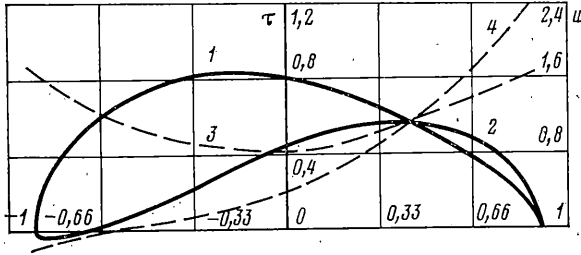
Фиг. 4



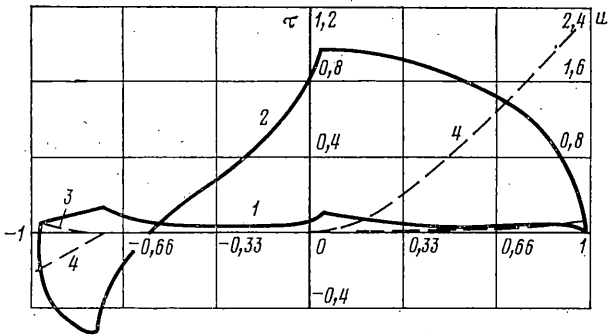
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



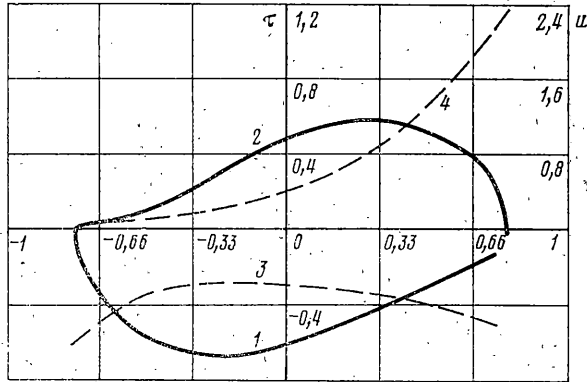
Фиг. 8

рота тел приводит к перемещению и деформации границы области сцепления. Область сцепления при этом сжимается. Перемещение ее носит весьма сложный, неодносторонний характер. Это перемещение происходит вдоль оси Y , причем сначала с ростом ω область сцепления перемещается вверх, а потом вниз. Ее расположение связано с расположением точки $x^*=0$, $y^*=1/\omega$, в которой имеет место равенство $|v(x^*, y^*)|=0$.

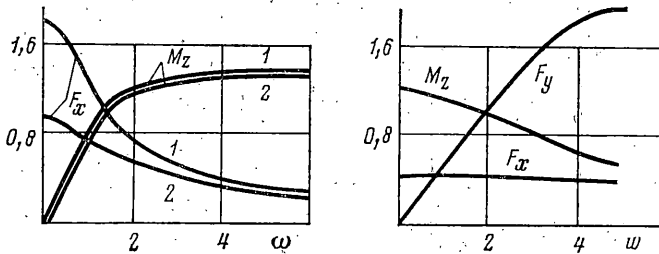
В случае малых ω относительное жесткое смещение $v(x, y)$ определяется сдвигом вдоль оси x , функция $v(x, y)$ близка к постоянной на площадке контакта, а точка (x^*, y^*) находится вдали от ее границы. В этом случае область сцепления возникает в результате того, что в некоторой части площадки контакта упругие относительные смещения противоположны жестким смещениям $v(x, y)$. При этом область сцепления близка к симметричной относительно оси X .

С увеличением ω точка (x^*, y^*) приближается извне площадки контакта к ее границе. При этом в верхней части площади контакта образуется область малых относительных жестких смещений, которая входит в формирующуюся область сцепления. В нижней же части площадки контакта жесткие смещения увеличиваются и принадлежащие ей точки выходят из области сцепления. При дальнейшем росте степени относительного поворота область малых относительных жестких смещений движется к центру площадки контакта. Такое же перемещение при этом совершает и область сцепления (фиг. 3). При достаточно больших значениях ω эта область трансформируется в некоторую окрестность центра площадки контакта, фиг. 4.

Аналогичная закономерность перемещения области сцепления имеет место и при наличии жесткого сдвига вдоль оси Y ($v_y^0 \neq 0$). На фиг. 5, 6 приведены результаты расчетов для фиксированных значений $\gamma=2,5$ и $\omega=2,5$ при двух значениях параметра $w=2, 3$, пропорционального v_y^0 . Пере-



Фиг. 9



Фиг. 10, 11

мещение области сцепления в этом случае происходит в соответствии с движением точки $x^* = -w/\omega$, $y^* = 1/\omega$, удовлетворяющей, как и выше, равенству $|\mathbf{v}(x^*, y^*)| = 0$. С увеличением w область сцепления перемещается в сторону отрицательных X . Ее граница состоит из двух дуг: менее выпуклой, расположенной в области больших X и более выпуклой — в области меньших X . В случае $w \neq 0$ теряется симметрия решения относительно оси Y , имеющая место при $w = 0$.

Следует отметить, что область сцепления образуется в результате сложения проекций относительного жесткого сдвига и относительных упругих смещений, которые сложным образом зависят от напряжений τ . Поэтому, хотя перемещения области сцепления следуют за перемещениями точки (x^*, y^*) обращения в нуль жесткого относительного сдвига $\mathbf{v}(x, y)$, эта точка не обязательно лежит в центральной части области сцепления и даже вообще внутри нее.

Из анализа полей τ на фиг. 2—6 вытекает, что они имеют существенно пространственный характер и величины проекций τ на оси X и Y сравнимы между собой. Характерной чертой рассматриваемых полей является наличие особой точки типа центр. В некоторых случаях при малых ω или при больших w (фиг. 6) поле τ описывает вращение вокруг некоторой точки, лежащей вне площадки контакта.

На фиг. 7—9, соответствующих наличию сдвигов в направлении X , Y и поворота относительно оси Z ($\gamma = 2,5$, $\omega = 2,5$, $w = 2$), даны распределения проекций касательных напряжений (τ_{xz} — кривые 1, τ_{yz} — кривые 2) и относительных проскальзываний (u_x — кривые 3, u_y — кривые 4) вдоль некоторых прямых $y = \text{const}$ ($y = -0,7g^{-1}$, $0,1g^{-1}$, $0,33g^{-1}$). Одна из этих прямых лежит выше области сцепления, другая пересекает ее, третья расположена ниже.

На фиг. 10, 11 даны зависимости интегральных характеристик решения — сил и моментов трения — от степени поворота при фиксированном γ и от степени сдвига вдоль оси Y при фиксированных γ и ω . Зависимости на фиг. 10 приведены для двух значений γ . Зависимости M_z от ω и F_y от w монотонны, что соответствует результатам п. 3. Изменение величины поперечного сдвига слабо влияет на проекцию силы трения F_x .

Из сравнения характера зависимостей интегральных характеристик при разных γ (фиг. 10) можно видеть, что кривые $M_z(\omega)$ весьма близки между собой, зависимость $F_x(\omega)$ при меньшем γ более интенсивна, чем при большем. Последнее связано с тем, что убывание F_x определяется возникновением при $\omega \neq 0$ несимметрии поля τ_{xz} относительно оси X . При больших ω функция τ_{xz} приближается к кососимметричной, а F_x — к нулю. При меньших γ необходимо меньшее значение ω для создания такой же степени несимметрии функции τ_{xz} , чем при больших значениях γ .

Автор благодарит Р. В. Гольдштейна, А. Ф. Зазовского и Р. П. Федоренко за помощь и советы в процессе работы и обсуждение ее результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Спектор А. А. Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 1, с. 39–42.
2. Duvaut G., Lions J. L. Les inéquations en mécanique et en physique. T. 1. Paris: Dunod, 1972. 195 p.
3. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
4. Кравчук А. С. Метод двойственности в задаче теории упругости с условием типа трения на границе.— В кн.: Напряженно-деформированное состояние конструкций из упругих и вязкоупругих материалов. Свердловск: Изд-во Уральск. научн. центра АН СССР, 1977, с. 31–40.
5. Panagiotopoulos P. D. A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in the theory of elasticity.— Ingr-Arch., 1975, В. 44, Н. 6, p. 421–432.
6. Goldstein R. V., Entov V. M. Variational bounds and qualitative methods in fracture mechanics.— Proc. Internat. Congr. on Fracture. V. 3. Canada, 1977. London: Pergamon Press, 1977.
7. Гольдштейн Р. В., Спектор А. А. Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 82–94.
8. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
9. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
10. Глаголев Н. И. Сопроствление перекачиванию цилиндрических тел.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 4, с. 318–333.
11. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
12. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1979. 488 с.
13. Mindlin R. D. Compliance of elastic bodies in contact.— J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, No. 3, p. 259–268.
14. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VIII.1979