

УДК 531.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ

АКУЛЕНКО Л. Д., МИХАЙЛОВ С. А., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

При движении управляемых систем, предназначенных для перемещения грузов в пространстве, — манипуляторов, роботов, грузоподъемных машин — в ряде случаев существенное значение имеет упругая податливость конструкций. Упругость систем приводит к дополнительным колебательным степеням свободы. В случае большой массы перемещаемых грузов возникающие упругие колебания низкочастотны, а их амплитуда может быть недопустимо велика, особенно если управляющие воздействия или внешние возмущения попадают в резонанс с частотами упругих колебаний. На практике управление обычно строится на основе идеальной абсолютно жесткой схемы конструкции манипулятора без учета его упругих свойств [1–3]. Поэтому представляет интерес исследовать управляемые движения манипулятора с учетом его упругой податливости. Это позволит оценить возникающие упругие колебания, влияющие на точность выполнения рабочих операций манипулятора. В работе [4] составлены уравнения движения упругого многозвенного манипулятора в матричной форме.

В публикуемой работе динамика плоских управляемых движений манипулятора с учетом упругости его звеньев исследуется моделированием на ЭВМ.

1. Постановка задачи. Рассматривается механическая модель манипулятора (фиг. 1), который состоит из двух прямолинейных стержней OO_1 , O_1O_2 и совершает движение в плоскости OXY . Стержень OO_1 посредством цилиндрического плечевого шарнира O соединен с неподвижным основанием. В точке O_1 находится цилиндрический локтевой шарнир, соединяющий стержни OO_1 и O_1O_2 . В точке O_2 расположен цилиндрический кистевой шарнир, посредством которого стержень O_1O_2 соединен с перемещаемым грузом P . Двухзвенная модель манипулятора принята потому, что длины звеньев OO_1 , O_1O_2 обычно много больше размеров кисти манипулятора. Считаем, что тонкие упругие стержни OO_1 , O_1O_2 могут совершать поперечные и крутильные колебания малой амплитуды. Изменением их длины, а также продольными упругими смещениями пренебрегаем по сравнению с амплитудой поперечных смещений. Груз P считаем абсолютно твердым телом с заданными инерционными характеристиками. Массу m груза P считаем много большей, чем полная масса манипулятора.

Это предположение позволяет сделать два упрощения. Во-первых, можно пренебречь кинетической энергией манипулятора по сравнению с кинетической энергией груза. Во-вторых, при этом предположении частоты собственных упругих колебаний стержней будут много больше, чем частоты упругих колебаний манипулятора, обусловленные наличием груза. Главные (низшие) частоты колебаний системы тогда можно определить исходя из квазистатического приближения, т. е. полагая, что стержни находятся в каждый момент времени в равновесии. Предполагаем также, что угловые скорости звеньев малы по сравнению с низшими частотами упругих колебаний системы. Поэтому эффектами, обусловленными действием продольных центробежных сил на упругие стержни, пренебрегаем (см. [5]).

Наряду с упругой моделью будем рассматривать также вспомогательную абсолютно жесткую модель манипулятора, у которой углы в шарнирах и длины звеньев те же, что и для реальной упругой модели. На фиг. 1 жесткая модель показана тонкими линиями.

Кинематические управляющие воздействия — углы в шарнирах O, O_1, O_2 будем задавать как функции времени t так, чтобы при жесткой модели манипулятора груз осуществлял заданное движение. Эти функции времени затем подставляются в уравнения движения упругого манипулятора, т.е. предполагается, что программное управление, найденное на основе жесткой модели, используется для реальной упругой модели. Численное интегрирование полученной системы позволит оценить влияние упругой податливости звеньев манипулятора на его динамику.

2. Вычисление функции Лагранжа.

Для вычисления потенциальной энергии упругого двухзвенника предварительно приведем формулу для потенциальной упругой энергии прямолинейного однородного стержня длины l . Сечение стержня считаем кольцевым или круговым. Пусть на одном (левом)

конце стержень жестко заделан, а на другом задан вектор упругого смещения $\mathbf{R}$ и вектор поворота Φ . Стержень находится в равновесии. Обозначим через $\mathbf{u}(s)$ вектор упругого смещения нейтральной оси стержня, а через $\varphi(s)$ — угол поворота сечения стержня вокруг его оси (здесь аргумент s — длина стержня, отсчитанная от его левого конца, $0 \leq s \leq l$). Потенциальная упругая энергия деформированного стержня равна

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^l (\mathbf{u}''(s))^2 ds + \frac{c}{2} \int_0^l (\varphi'(s))^2 ds \quad (2.1)$$

Здесь штрихами обозначены производные по s , E — модуль Юнга материала стержня, I — момент инерции сечения стержня относительно диаметра сечения, c — жесткость стержня на кручение. Функции $\mathbf{u}(s)$, $\varphi(s)$ в квазистатическом приближении удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{IV}(s) &= 0, \quad \varphi''(s) = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}'(0) = \varphi(0) = 0 \\ \mathbf{u}(l) &= \mathbf{R}, \quad \mathbf{u}'(l) = \Phi \times \mathbf{k}, \quad \varphi(l) = \Phi \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

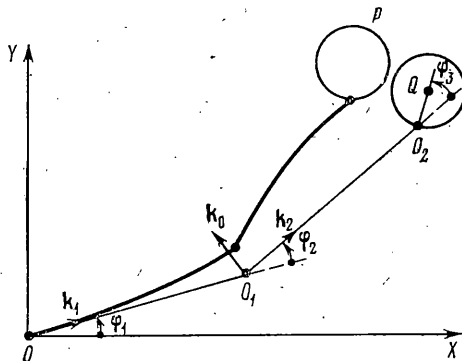
где $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный по оси стержня в недеформированном состоянии.

Подставляя в соотношение (2.1) решение краевой задачи (2.2), равное

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s) &= (3\mathbf{R} - l\Phi \times \mathbf{k})(s/l)^2 + (l\Phi \times \mathbf{k} - 2\mathbf{R})(s/l)^3 \\ \varphi(s) &= \Phi \cdot \mathbf{k}(s/l) \end{aligned} \quad (2.3)$$

получим потенциальную энергию упругого стержня в виде

$$\Pi = \frac{2EI}{l} \left[3 \frac{\mathbf{R}^2}{l^2} - 3 \frac{\mathbf{R}}{l} \cdot (\Phi \times \mathbf{k}) + (\Phi \times \mathbf{k})^2 \right] + \frac{c}{2l} (\Phi \cdot \mathbf{k})^2 \quad (2.4)$$



Фиг. 1

Перейдем к рассмотрению упругого двузвенника OO_1, O_2 , оба звена которого — стержни кольцевого или кругового поперечного сечения. Длины стержней OO_1, O_1O_2 обозначим l_j , их жесткости на изгиб — $E_j I_j$, жесткости на кручение — c_j ; индекс $j=1$ всюду относится к стержню OO_1 , $j=2$ — к стержню O_1O_2 .

Обозначим через k_j орт, направленный по оси j -го стержня в недеформированном состоянии, R_j, Φ_j — векторы смещения и поворота конца j -го стержня относительно недеформированной конфигурации ($j=1, 2$). Через k_0 обозначим орт, перпендикулярный k_2 и лежащий в плоскости OXY (фиг. 1). Жесткое смещение конца второго стержня (точки O_2) равно $R_2^0 = R_1 + \Phi_1 \times k_2 l_2$. Упругое смещение и вектор упругого поворота конца второго стержня запишутся так:

$$R_2 - R_2^0 = R_2 - R_1 - \Phi_1 \times k_2 l_2, \quad \Phi_2 - \Phi_1 \quad (2.5)$$

Составим потенциальную энергию двузвенника, пользуясь формулой (2.4) и подставляя в нее вместо R, Φ векторы R_1, Φ_1 для первого стержня и векторы (2.5) для второго стержня. Получим

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = & 2E_1 I_1 l_1^{-1} [3R_1^2 l_1^{-2} - 3R_1 \cdot (\Phi_1 \times k_1) l_1^{-1} + (\Phi_1 \times k_1)^2] + \\ & + \frac{1}{2} c_1 (\Phi_1 \cdot k_1)^2 l_1^{-1} + 2E_2 I_2 l_2^{-1} \{ 3(R_2 - R_1 - \Phi_1 \times k_2 l_2)^2 l_2^{-2} - \\ & - 3(R_2 - R_1 - \Phi_1 \times k_2 l_2) \cdot [(\Phi_2 - \Phi_1) \times k_2] l_2^{-1} + \\ & + [(\Phi_2 - \Phi_1) \times k_2]^2 \} + \frac{1}{2} c_2 [(\Phi_2 - \Phi_1) \cdot k_2]^2 l_2^{-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Каждый из векторов R_j, Φ_j представим в виде суммы двух векторов, один из которых, помеченный одним штрихом, лежит в плоскости недеформированного манипулятора OXY , а второй, помеченный двумя штрихами, перпендикулярен этой плоскости

$$R_j = R_j' + R_j'', \quad \Phi_j = \Phi_j' + \Phi_j'' \quad (j=1, 2) \quad (2.7)$$

Подставим формулы (2.7) в (2.6). Отметим, что векторы вида $\Phi_j' \times k_p$ направлены перпендикулярно плоскости OXY , а векторы вида $\Phi_j'' \times k_p$ лежат в этой плоскости ($j, p=1, 2$). Разобьем потенциальную энергию (2.6) на сумму двух слагаемых: Π' соответствует движениям в плоскости OXY , а Π'' — движениям, перпендикулярным этой плоскости. Имеем

$$\Pi = \Pi' + \Pi''$$

$$\begin{aligned} \Pi' = & 2E_1 I_1 l_1^{-1} [3R_1'^2 l_1^{-2} - 3l_1^{-1} R_1' \cdot (\Phi_1'' \times k_1) + (\Phi_1'' \times k_1)^2] + \\ & + 2E_2 I_2 l_2^{-1} \{ 3l_2^{-2} (R_2' - R_1' - \Phi_1'' \times k_2 l_2)^2 - 3l_2^{-1} (R_2' - R_1' - \Phi_1'' \times k_2 l_2) \cdot \\ & \cdot [(\Phi_2'' - \Phi_1'') \times k_2] + [(\Phi_2'' - \Phi_1'') \times k_2]^2 \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \Pi'' = & 2E_1 I_1 l_1^{-1} [3R_1''^2 l_1^{-2} - 3l_1^{-1} R_1'' \cdot (\Phi_1' \times k_1) + \\ & + (\Phi_1' \times k_1)^2] + c_1/2 (\Phi_1' \cdot k_1)^2 l_1^{-1} + 2E_2 I_2 l_2^{-1} \{ 3l_2^{-2} (R_2'' - R_1'' - \Phi_1' \times k_2 l_2)^2 - \\ & - 3l_2^{-1} (R_2'' - R_1'' - \Phi_1' \times k_2 l_2) \cdot [(\Phi_2' - \Phi_1') \times k_2] + \\ & + [(\Phi_2' - \Phi_1') \times k_2]^2 \} + \frac{1}{2} c_2 l_2^{-1} [(\Phi_2' - \Phi_1') \cdot k_2]^2 \end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать только плоские колебания (в плоскости OXY): $R'' = \Phi'' = 0$. Соответствующую потенциальную энергию Π' из (2.8) можно представить как квадратичную форму от шести скалярных переменных: от проекций x_1, y_1 вектора R_1' на орты k_2, k_0 ; от проекций x, y вектора R_2' на те же оси и от величин Φ_1'' и $\Phi_2'' = \psi$. Из этих шести переменных величин x_1, y_1, Φ_1'' можно исключить при помощи условий

$$R_1' \cdot k_1 = 0, \quad (R_2' - R_1') \cdot k_2 = 0, \quad \partial \Pi' / \partial \Phi_1'' = 0 \quad (2.9)$$

Первые два равенства (2.9) есть условия нерастяжимости первого и второго стержней. Третье равенство (2.9) показывает, что равновесное

значение угла Φ_1'' должно доставлять минимум потенциальной энергии системы. Обозначим через φ_1 угол поворота плечевого шарнира, отсчитанный от оси OX , φ_2 — угол поворота локтевого шарнира (угол между ортами k_1, k_2), φ_3 — угол поворота кистевого шарнира, т. е. угол между ортом k_2 и отрезком O_2Q , соединяющим шарнир O_2 с проекцией центра инерции груза P на плоскость OXY . Имеем, очевидно, $k_1 = k_2 \cos \varphi_2 - k_0 \sin \varphi_2$ (фиг. 1). Подставим это выражение в формулы (2.8), (2.9) и затем разложим векторы R_1', R_2' по осям k_2, k_0 . При помощи равенств (2.9) выразим x, y, Φ_1'' через x, y, ψ .

После преобразований соотношения (2.8) получим искомую потенциальную энергию Π' в виде положительно-определенной квадратичной формы от вектора q :

$$\Pi' = \frac{1}{2} (Cq \cdot q), \quad q = (x, y, \psi) \quad (2.10)$$

$$C = \frac{3E_2 I_2}{l_2^3 (1 + \xi)} \begin{vmatrix} \frac{(\eta - \xi \cos \varphi_2)^2 + 4\xi(\eta + \cos \varphi_2)^2}{\xi \sin^2 \varphi_2} & \frac{3\eta + (4 + \xi) \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} & \frac{\eta + (2 + \xi) \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} \\ -\frac{3\eta + (4 + \xi) \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} & 4 + \xi & -(2 + \xi) \\ \frac{\eta + (2 + \xi) \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} & -(2 + \xi) & \frac{4}{3} + \xi \end{vmatrix}$$

$$\xi = E_2 I_2 l_1 / E_1 I_1 l_2, \quad \eta = l_2 / l_1$$

Здесь q — вектор обобщенных координат, определяющий вместе с углами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ положение груза. Отметим, что матрица C зависит только от угла φ_2 .

Кинетическая энергия системы в силу сделанных предположений есть кинетическая энергия плоского движения груза P и равна

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_Q^2 + \frac{1}{2} J (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + \dot{\psi}^2) \quad (2.11)$$

Здесь m — масса груза, J — его центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости OXY , $\mathbf{r}_Q$ — радиус-вектор проекции Q центра инерции груза P на плоскость OXY . Обозначая $O_2Q = r$, представим проекции вектора $\mathbf{r}_Q$ на ось OXY в виде

$$\begin{aligned} r_x &= l_1 \cos \varphi_1 + (l_2 + x) \cos (\varphi_1 + \varphi_2) - y \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + \\ &+ r [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \psi \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)], \\ r_y &= l_1 \sin \varphi_1 + (l_2 + x) \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + y \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \\ &+ r [\sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \psi \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)], \quad \mathbf{r}_Q^2 = r_x^2 + r_y^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Угол ψ предполагается малым.

Подставляя (2.12) в (2.11), получим кинетическую энергию в виде неоднородной квадратичной формы от q , $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими от $\varphi, \dot{\varphi}$. Искомая функция Лагранжа $L = T - \Pi'$ определена равенствами (2.10) — (2.12) и является функцией вида $L = L(q, \dot{q}, \varphi, \dot{\varphi})$, а именно неоднородной квадратичной формой от $q, \dot{q}$, где q — вектор обобщенных координат (2.10), $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

3. Уравнения движения и их интегрирование. Предполагаем, что на манипулятор с грузом действуют только управляющие воздействия в шарнирах, которые обеспечивают изменение углов по заданным законам: $\varphi_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, 3$.

Составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

в которые подставим $L = T - \Pi'$, согласно (2.10) — (2.12).

Напомним предположения, которые были сделаны в пп. 1, 2 при выводе выражений (2.10), (2.11) для потенциальной и кинетической энергии. Малыми считались угол упругой закрутки ψ , упругие отклонения x, y по сравнению с длиной звена l , а также угловые скорости $\dot{\varphi}_j$ ($j=1, 2, 3$) по сравнению с низшей (основной) частотой колебаний манипулятора с грузом. Полученные уравнения (3.1) содержат слагаемые разного порядка малости. Величины вида $\varphi^2 |q|$, $|\dot{\varphi}| |q|$ эквивалентны отброшенным при выводе потенциальной энергии в п. 2 и должны быть опущены как малые высших порядков.

После этого уравнения движения в матричной форме примут вид

$$A\ddot{q} + G\dot{q} + Cq = B\ddot{\varphi} + f \quad (3.2)$$

где A, G, C, B — матрицы размерности 3×3 , q, φ, f — векторы; матрицы A, C, B зависят только от конфигурации манипулятора. Имеем

$$A = A(\varphi_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -r \sin \varphi_3 \\ 0 & 1 & r \cos \varphi_3 \\ -r \sin \varphi_3 & r \cos \varphi_3 & J/m + r^2 \end{vmatrix} m$$

$$B = B(\varphi_2, \varphi_3) = \begin{vmatrix} -l_1 \sin \varphi_2 + r \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_3 & r \sin \varphi_3 \\ -l_1 \cos \varphi_2 - l_2 - r \cos \varphi_3 & -l_2 - r \cos \varphi_3 & -r \cos \varphi_3 \\ -rl_1 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) - rl_2 \cos \varphi_3 - \frac{J}{m} - r^2 & -l_2 r \cos \varphi_3 - \frac{J}{m} - r^2 & -\frac{J}{m} - r^2 \end{vmatrix} m \quad (3.3)$$

Матрица $C = C(\varphi_2)$ приведена в (2.10). При $\varphi_2 = 0$; π она имеет особенность, отвечающую распрямленному и сложенному в локтевом шарнире манипулятору. Элементы матрицы G — линейные функции от $\dot{\varphi}$, эта матрица равна

$$G = 2 \begin{vmatrix} 0 & -(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) & -(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) r \cos \varphi_3 \\ \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 & 0 & -(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) r \sin \varphi_3 \\ (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) r \cos \varphi_3 & (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) r \sin \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} m \quad (3.4)$$

Компоненты f_i вектора f в (3.2) являются однородными квадратичными формами от $\dot{\varphi}$ с коэффициентами, зависящими от φ :

$$\begin{aligned} f_1 &= ml_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_2 + ml_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + mr (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)^2 \cos \varphi_3 \\ f_2 &= -ml_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_2 + mr (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)^2 \sin \varphi_3 \\ f_3 &= -mrl_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) - mrl_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 \sin \varphi_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что при помощи линейного преобразования вектора q с коэффициентами, зависящими от φ , уравнения движения (3.2) можно привести к виду, в котором $G \equiv 0$. Ниже, однако, будем использовать уравнения в форме (3.2).

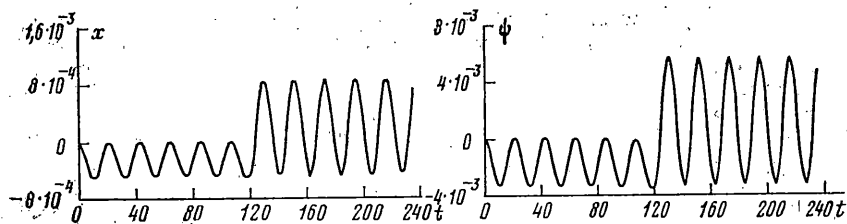
Разрешим полученную линейную систему (3.2) — (3.5) относительно вторых производных $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\psi}$ и перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$t' = \nu t, \quad x' = x/l_2, \quad y' = y/l_2, \quad \nu = [3E_2 I_2 / (ml_2^3)]^{1/2} \quad (3.6)$$

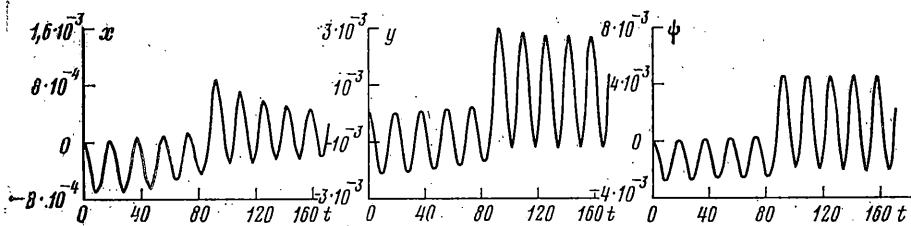
где ν — частота свободных колебаний консоли длины l_2 с точечной массой m на конце и нулевой собственной массой.

После преобразований получим линейную систему уравнений движения вида

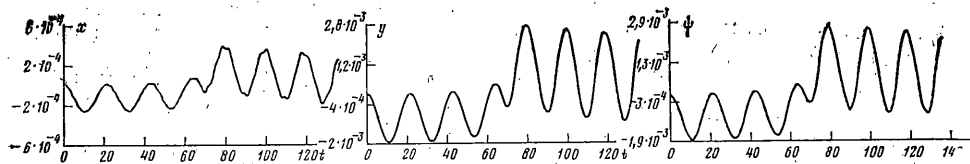
$$\ddot{q}' + G_1 \dot{q}' + C_1 q' = B_1 \ddot{\varphi}' + f_{(1)} \quad (3.7)$$



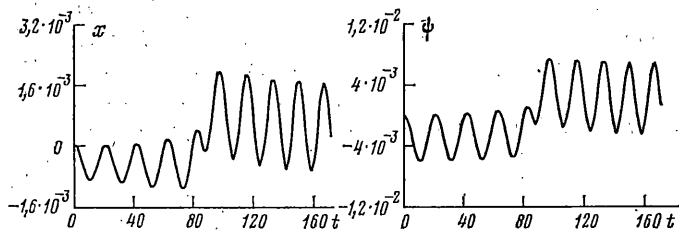
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Здесь q — вектор с компонентами x' , y' , ψ , штрихи у новых переменных (3.6) в дальнейшем опускаем. Матрицы G_1 , C_1 , B_1 и вектор f_1 получаются из A , G , C , B , f в результате указанного преобразования: замены (3.6) и разрешения системы (3.2) относительно старших производных. Полученная система (3.7) содержит безразмерные параметры

$$\xi = E_2 I_2 / (E_1 I_1) \eta, \quad \eta = l_2 / l_1, \quad \kappa = r / l_2, \quad \beta = m l_2^2 / J \quad (3.8)$$

Функции $\varphi_j(t)$ выбираются так, чтобы в случае абсолютно жесткой модели манипулятора движение груза было заданным. Конкретные зависимости $\varphi_j(t)$ приведены ниже.

Система (3.7) интегрировалась на ЭВМ численно на интервале $[0, \tau]$ при нулевых начальных условиях

$$x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0$$

и при конкретных значениях параметров (3.8).

4. Результаты расчетов. Приведем для иллюстрации некоторые результаты расчетов упругих колебаний манипулятора при его движении.

Параметрам (3.8) придавались значения $\xi=2/3$, $\eta=1$, $\kappa=0.5$; $\beta=6$, отвечающие равным длинам звеньев $l_1=l_2$. Однако звено OO_1 более жесткое, чем O_1O_2 , что отражает прочностные требования.

Зависимости $\varphi_j(t)$ для фиг. 2-5 задавались кусочно-линейными, а именно

$$\varphi_j^*(t) = w_j t, \quad 0 \leq t \leq \tau/2 \quad (j=1, 2, 3), \quad \varphi_j^*(t) = w_j(\tau - t), \quad \tau/2 \leq t \leq \tau \quad (4.1)$$

Значения параметров τ , $\varphi_j(0)$, w_j для вариантов фиг. 2-5 приведены ниже (N — номер соответствующей фигуры)

N	2	3	4	5
w_1	$9.1 \cdot 10^{-5}$	0	0	$0.7 \cdot 10^{-4}$
w_2	0	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0	$1.4 \cdot 10^{-4}$
w_3	0	0	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$0.7 \cdot 10^{-4}$
$\varphi_1(0)$	0	0	0	$\pi/12$
$\varphi_2(0)$	$\pi/6$	$\pi/2$	$\pi/6$	$\pi/6$
$\varphi_3(0)$	0	0	0	$\pi/12$
τ	236	171	136	171

По этим значениям и формулам (4.1) полностью восстанавливаются зависимости $\varphi_j(t)$. Варианты $N=2, 4$ отвечают работе только одного из шарниров ($N=2$ — плечевого, $N=3$ — локтевого, $N=4$ — кистевого) при фиксированных углах в остальных шарнирах. В каждом из этих вариантов угол в работающем шарнире изменяется за время τ на один радиан. Вариант $N=5$, в котором изменяются все три угла, отвечает для жесткой модели поступательному движению груза P ; точка Q движется по прямой, проходящей через точку O и через начальное положение центра инерции груза Q .

На фиг. 2-5 в безразмерных переменных представлены графики, полученные в результате численного решения системы (3.7). Из графиков, приведенных на фиг. 3, 4, видно, что характер изменения величин y и ψ аналогичен, поэтому на остальных графиках даны только x и φ . Графики позволяют судить о характере упругих колебаний манипулятора. Отметим, что частоты системы (3.7) распределены следующим образом: имеется низшая (основная) частота и две более высоких частоты, которые в 8-15 раз выше. Поэтому колебания в основном одночастотные (фиг. 2-5). При манипулировании грузом (работает только кистевой шарнир) заметны также колебания высших частот (фиг. 4). На фиг. 3, 5 заметно изменение частоты в процессе работы манипулятора, обусловленное изменением угла φ_2 , характеризующим эффективную жесткость манипулятора.

Полученные графики позволяют оценить амплитуду упругих колебаний. При работе транспортных шарниров (плечевого и локтевого) амплитуда колебаний составляет 0.4-0.8%, а при работе манипуляционного (кистевое) шарнира — 0.2% от длины звена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. А. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
2. Кулешов В. С., Лагода Н. А. Динамика систем управления манипуляторами. М.: Энергия, 1971. 304 с.
3. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. М.: Наука, 1976. 103 с.
4. Book W. J. Analysis of massless elastic chains with servo controlled joints. — Trans. ASME J. Dynamic Syst. Measurement and Control, 1979, v. 101, No. 3, p. 187-192.
5. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IV.1980