МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1981

УДК 531.383

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ ТЯГОТЕНИЯ

ЗАВОЗИН Ж. Г.

Известные [1–4] условия устойчивости гирогоризонткомпаса Геккелера — Аншютца получены в предположении, что поле сил тяготения однородно [5].

В настоящей статье эти результаты обобщаются на случай движения гирогоризонткомпаса в ньютоновском центральном поле сил тяготения [6]. Полученные достаточные условия устойчивости остаются в силе и при установке прибора на спутнике, движущемся по круговой орбите.

1. Пусть O — точка подвеса гирогоризонткомпаса, которая перемещается по невращающейся сфере постоянного радиуса R, концентрической с земной сферой, $OXYZ$ — трехгранник Дарбу, ось Z которого направлена вверх по геоцентрической вертикали, а ось X — по вектору абсолютной скорости $\mathbf{v}$ точки подвеса, $Oxyz$ — трехгранник, связанный с оболочкой гиросферы, ось y которого направлена вдоль вектора $\mathbf{H}$, являющегося суммой векторов собственных кинетических моментов гироскопов, а ось z направлена вверх, параллельно осям кожухов гироскопов.

Для того чтобы повороты гирокамер вокруг осей кожухов не изменяли геометрии масс гиросферы, потребуем, чтобы гирокамеры были идентичными, их центры масс лежали на осях кожухов и указанные оси являлись осями динамической симметрии гирокамер. Учитывая это, будем далее считать оси x, y, z главными осями инерции гиросферы в точке O, а ее центр масс лежащим на отрицательной части оси z.

Ориентацию осей x, y, z (орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) относительно осей X, Y, Z (орты $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$) определим посредством трех углов Эйлера — Крылова α, β, γ [7]. Для направляющих косинусов a_{ij}, $a_{ij}=\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}_j$ $(i,j=1,2,3)$ будем иметь

$$
\begin{gathered}
a_{11}=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\quad a_{12}=-\sin\alpha\cos\beta\\
a_{13}=\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\quad a_{21}=\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\
a_{22}=\cos\alpha\cos\beta,\quad a_{23}=\sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\\
a_{31}=-\cos\beta\sin\gamma,\quad a_{32}=\sin\beta,\quad a_{33}=\cos\beta\cos\gamma
\end{gathered}\tag{1.1}
$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$ — векторы абсолютных угловых скоростей трехгранников $Oxyz$ и $OXYZ$ соответственно, $\boldsymbol{\omega}_2$ — вектор угловой скорости трехгранника $Oxyz$ относительно $OXYZ$.

Известно [7], что

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2,\quad \boldsymbol{\omega}_1=\zeta\mathbf{a}_2+\eta\mathbf{a}_3,\quad \boldsymbol{\omega}_2=\boldsymbol{\alpha}^{\cdot}+\boldsymbol{\beta}^{\cdot}+\boldsymbol{\gamma}^{\cdot}\tag{1.2}$$

где $\zeta=v/R$, а η — вертикальная составляющая угловой скорости трехгранника Дарбу.

Предположим, что ζ и η постоянны. Дополним равенства (1.2) соотношениями

$$\mathbf{a}_i^{\cdot}=\mathbf{a}_i\times\boldsymbol{\omega}_2\quad (i=1,2,3),\quad \boldsymbol{\omega}_1^{\cdot}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}\tag{1.3}$$

Здесь и далее точка справа вверху у трехмерного вектора означает локальную производную по времени в системе координат $Oxyz$.

Уравнение движения гиросферы получим из теоремы о кинетическом моменте, согласно которой [5]

$$\mathbf{K}_O^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O=mg\mathbf{a}_3\times\mathbf{l}+3\nu^2\mathbf{a}_3\times\Lambda\mathbf{a}_3+\mathbf{l}\times(-m\mathbf{w}) \qquad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{K}_O$ — вектор кинетического момента гиросферы относительно точки O, m — масса гиросферы, g — ускорение силы тяготения в точке O, $\mathbf{l}=-l\mathbf{e}_3$ — радиус-вектор центра масс гиросферы, проведенный из точки O, $\nu=(g/R)^{1/2}$ — частота Шулера, $\Lambda=\mathrm{diag}\,[A, B, C]$ — тензор инерции гиросферы в системе координат $Oxyz$, $\mathbf{w}$ — вектор абсолютного ускорения точки O.

Два первых слагаемых в правой части уравнения (1.4) в совокупности представляют главный момент относительно точки O сил тяготения [8], вычисленный с точностью $9mgl\rho^2/R^2$, где ρ — максимальный линейный размер гиросферы, причем второе из них характеризует неоднородность поля сил тяготения.

Учитывая, что имеют место равенства $\mathbf{K}_O=\mathbf{H}+\Lambda\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{w}=R\zeta\eta\mathbf{a}_2-R\zeta^2\mathbf{a}_3$, придадим уравнению (1.4) вид

$$\mathbf{H}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Lambda\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{H}+\Lambda\boldsymbol{\omega})=I\zeta\eta\mathbf{e}_3\times\mathbf{a}_2+$$
$$+[I(\nu^2-\zeta^2)\mathbf{e}_3-3\nu^2\Lambda\mathbf{a}_3]\times\mathbf{a}_3,\quad I=mlR \qquad (1.5)$$

Применим к каждой из гирокамер теорему о кинетическом моменте в форме (1.4). Аналогично тому, как это сделано в монографиях [7, 9], спроектируем получившиеся уравнения на оси кожухов и составим разность указанных проекций. Учитывая статическую уравновешенность и динамическую симметрию каждой гирокамеры относительно оси кожуха, получим

$$2J\varepsilon^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+2\omega_y L\sin\varepsilon=N(\varepsilon) \qquad (1.6)$$

Здесь J — момент инерции гирокамеры относительно оси кожуха, 2ε — угол разведения гироскопов [7], $L=\mathrm{const}$ — собственный кинетический момент одного гироскопа, $N(\varepsilon)$ — момент сил, прикладываемых к одной из гирокамер специальным датчиком моментов.

Уравнение движения гирокамер (1.6) совпадает (с точностью до обозначений) с аналогичным уравнением в однородном поле [9].

2. Пусть момент $N(\varepsilon)$ формируется в виде

$$N(\varepsilon)=2L^2\sin 2\varepsilon/I\lambda \qquad (2.1)$$

где λ — некоторый параметр, $\lambda>0$.

Умножим уравнение (1.5) скалярно на $\boldsymbol{\omega}_2$, а уравнение (1.6) умножим на $\varepsilon^{\boldsymbol{\cdot}}$. Получающиеся соотношения сложим. Используя соответствующие свойства смешанного произведения и формулы (1.2), (1.3), (2.1), получим

$$E^{\boldsymbol{\cdot}}=0 \qquad (2.2)$$

$$E=-{}^1/_2\boldsymbol{\omega}_1\cdot\Lambda\boldsymbol{\omega}_1+{}^1/_2\boldsymbol{\omega}_2\cdot\Lambda\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_1\cdot\mathbf{H}+$$
$$+J\varepsilon^{\boldsymbol{\cdot}2}-2L^2\sin^2\varepsilon/I\lambda-I\zeta\eta\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{a}_2-I(\nu^2-\zeta^2)\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{a}_3+{}^3/_2\nu^2\mathbf{a}_3\cdot\Lambda\mathbf{a}_3 \qquad (2.3)$$

Последнее слагаемое в выражении (2.3) появилось за счет неоднородности поля сил тяготения. Если его отбросить и положить $\lambda=1$ [7], то из формул (2.2), (2.3) сразу следует интеграл, полученный в статьях [3, 4].

3. Из формул (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), (2.1) следует, что имеется положение относительного равновесия системы

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad \varepsilon=\varepsilon^\circ,\quad \varepsilon^\circ=\arccos(I\lambda\zeta/2L) \qquad (3.1)$$

если λ выбрано согласно условию [10]:

$$\lambda=1+\chi, \quad \chi=(C-B)/I \tag{3.2}$$

Приняв в качестве невозмущенного движение, определяемое равенствами (3.1), (3.2), положим в возмущенном движении

$$\alpha=x_1, \quad \beta=x_2, \quad \gamma=x_3, \quad \varepsilon=\varepsilon^\circ+x_4 \tag{3.3}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем

$$V=E-E^\circ \tag{3.4}$$

с заменой переменных согласно формуле (3.3). Здесь E° — значение функции E при $\mathbf{x}=\mathbf{x}^\cdot=0$, $\mathbf{x}=[x_1, x_2, x_3, x_4]'$ (штрих означает транспонирование). Функцию $2V$ можно записать в виде

$$2V=\mathbf{x}^\cdot\cdot B_1\mathbf{x}^\cdot+\mathbf{x}\cdot C_1\mathbf{x}+\ldots \tag{3.5}$$

где многоточие означает члены не ниже третьего порядка малости относительно x_i, $x_i^\cdot$ $(i=1,\ldots,4)$, а B_1 и C_1 — матрицы размера 4×4, отличные от нуля элементы которых имеют вид

$$b_{11}=C, \quad b_{22}=A, \quad b_{33}=B, \quad b_{44}=2J, \quad c_{11}=I(1+\vartheta)\zeta^2$$

$$c_{22}=I[(1-3\chi)\nu^2+\chi\eta^2], \quad c_{33}=I[(1-3\vartheta)\nu^2-\zeta^2+\vartheta\eta^2]$$

$$c_{44}=4L^2\sin^2\varepsilon^\circ/I\lambda, \quad c_{13}=c_{31}=-I(1+\vartheta)\zeta\eta, \quad c_{24}=c_{42}=2\eta L\sin\varepsilon^\circ, \quad \vartheta=(C-A)/I$$

Первая квадратичная форма в выражении (3.5) является определенно-положительной. С помощью критерия Сильвестра условиям положительной определенности второй квадратичной формы можно придать вид

$$-1<\vartheta<{}^1/_3, \quad -1<\chi<{}^1/_3$$

$$(1-3\vartheta)\nu^2-\zeta^2-\eta^2>0, \quad (1-3\chi)\nu^2-\eta^2>0 \tag{3.6}$$

Для достаточно малых $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{x}^\cdot|$, при выполнении неравенств (3.6), функция V будет определенно-положительной. Так как производная от нее, согласно формулам (3.4), (2.2), равна нулю, то по теореме Ляпунова об устойчивости движение (3.1), (3.2) будет устойчиво.

Первое и второе неравенства из условий (3.6) накладывают ограничения только на параметры m, l, A, B, C гиросферы. Из оставшихся неравенств можно определить область изменения величин v и η, в которой обеспечивается устойчивость системы.

Неравенства (3.6) обобщают соответствующие достаточные условия устойчивости, полученные в работах [1–4]. Например, в рамках прецессионной теории из неравенств (3.6) следует $(\zeta^2+\eta^2)^{1/2}<\nu$ [1, 2].

4. Пусть гирогоризонткомпас установлен на спутнике, движущемся по круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил тяготения. Тогда

$$\zeta=\nu, \quad \eta=0 \tag{4.1}$$

Условия (3.6) устойчивости решения (3.1), (3.2) примут вид

$$-1<\vartheta<0, \quad -1<\chi<{}^1/_3 \tag{4.2}$$

Равенства (4.1) позволяют заменить условие (3.2) неравенством: $0<\lambda<2L/I\nu$. В этом случае отличные от нуля элементы матрицы C_1 примут вид

$$c_{11}=I(\lambda+\vartheta-\chi)\nu^2, \quad c_{22}=I(\lambda-4\chi)\nu^2$$

$$c_{33}=-3I\vartheta\nu^2, \quad c_{44}=4L^2\sin^2\varepsilon^\circ/I\lambda$$

и условиям устойчивости решения (3.1) можно придать форму

$$\lambda+\vartheta-\chi>0,\quad \chi<{}^1/_4\lambda,\quad \vartheta<0 \qquad (4.3)$$

При выводе неравенств (3.6), (4.2), (4.3) предполагалось, что $\varepsilon^\circ\neq0$.

Автор благодарит Г. Д. Блюмина за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жбанов Ю. К.* Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1024—1029.
2. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости движения гирорамы.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 983—991.
3. *Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф.* Об одном интеграле в теории гирогоризонткомпаса.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 10—15.
4. *Ляшенко В. Ф.* О достаточных условиях устойчивости в теории гирогоризонткомпаса.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, с. 1106—1107.
5. *Блюмин Г. Д., Завозин Ж. Г.* Об одном свойстве механических систем с регулируемым положением центра масс.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 24—29.
6. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 308 с.
7. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
8. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
9. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
10. *Ляшенко В. Ф.* К теории гирогоризонткомпаса.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 373—376.

Комсомольск-на-Амуре

Поступила в редакцию
26.XI.1979