МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1981

УДК 531.36

ПЕРМАНЕНТНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ГИРОСТАТА С САМОВОЗБУЖДЕНИЕМ

СМОЛЬНИКОВ Б. А., СТЕПАНОВА М. В.

Перманентные вращения по инерции свободного гиростата и их устойчивость впервые были рассмотрены В. Вольтерра [1] в 1892 г. В публикуемой работе исследуются перманентные вращения свободного стационарного гиростата с постоянным моментом самовозбуждения, создаваемым, например, системой реактивных двигателей. Найдено положение в осях гиростата всех возможных перманентных осей и исследована их устойчивость. Аналогичная задача для твердого тела без внутренних вращений была изучена в [2]. Такие движения представляют практический интерес в задачах управления вращательным движением объектов, снабженных маховичной или гироскопической системой стабилизации [3].

1. Гиростат, как известно, представляет собой несущее твердое тело (корпус), внутри которого имеются вращающиеся массы, не изменяющие геометрии масс всей системы. Кинетический момент этих относительных движений называется гиростатическим моментом. Постоянный гиростатический момент **H**, рассматриваемый в данной работе, создается либо одним ротором, произвольно ориентированном в корпусе, либо системой роторов, оси вращения которых фиксированы относительно главных центральных осей инерции гиростата 1, 2, 3. Связанный с осями 1, 2, 3 момент **m**, названный Граммелем моментом самовозбуждения, может быть создан, например, системой реактивных двигателей, установленных на корпусе гиростата.

Введем следующие обозначения: Θ — тензор инерции гиростата, заданный в его главных осях инерции 1, 2, 3 компонентами A_1, A_2, A_3, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор его абсолютной угловой скорости, проекции которого на оси 1, 2, 3 соответственно ω_1, ω_2, ω_3, **H** — гиростатический момент, заданный в осях 1, 2, 3 проекциями H_1, H_2, H_3, **m** — момент сил самовозбуждения с проекциями на оси 1, 2, 3 соответственно m_1, m_2, m_3.

Тогда векторное уравнение вынужденного движения стационарного гиростата, т. е. обладающего постоянным гиростатическим моментом **H**, имеет вид

$$\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times(\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H})=\mathbf{m} \qquad (1.1)$$

В режиме перманентного вращения $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{const}$, в результате чего из (1.1) следует

$$\boldsymbol{\omega}\times(\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H})=\mathbf{m} \qquad (1.2)$$

Видно, что вынуждающий момент **m** должен быть ортогонален к векторам угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и кинетического момента гиростата $\mathbf{L}=\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H}$. Поэтому рассматриваемый режим перманентного вращения является частным случаем движения гиростата под действием ортогонального момента, т. е. момента, ортогонального плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}$ и **L**. В проекциях на главные оси гиростата 1, 2, 3 уравнение (1.2) приводит к системе

$$\begin{gathered}a_1\omega_2\omega_3+\omega_2H_3-\omega_3H_2=m_1 \\ a_2\omega_3\omega_1+\omega_3H_1-\omega_1H_3=m_2\end{gathered} \qquad (1.3)$$

$$a_3\omega_1\omega_2+\omega_1H_2-\omega_2H_1=m_3$$

$$a_1=A_3-A_2,\ a_2=A_1-A_3,\ a_3=A_2-A_1 \tag{1.4}$$

$$a_1+a_2+a_3=0,\ a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=0$$

Соотношения (1.3) позволяют по заданным компонентам вектора перманентной скорости $\boldsymbol{\omega}$ и вектора $\mathbf{H}$ однозначно определить необходимый вынуждающий момент $\mathbf{m}$. Однако обратная зависимость $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{m})$, очевидно, уже не будет однозначной, что имеет существенное значение для суждений об устойчивости.

Разрешая систему (1.3) относительно ω_k, придем к следующим выражениям:

$$\omega_1=\frac{a_2h_2-a_3h_3\pm a_1\sqrt{D}}{2m_1a_1a_2a_3}$$

$$\omega_2=\frac{a_3h_3-a_1h_1\pm a_2\sqrt{D}}{2m_2a_1a_2a_3} \tag{1.5}$$

$$\omega_3=\frac{a_1h_1-a_2h_2\pm a_3\sqrt{D}}{2m_3a_1a_2a_3}$$

$$h_1=-a_1m_1H_1+a_2m_2H_2+a_3m_3H_3 \tag{1.6}$$

$$h_2=a_1m_1H_1-a_2m_2H_2+a_3m_3H_3$$

$$h_3=a_1m_1H_1+a_2m_2H_2-a_3m_3H_3$$

$$D=4\delta-h_1h_2-h_2h_3-h_3h_1,\ \delta=a_1a_2a_3m_1m_2m_3$$

Из полученных выражений (1.5) следует, что найденные решения сусуществуют лишь в той области пространства параметров h_k, где $\delta\neq0$, $D\geqslant0$. Граница этой области $D=0$ представляет собой, как нетрудно установить, семейство гиперболоидов вращения, ось симметрии которых совпадает с биссектрисой первого октанта, где $h_k>0$. При этом значениям $\delta>0$ отвечают двуполостные гиперболоиды, а значениям $\delta<0$ — однополостные гиперболоиды (фиг. 1). Условие $D>0$ выполняется во внешней по отношению к оси симметрии области гиперболоида $D=0$.

Наличие квадратного корня в решении (1.5) означает, что каждой точке пространства параметров h_k в области $D>0$ отвечают два вектора перманентной скорости, которые сливаются на поверхности $D=0$.

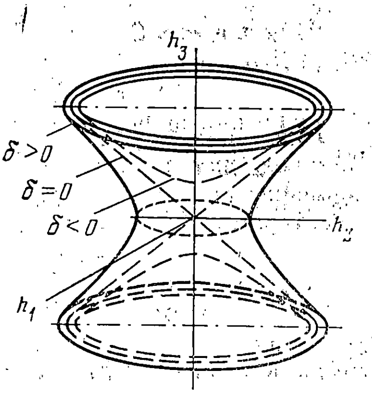
В частном случае, когда $\mathbf{H}=0$, т. е. когда гиростат вырождается в твердое тело, из (1.5) получаем известные решения [2]:

$$\omega_1=a_1m_2m_3/\sqrt{\delta},\ \omega_2=a_2m_3m_1/\sqrt{\delta},\ \omega_3=a_3m_1m_2/\sqrt{\delta} \tag{1.7}$$

откуда следует $\delta>0$. Поэтому, если $a_1a_2a_3<0$ (при $A_1<A_2<A_3$), то и $m_1m_2m_3<0$. Если же $\delta=0$, то это решение непригодно и тогда следует различать два случая: $a_1a_2a_3=0$ и $m_1m_2m_3=0$. Первый из них отвечает динамической симметрии тела, вследствие чего всегда можно выбрать его главные оси так, чтобы $m_1m_2m_3=0$. Поэтому достаточно рассмотреть лишь второе условие. Нетрудно установить, что в этом случае перманентные вращения существуют лишь при совпадении вектора $\mathbf{m}$ с какой-либо из главных осей тела, а сами перманентные оси образуют непрерывное семейство, лежащее в главной плоскости инерции, ортогональной оси действия момента $\mathbf{m}$. Так, если $m=m_3$, $m_1=m_2=0$, то

$$\omega_3=0,\ \omega_1\omega_2=m_3/a_3 \qquad (1.8)$$

Аналогичные решения, очевидно, будут иметь место и при $m=m_2$ и $m=m_3$. Таким образом, в отличие от общего решения (1.7), определяющего изолированные перманентные оси, существуют непрерывные семейства перманентных осей, если вынуждающий момент действует вдоль главных осей твердого тела, причем эти семейства лежат в главной плоскости, ортогональной оси действия момента.



Фиг. 1

Рассмотрим гиростат с $\delta=0$. Заметим, что в этом случае условие динамической симметрии $a_1a_2a_3=0$ поворотом осей может быть сведено либо к условию $m_1m_2m_3=0$, либо к условию $H_1H_2H_3=0$. Положим сначала, что тело гиростата динамически **несимметрично, т. е.** $a_1a_2a_3\neq0$, но $m_1m_2m_3=0$ за счет $m_3=0$. Тогда из (1.3) следует решение

$$\omega_1=(m_1H_1+m_2H_2)/(a_3m_1),\quad \omega_2=-(m_1H_1+m_2H_2)/(a_3m_3) \qquad (1.9)$$
$$\omega_3=[a_3m_1m_2+H_3(m_1H_1+m_2H_2)]/(h_1-h_2)$$

которое существует лишь при $h_1\neq h_2$ и в отличие от общего случая будет однозначным. Условие $h_1=h_2$ означает $h_1=h_2=H_1H_2H_3$ и $D=0$, вследствие чего решением, согласно (1.3), будет континуум

$$\omega_1=-H_1/a_2,\quad \omega_2=H_2/a_1,\quad -\infty<\omega_3<\infty \qquad (1.10)$$

Аналогичные решения существуют и при $m_2=0$ или $m_1=0$.

Пусть теперь две компоненты вектора $\mathbf{m}$ равны нулю, например $m_1=m_2=0$, $m_3\neq0$. Тогда из условия $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m}=0$ следует $\omega_3=0$, после чего из (1.3) заключаем, что для существования перманентного режима необходимо также выполнение условия $H_3=0$. Последнее уравнение системы (1.3) дает тогда континуум перманентных осей

$$\omega_3=0,\quad a_3\omega_1\omega_2+\omega_1H_2-\omega_2H_1=m_3 \qquad (1.11)$$

Все приведенные решения соответствуют условию $m_1m_2m_3=0$.

Перейдем теперь к анализу динамически симметричного гиростата, когда $a_1a_2a_3=0$. Так, положив для определенности $a_3=0$, т. е. $a_1+a_2=0$, из исходной системы (1.3) найдем

$$\omega_1=\frac{H_1\mathbf{m}\cdot\mathbf{H}+a_1m_2m_3}{a_1(m_1H_1+m_2H_2)} \qquad (1.12)$$

$$\omega_2=\frac{H_2\mathbf{m}\cdot\mathbf{H}-a_1m_1m_3}{a_1(m_1H_1+m_2H_2)},\qquad \omega_3=-\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{H}}{a_1m_3}$$

Учитывая, что при $a_3=0$ положение главных осей 1 и 2 можно выбирать произвольно, совместим плоскость 1 — 3 либо с вектором $\mathbf{m}$, либо с вектором $\mathbf{H}$, что позволяет соответственно упростить формулы (1.12), в которых следует положить соответственно $H_2=0$ или $m_2=0$. Пусть $H_2=0$. Условием существования полученных решений будет неравенство $m_1H_1=0$. Если оно не выполняется, то при $H_1=0$, $m_1\neq0$ получим $m_3=0$ и решение будет континуумом

$$\omega_1=\frac{-m_2}{H_3+a_1\omega_3},\qquad \omega_2=\frac{m_1}{H_3+a_1\omega_3},\qquad -\infty<\omega_3<\infty \qquad (1.13)$$

Если же $m_1=0$, а $H_1\neq0$, то решение будет существовать лишь при $m_2a_1+H_1H_3=0$

$$-\infty<\omega_1<\infty,\quad \omega_2=-m_3/H_1,\quad \omega_3=-H_3/a_1 \tag{1.14}$$

Аналогичные решения могут быть построены и для $a_2=0$ или $a_1=0$. Наконец, для сферически-симметричного гиростата, когда $a_1=a_2=a_3=0$, совмещая ось 3 с вектором $\mathbf{H}$ (т. е. полагая $H_1=H_2=0$), а плоскость 1—2 с вектором $\mathbf{m}$ (т. е. полагая $m_1=0$), получим $m_3=0$ и

$$\omega_1=0,\quad \omega_2=m_1/H_3,\quad -\infty<\omega_3<\infty \tag{1.15}$$

2. Исследуем устойчивость перманентных вращений. В этой задаче устойчивость перманентных вращений определяется не только параметрами данного режима движения, но и поведением вынуждающего момента $\mathbf{m}$ при малых отклонениях вектора $\boldsymbol{\omega}$ от номинального. Действительно, полагая, например, что соотношение (1.2) выполняется и в возмущенном движении, нетрудно увидеть, что уравнение возмущенного движения согласно (1.1)

$$\boldsymbol{\Theta}\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}^{\cdot}=0 \tag{2.1}$$

и, следовательно, положение перманентной оси будут обладать безразличным равновесием.

Менее тривиальным и практически более важным является другая структура вынуждающего момента, когда в возмущенном движении вектор $\mathbf{m}$ остается тем же, что и в невозмущенном, т. е. когда $\Delta\mathbf{m}=0$. Уравнение возмущенного движения гиростата тогда примет вид

$$\boldsymbol{\Theta}\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\Delta\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H})+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\Theta}\cdot\Delta\boldsymbol{\omega})=0 \tag{2.2}$$

или в проекциях на главные оси

$$\begin{aligned}
&A_1\Delta\omega_1^{\cdot}+(a_1\omega_3+H_3)\Delta\omega_2+(a_1\omega_2-H_2)\Delta\omega_3=0\\
&A_2\Delta\omega_2^{\cdot}+(a_2\omega_1+H_1)\Delta\omega_3+(a_2\omega_3-H_3)\Delta\omega_1=0\\
&A_3\Delta\omega_3^{\cdot}+(a_3\omega_2+H_2)\Delta\omega_1+(a_3\omega_1-H_1)\Delta\omega_2=0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Характеристическое уравнение этой системы есть

$$A_1A_2A_3p^3+Mp+N=0 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
M=&-A_1(a_2\omega_1+H_1)(a_3\omega_1-H_1)-\\
&-A_2(a_3\omega_2+H_2)(a_1\omega_2-H_2)-A_3(a_1\omega_3+H_3)(a_2\omega_3-H_3)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
N=&(a_1\omega_3+H_3)(a_2\omega_1+H_1)(a_3\omega_2+H_2)+\\
&+(a_1\omega_2-H_2)(a_2\omega_3-H_3)(a_3\omega_1-H_1)
\end{aligned}$$

Для выполнения необходимых условий устойчивости требуется, чтобы $N=0$, $M\geqslant0$. Остается проверить соблюдение этих условий для различных режимов перманентного вращения.

Так, для решения (1.5) получим

$$\begin{aligned}
&a_1\omega_3+H_3=\frac{-h_1\pm\sqrt{D}}{2a_2m_3},\quad a_1\omega_2-H_2=\frac{h_1\pm\sqrt{D}}{2a_3m_2}\\
&a_2\omega_1+H_1=\frac{-h_2\pm\sqrt{D}}{2a_3m_1},\quad a_2\omega_3-H_3=\frac{h_2\pm\sqrt{D}}{2a_1m_3}\\
&a_3\omega_2+H_2=\frac{-h_3\pm\sqrt{D}}{2a_1m_2},\quad a_3\omega_1-H_1=\frac{h_3\pm\sqrt{D}}{2a_2m_1}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

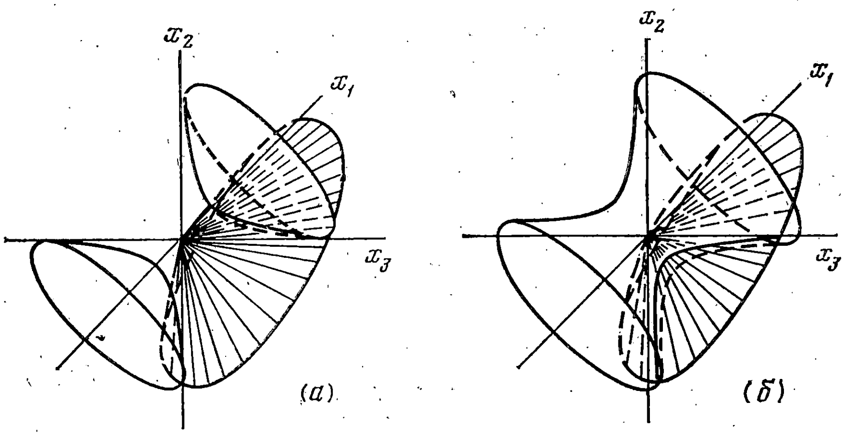
после чего первое условие устойчивости $N=0$ приведет к соотношению

$$N=\pm 8\delta\sqrt{D}=0 \tag{2.7}$$

которое выполняется лишь в тех случаях, когда либо $\delta=0$, либо $D=0$. Первый из них исключен при построении самого решения (1.5), поэтому заключаем, что устойчивыми могут быть лишь решения, располагающиеся на поверхности гиперболоида $D=0$. Остается выявить область выполнения условия $M>0$. При $D=0$ имеем для M следующее выражение:

$$\begin{gathered} M=(\alpha_1h_2h_3+\alpha_2h_3h_1+\alpha_3h_1h_2)/(4a_1a_2a_3) \\ \alpha_1=a_1A_1/m_1^2, \quad \alpha_2=a_2A_2/m_2^2, \quad \alpha_3=a_3A/m_3^2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

которое обращается в нуль на поверхности эллиптического конуса $M=0$. Линия пересечения этого конуса с гиперболоидом $D=0$ есть некоторая



Фиг. 2

пространственная кривая, проекцию которой на плоскость h_1h_3 можно получить исключив из этих уравнений h_2. В результате приходим к соотношению

$$h_1h_3[h_3(\alpha_2-\alpha_1)+h_1(\alpha_2-\alpha_3)]+4\delta(\alpha_1h_3+\alpha_3h_1)=0 \tag{2.9}$$

разрешая которое относительно h_3, находим

$$h_3=\frac{(\alpha_3-\alpha_2)h_1^2-4\delta\alpha_1\pm\{[(\alpha_3-\alpha_2)h_1^2-4\delta\alpha_1]^2-16\delta\alpha_3(\alpha_2-\alpha_1)h_1^2\}^{1/2}}{2(\alpha_2-\alpha_1)h_1} \tag{2.10}$$

Требование неотрицательности дискриминанта приводит к неравенству

$$(\alpha_3-\alpha_2)^2h_1^4-8\delta(2\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3)h_1^2+16\delta^2\alpha_1^2\geqslant 0 \tag{2.11}$$

область решений которого определяется корнями

$$h_1^2=\frac{4\delta}{(\alpha_3-\alpha_2)^2}[2\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3\pm(4\alpha_2\alpha_3(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1))^{1/2}] \tag{2.12}$$

Общий вид области выполнения необходимых условий устойчивости $M>0$ на поверхности гиперболоида $D=0$ показан на фиг. 2 ($\delta<0$, $\delta>0$).

Рассмотрим сначала некоторые частные случаи задачи об устойчивости вынужденных перманентных вращений. Пусть $H=0$, $\delta\neq0$, т. е. гиростат вырождается в несимметричное твердое тело. Тогда для изолированных решений (1.7), согласно (2.5), находим

$$N=2\sqrt{\delta}\neq 0 \tag{2.13}$$

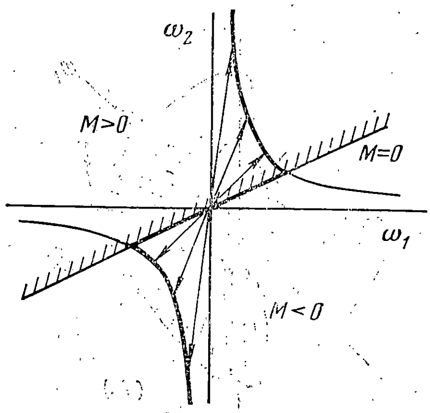
откуда следует неустойчивость любых изолированных перманентных осей. Для континуальных решений (1.8), когда вынуждающий момент совпадает с одной из главных осей инерции тела, имеем $N=0$, а значения M зависят от оси действия момента. Так, если $m=m_3$, то

$$M=-a_3(A_1a_2\omega_1^2+A_2a_1\omega_2^2) \tag{2.14}$$

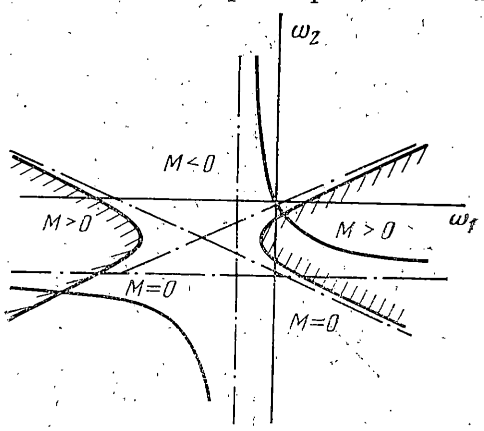
причем ввиду принятого допущения $a_2<0$, это выражение распадается на множители, определяющие границы области устойчивости

$$\omega_2=\pm\omega_1\sqrt{-a_2A_1/a_1A_2} \tag{2.15}$$

На фиг. 3 устойчивым перманентным осям в плоскости $\omega_1\omega_2$ отвечают выделенные участки гиперболы (1.9). Аналогичная картина расположения



Фиг. 3



Фиг. 4

области устойчивости имеет место при совпадении момента $\mathbf{m}$ с главной осью наименьшего момента инерции. Однако при совмещении вектора $\mathbf{m}$ с осью 2 выражение для M имеет вид

$$M=-a_2(A_1a_3\omega_1^2+A_3a_1\omega_3^2) \tag{2.16}$$

и оказывается неотрицательным для всех точек плоскости $\omega_1\omega_3$, что означает устойчивость всего семейства решений $a_2\omega_1\omega_3=m_2$.

Рассмотрим гиростат при $\delta\neq 0$. Решения (1.5) при выполнении условия $D=0$ принимают вид

$$\omega_1=\frac{a_2h_2-a_3h_3}{2m_1a_1a_2a_3},\quad \omega_2=\frac{a_3h_3-a_1h_1}{2m_2a_1a_2a_3},\quad \omega_3=\frac{a_1h_1-a_2h_2}{2m_3a_1a_2a_3} \tag{2.17}$$

Полученное решение является континуальным, поскольку, как легко заметить, проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ (2.17) линейно зависимы.

Как пример рассмотрим практически наиболее важный случай, когда вектор $\mathbf{H}$ лежит в одной из главных плоскостей инерции. Например, полагая $H_3=0$, имеем согласно (1.6) и (2.8):

$$h_3+h_2=0,\quad D=4\delta+h_1^2=0 \tag{2.18}$$

$$M=\frac{h_1}{4a_1a_2a_3}[h_3(\alpha_2-\alpha_1)-h_1\alpha_3]\geqslant 0$$

Видно, что на плоскости параметров h_1h_3 область устойчивости $D=0$; $M\geqslant 0$ существует лишь при $\delta<0$ и представляет собой пару полупрямых, параллельных оси h_3. Аналогичная картина будет иметь место и при $H_2=0$ и $H_1=0$. В случае же, когда вектор **H** совпадает с одной из главных осей, например $H=H_3$, $H_1=H_2=0$, имеем

$$h_1=h_2=-h_3=h, \quad D=4\delta+h^2=0$$

$$M=\frac{h^2}{4a_1a_2a_3}(\alpha_3-\alpha_2-\alpha_1)\geqslant 0 \tag{2.19}$$

откуда следуют и необходимые условия устойчивости.

Обратимся теперь к особому случаю, когда $\delta=0$ и $D\geqslant 0$, а изолированного решения (1.5) не существует. В этом случае будут иметь место решения типа (1.9)–(1.14), суждение об устойчивости которых также определяется формулами (2.5) для функций N и M.

Для решения (1.9) условие устойчивости имеет вид $N=h_2-h_1=0$ и не может быть выполнено, так как решение (1.9) справедливо лишь при условии $h_2\neq h_1$. Таким образом, изолированное решение (1.9) неустойчиво.

Для решения (1.10), как легко показать, $N\equiv 0$ и область устойчивости определяется выражением

$$M=A_3(H_3-a_2\omega_3)(H_3+a_1\omega_3)\geqslant 0$$

откуда следует, что устойчивым вращениям в этом случае отвечают значения ω_3 в диапазоне

$$\min\,[H_3/a_2, -H_3/a_1]\leqslant\omega_3\leqslant\max\,[H_3/a_2, -H_3/a_1] \tag{2.20}$$

Для решения (1.11) выполняются следующие соотношения: $N\equiv 0$, $M=-A_1(a_2\omega_1+H_1)(a_3\omega_1-H_1)-A_2(a_3\omega_2+H_2)(a_1\omega_2-H_2)$. На плоскости $\omega_1\omega_2$ устойчивыми будут те части гиперболы (1.18), которые лежат внутри гиперболы $M=0$ (фиг. 4). Наконец, для решений (1.12) условия устойчивости могут быть выполнены лишь при $m_1H_1=0$. При этом, если $H_1=0$, то

$$M=A_3(a_1\omega_3+H_3)^2\geqslant 0 \tag{2.21}$$

и все значения ω_3 устойчивы. Если же $m_1=0$, то

$$M=A_1H_1(H_1-a_1\omega_1)\geqslant 0 \tag{2.22}$$

и устойчивыми будут

$$\omega_1<H_1/a_1 \quad \text{при } H_1>0, \quad \omega_1>H_1/a_1 \quad \text{при } H_1<0 \tag{2.23}$$

Решения (1.15) для сферически-симметричного гиростата также устойчивы.

Проведенное исследование показывает, что оси перманентного вращения стационарного гиростата с постоянным моментом самовозбуждения могут занимать как изолированные положения в его корпусе (решения (1.9), (1.12)), так и образовывать континуумы (1.5), (1.10), (1.11), (1.13)–(1.15), причем реализация той или иной оси определяется заданием начальных условий. Установлено, что естественной устойчивостью могут обладать лишь континуальные семейства решений, как это следует из структуры характеристического уравнения (2.4), имеющего неположительные корни лишь при условии, что один из них равен нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes.— Acta math., 1899, v. 22, p. 203.
2. *Grammel R.* Die stationären Bewegungen des selbsterregten Kreisels und ihre Stabilität.— Ingr-Arch., 1953, B. 21, H. 3, S. 149.
3. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 3.V.1979