МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1981

УДК 531.55:521.1

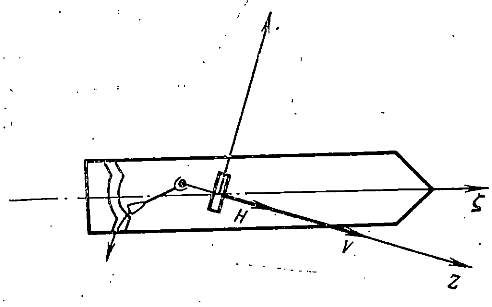
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

КУХТЕВИЧ С. Е.

Рассматривается движение осесимметричного летательного аппарата с одноканальной системой стабилизации относительно его центра масс, перемещающегося горизонтально с постоянной скоростью **V**.

Неизменность скорости центра масс аппарата является разумным приближением реальной ситуации для небольших углов отклонения продольной оси аппарата от вектора **V**. Подобные допущения при рассмотрении аналогичных задач делались, например, в [1, 2].

1. Систему координат XYZ, поступательно движущуюся вместе с центром масс аппарата, выберем следующим образом: ось Z направлена по скорости **V**, ось X – вертикально вверх, ось Y дополняет оси X и Z до правой системы координат (фиг. 1). За систему координат, жестко связанную с аппаратом, возьмем главные центральные оси инерции аппарата ξ, η и ζ. Переход от системы XYZ к системе $\xi\eta\zeta$ осуществляется тремя поворотами: поворот вокруг оси X на угол α, при котором оси X, Y, Z переходят в оси X, η°, J; поворот вокруг оси η° на угол β, при котором оси X, η°, J переходят в оси ξ°, η°, ζ; поворот вокруг оси ζ на угол γ, при котором оси ξ°, η°, ζ переходят в оси ξ, η, ζ.



Фиг. 1

Система стабилизации аппарата включает в себя двухстепенной гироскоп с постоянным кинетическим моментом **H**, направленным по оси Z.

Гироскоп связан с исполнительными органами системы стабилизации так, что они формируют возвращающий момент, направленный по оси η и пропорциональный синусу угла между осью ζ и проекцией оси Z на плоскость $\xi\zeta$.

По осям ξ° и η° на аппарат действуют аэродинамические моменты, равные $-K\sin\alpha$ и $-K\sin\beta$ соответственно.

По оси ζ на аппарат действует постоянный момент M_ζ° и демпфирующий момент, пропорциональный проекции мгновенной угловой скорости вращения аппарата на ось ζ.

Движение аппарата относительно его центра масс описывается уравнениями

$$A\alpha^{\cdot\cdot}\cos\beta+(C-2A)\alpha^\cdot\beta^\cdot\sin\beta+C\gamma^\cdot\beta^\cdot+K\sin\alpha+M_\eta\sin\gamma=0$$

$$A\beta^{\cdot\cdot}+(A-C)\alpha^{\cdot 2}\sin\beta\cos\beta-C\gamma^\cdot\alpha^\cdot\cos\beta+K\sin\beta-M_\eta\cos\gamma=0 \qquad (1.1)$$

$$C(\gamma^{\cdot\cdot}+\alpha^{\cdot\cdot}\sin\beta+\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\cos\beta)+\nu(\gamma^{\cdot}+\alpha^{\cdot}\sin\beta)-M_\zeta^\circ=0$$

$$M_\eta=E\sin\operatorname{arctg}\frac{\sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Здесь M_η — момент, формируемый системой стабилизации, A и C — соответственно экваториальный и полярный моменты инерции аппарата, ν — коэффициент пропорциональности демпфирующего момента.

Система (1.1) допускает частное решение

$$\begin{gathered}\alpha_*=\beta_*=0,\quad \gamma_*=\Omega t+\Omega_1 e^{-\chi t}+\Omega_2\\ \Omega=M_\zeta^\circ/\nu,\quad \chi=\nu/C,\quad \Omega_1=(\Omega-\gamma^{\cdot\circ})/\chi,\quad \Omega_2=\gamma^\circ-\Omega_1\end{gathered}\tag{1.2}$$

где γ°, $\gamma^{\cdot\circ}$ — начальные значения угла γ и его производной.

Исследуем устойчивость этого решения. Полагая без ограничения общности $\Omega_2=0$ и учитывая, что $\delta\alpha=\alpha-\alpha_*\equiv\alpha$, $\delta\beta=\beta-\beta_*\equiv\beta$, проварьируем систему (1.1) относительно частного решения (1.2)

$$\begin{gathered}A\alpha^{\cdot\cdot}+C\Omega\beta^{\cdot}+\left(K+\frac{E}{2}\right)\alpha-\frac{E}{2}(\alpha\cos 2\gamma_*+\beta\sin 2\gamma_*)-\chi C\Omega_1 e^{-\chi t}\beta^{\cdot}=0\\ A\beta^{\cdot\cdot}-C\Omega\alpha^{\cdot}+\left(K+\frac{E}{2}\right)\beta-\frac{E}{2}(\alpha\sin 2\gamma_*-\beta\cos 2\gamma_*)+\chi C\Omega_1 e^{-\chi t}\alpha^{\cdot}=0\\ C\delta\gamma^{\cdot\cdot}+\nu\delta\gamma^{\cdot}=0\end{gathered}\tag{1.3}$$

Последнее уравнение системы (1.3) имеет решение $\delta\gamma=D_1e^{-\chi t}+D_2$, где D_1, D_2 — произвольные постоянные.

Вводя безразмерные параметры

$$\tau=\Omega t,\quad \psi=\frac{\Omega_1}{\Omega},\quad \varkappa=\frac{\chi}{\Omega},\quad h=\frac{C}{A},\quad \varepsilon=\frac{E}{2A\Omega^2},\quad k=\frac{K+{}^1/_2E}{A\Omega^2}$$

и проводя элементарные преобразования, приведем первые два уравнения системы (1.3) к более удобному виду

$$\begin{gathered}\alpha^{\cdot\cdot}+h\beta^{\cdot}+k\alpha-\varepsilon(\alpha\cos 2\tau+\beta\sin 2\tau)-\\ -h\chi\psi e^{-\varkappa\tau}\beta^{\cdot}+2\varepsilon\sin(\psi e^{-\varkappa\tau})[\sin(2\tau+\psi e^{-\varkappa\tau})\alpha-\\ -\cos(2\tau+\psi e^{-\varkappa\tau})\beta]=0\\ \beta^{\cdot\cdot}-h\alpha^{\cdot}+k\beta-\varepsilon(\alpha\sin 2\tau-\beta\cos 2\tau)+\\ +h\chi\psi e^{-\varkappa\tau}\alpha^{\cdot}-2\varepsilon\sin(\psi e^{-\varkappa\tau})[\cos(2\tau+\psi e^{-\varkappa\tau})\alpha+\\ +\sin(2\tau+\psi e^{-\varkappa\tau})\beta]=0\end{gathered}\tag{1.4}$$

где точки означают уже производные по безразмерному времени.

Наряду с системой (1.4) рассмотрим следующую систему:

$$\begin{gathered}\alpha^{\cdot\cdot}+h\beta^{\cdot}+k\alpha-\varepsilon(\alpha\cos 2\tau+\beta\sin 2\tau)=0\\ \beta^{\cdot\cdot}-h\alpha^{\cdot}+k\beta-\varepsilon(\alpha\sin 2\tau-\beta\cos 2\tau)=0\end{gathered}\tag{1.5}$$

Система (1.5) как линейная система с периодическими коэффициентами приводима по Ляпунову. Применяя к системе (1.4) преобразование, приводящее систему (1.5) к системе с постоянными коэффициентами, получим уравнения, отличающиеся от приведенной системы (1.5) лишь членами с абсолютно интегрируемыми коэффициентами. Используя теорему Левинсона [3], заключаем, что если решение системы (1.5) ограничено, то системы (1.4) и (1.5) асимптотически эквивалентны. Таким образом, необходимые и достаточные условия устойчивости тривиального решения системы (1.5) будут являться достаточными условиями устойчивости тривиального решения системы (1.4) и соответственно решения (1.2) системы (1.1).

Заметим, что наряду с частным решением (1.2) система (1.1) допускает также решение

$$\alpha_*'=\beta_*'=0, \quad \gamma_*'=\Omega t \tag{1.6}$$

которое можно интерпретировать как «установившееся» решение (1.2). Проварьировав систему (1.1) относительно решения (1.6) и проведя соответствующие преобразования, получим уравнения (1.5).

Следовательно, необходимые и достаточные условия устойчивости тривиального решения системы (1.5) являются также необходимыми и достаточными условиями устойчивости решения (1.6) системы (1.1).

2. Умножим второе уравнение системы (1.5) на мнимую единицу и сложим его с первым. Вводя комплексную переменную $z=\alpha+i\beta$, получим

$$z^{\cdot\cdot}-ihz^{\cdot}+kz-\varepsilon\bar{z}e^{2i\tau}=0 \tag{2.1}$$

Здесь и далее черта означает операцию комплексного сопряжения.

Решение уравнения (1.5) ищем в виде

$$z=ce^{\lambda\tau}+\bar{c}p\exp\left[(\lambda+2i)\tau\right] \tag{2.2}$$

где c — комплексная произвольная постоянная, p — комплексный, вообще говоря, параметр, зависящий от ε, k, h и λ, λ — комплексный характеристический показатель.

Подставляя (2.2) в (2.1) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим

$$\lambda^2-ih\lambda+k-\varepsilon\bar{p}=0$$

$$p[(\bar{\lambda}+2i)^2-ih(\bar{\lambda}+2i)+k]-\varepsilon=0$$

Исключая p, имеем

$$n=\frac{\bar{\lambda}^2+ih\bar{\lambda}+k}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{(\bar{\lambda}+2i)^2-ih(\bar{\lambda}+2i)+k}$$

откуда найдем комплексное характеристическое уравнение для (2.1)

$$\varepsilon^2-(\bar{\lambda}^2+ih\bar{\lambda}+k)[(\bar{\lambda}+2i)^2-ih(\bar{\lambda}+2i)+k]=0 \tag{2.3}$$

Приравнивая к нулю мнимую часть левой части (2.3), получим

$$a(1-b)[2(k+a^2-b^2+hb)+(2-h)(2b-h)]=0$$
$$a=\operatorname{Re}\lambda, \quad b=\operatorname{Im}\lambda \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) выполняется в трех случаях: $a=0$, $b=1$, $2(k-a^2+b^2+$ $+hb)+(2-h)(2b-h)=0$.

Рассматривая первый случай, из (2.3) находим

$$b_{1,2}=1+\{k+1-h+{}^1/_2h^2\pm[\varepsilon^2+(k+{}^1/_4h^2)(2-h)^2]^{1/2}\}^{1/2} \tag{2.5}$$

Из (2.5) видно, что b_1, b_2 являются действительными числами и $b_1\neq$ $\neq b_2\neq 1$, если

$$(k-1+h)^2>\varepsilon^2>-(k+{}^1/_4h^2)(2-h)^2, \quad k>-1+h-{}^1/_2h^2 \tag{2.6}$$

Если выполняются соотношения

$$\varepsilon^2=(k-1+h)^2, \quad k>-1+h-{}^1/_2h^2 \tag{2.7}$$

то $b_2=1$; при условиях

$$\varepsilon^2=-(k+{}^1/_4h^2)(2-h)^2,\quad k>-1+h-{}^1/_2h^2 \qquad (2.8)$$

получим $b_1=b_2\neq 1$.

В точках, определяемых зависимостями

$$k=-1+h-{}^1/_2h^2,\quad \varepsilon=\pm(k-1+h)=\mp{}^1/_2(2-h)^2 \qquad (2.9)$$

будем иметь $b_1=b_2=1$.

Таким образом, если параметры ε, k и h удовлетворяют неравенствам (2.6), то уравнение (2.1) имеет различные чисто мнимые характеристические показатели и общее решение вида

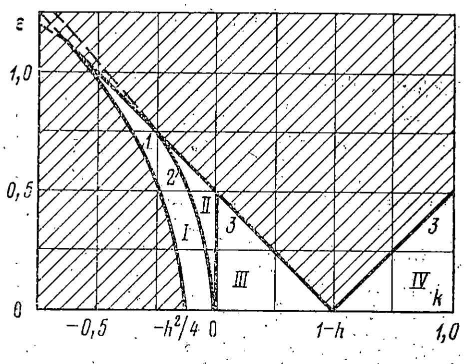
$$z=c_1e^{ib_1\tau}+\bar{c}_1p_1e^{i(2-b_1)\tau}+c_2e^{ib_2\tau}+\bar{c}_2p_2e^{i(2-b_2)\tau}$$

$$p_{1,2}=(k-b_{1,2}^2+hb_{1,2})^2/\varepsilon$$

где b_1 и b_2 определяются из (2.5).

Если выполнены соотношения (2.7) или (2.8), то уравнение (2.1) имеет два совпадающих характеристических показателя и допускает решения, растущие пропорционально τ. При значениях ε и k, определяемых равенствами (2.9), все четыре характеристических показателя уравнения (2.1) совпадают и оно имеет решения, растущие как τ^3.

Аналогично, рассматривая второй и третий случаи, можно показать, что при всех значениях ε, k и h, не удовлетворяющих соотношениям (2.6)—(2.9), уравнение (2.1) имеет характеристические показатели с положительной действительной частью и, следовательно, допускает экспоненциально растущие решения.



Фиг. 2

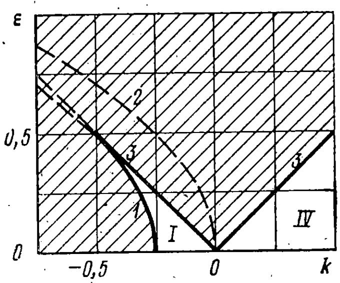
Области значений параметров ε, k и h, удовлетворяющих неравенствам (2.6), являются, конечно, областями простой устойчивости тривиального решения уравнения (2.1) и системы (1.5) и, следовательно, решений (1.2) и (1.6) уравнений (1.1). Все остальные области значений этих параметров являются областями экспоненциальной неустойчивости тривиального решения уравнения (2.1) и системы (1.5) и, следовательно, решения (1.6) системы (1.1).

Пусть теперь на аппарат по осям ξ° и η° действуют малые аэродинамические демпфирующие моменты $-\sigma\dot{\alpha}$ и $-\sigma\dot{\beta}$ соответственно.

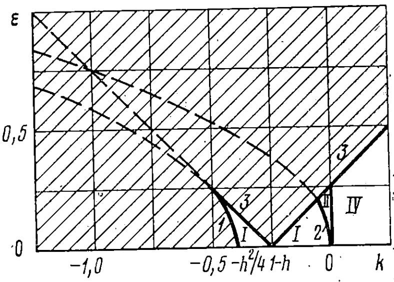
Уравнения движения аппарата будут и в этом случае допускать решения (1.2) и (1.6). Проварьировав эти уравнения относительно данных решений, получим асимптотически эквивалентные системы, отличающиеся от систем (1.4) и (1.5) лишь членами с малыми коэффициентами. Обозначим их (1.4а) и (1.5а) соответственно. В силу непрерывной зависимости характеристических показателей системы от ее коэффициентов области экспоненциальной неустойчивости тривиального решения системы (1.5) останутся областями неустойчивости и для тривиального решения системы (1.5а), претерпев, быть может, лишь небольшую деформацию. Области же простой устойчивости могут стать либо областями экспоненциальной неустойчивости, либо областями асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.5а).

Проведя исследование системы (1.5а), можно показать, что при достаточно малом σ область простой устойчивости тривиального решения системы (1.5) становится областью асимптотической устойчивости тривиального решения систем (1.5а), (1.4а), если $\varepsilon^2>-k(2-h)^2$. Если же $\varepsilon^2<-k(2-h)^2$, то тривиальное решение системы (1.5а) экспоненциально неустойчиво.

3. Полученные результаты представлены на фиг. 2–4. Области, в которых уравнение (2.1) имеет неограниченные решения, заштрихованы, рисунки симметричны относительно оси k. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют



Фиг. 3



Фиг. 4

следующим значениям параметра ε: $\varepsilon^2=-(k+{}^1/_4h^2)(2-h)^2$, $\varepsilon^2=-k(2-h)^2$, $\varepsilon^2=(k-1+h)^2$; на фиг. 2 параметр $h=0{,}5$ $(0<h<1)$, на фиг. 3 параметр $h=1$ и на фиг. 4 параметр $h=1{,}25$ $(1<h<2)$.

Отметим также некоторые свойства движения рассмотренной механической системы.

При принадлежности значений параметров ε и k областям I (фиг. 2–4), происходит временна́я параметрическая стабилизация неустойчивого положения равновесия аппарата $\alpha=\beta=\alpha^{\cdot}=\beta^{\cdot}=0$, которая нарушается сколь угодно малыми силами полной диссипации. Если же значения ε и k лежат в областях II, то параметрическая стабилизация неустойчивого равновесия сохраняется и при наличии диссипативных сил. В этом случае рассматриваемый аппарат является своего рода двумерным аналогом известного маятника Капицы [4].

На фиг. 3 область II отсутствует, т. е. при равенстве полярного и экваториальных моментов инерции аппарата и наличии демпфирования параметрическая стабилизация неустойчивого положения равновесия невозможна.

Приведенные результаты согласуются с результатами Н. Г. Четаева, полученными для неуправляемого снаряда [1], что соответствует здесь случаю $\varepsilon=0$. Действительно, тогда условием устойчивости аппарата будет $k>-h^2/4$ (условие Маиевского) при отсутствии демпфирования и $k>0$ при наличии диссипативных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 409 с.
2. *Крылов А. Н.* О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета. Л.: Изд-во АН СССР, 1929. 158 с.
3 *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 159 с.
4. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5, с. 588.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1979