

УДК 534.4; 517.9

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

КАРТВЕЛИШВИЛИ В. М., МИРОНОВ А. А., САМСОНОВ А. М.

Широкое практическое применение подкрепленных конструкций послужило причиной постановки и решения различных задач теории упругости для пластин и оболочек с ребрами жесткости (см., например, [1]) и разработки оптимизации механических свойств таких систем.

Возможны различные постановки задач оптимизации упругих систем, подкрепленных ребрами жесткости: в качестве управления можно выбрать распределение толщины пластин (оболочек), положение и конфигурацию ребер, распределение материала в подкрепляющих элементах. В ряде случаев на упругую систему накладываются различные ограничения механического и конструктивного характера, исключающие возможность варьирования некоторых геометрических характеристик конструкции, таких, как толщина пластинки или положение ребра. В то же время изменение параметров собственно ребра может заметно улучшить свойства конструкции в целом.

Существующие алгоритмы численного решения задач оптимизации подкрепленных конструкций основаны на предварительной дискретизации упругой системы, постановке задачи математического программирования и численном ее решении в некоторой области изменения параметров [2, 3].

В публикуемой работе используется иной подход к построению алгоритма численного решения задачи оптимизации, базирующийся на последовательном применении вариационно-разностных методов, метода проектирования градиентов и теории оптимального управления. Построение алгоритма в этом случае основывается на существенных качественных результатах, таких, как условие стационарности, а условие типа Вейерштрасса гарантирует оптимальность найденного решения относительно сильных локальных вариаций. Эффективность алгоритма показана на примерах численного решения конкретных задач оптимизации упругих пластин с ребрами жесткости.

1. Постановка задач рассматриваемого класса может быть приведена к следующему виду. В двумерной области  $\Omega$ , ограниченной контуром  $L$ , выделена кривая  $\Gamma$ , задающая положение ребра жесткости. Состояние системы определяется функцией прогибов  $w(x, y)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ), сообщающей минимум квадратичному функционалу полной потенциальной энергии деформации

$$u = \min_w (u_0 + u_1) \quad (1.1)$$

$$u_0 = \iint_{\Omega} f_0(x, y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) dx dy$$

$$u_1 = \int_{\Gamma} f_1(s, w_n, w_s, w_{ns}, w_{ss}; a(s), c(s)) ds$$

Здесь  $f_0, f_1$  — заданные функции, квадратичные по  $w$  и ее вторым и первым частным производным,  $s$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль линии  $\Gamma$ ,  $n$  — нормаль к кривой  $\Gamma$ ,  $a(s), c(s)$  — механические характеристики подкрепляющего элемента (изгибная и крутильная жесткости). Функционал  $u_0$  отвечает потенциальной энергии изгиба несущей конструкции,  $u_1$  — потенциальной энергии деформации подкрепления. Предполагается,

что функция  $w(x, y)$  удовлетворяет соответствующим кинематическим граничным условиям.

В качестве оптимизируемого функционала могут фигурировать различные интегральные и локальные механические характеристики системы. Описываемый метод оптимизации подкрепленных упругих систем применим для задач с интегральными критериями качества. Задачи с локальными критериями качества могут быть сведены к задачам с интегральными функционалами согласно [4].

Если функционал качества порождает несамосопряженную задачу оптимизации, то, как обычно, вводится сопряженная (лагранжева) переменная  $w^*(x, y)$  и рассматривается совокупность задач для  $w$  и  $w^*$ . При этом функция  $w^*$  минимизирует функционал, аналогичный функционалу (1.1). Для упрощения изложения методики решения задач оптимизации подкрепленных конструкций ограничимся энергетическим критерием качества. Можно обобщить методику на другие виды функционалов.

В качестве управлений рассматриваются геометрические размеры сечения подкрепляющего элемента  $h_i = h_i(s)$  ( $i=1, \dots, n$ ). Для ребра прямоугольного сечения примем  $h_1$  — ширина ребра,  $h_2$  — высота ребра. Предполагается известной зависимость функций  $a(s)$ ,  $c(s)$  (жесткостей) от параметров  $h_i$ :

$$\begin{aligned} a(s) &= A(h_1(s), h_2(s), \dots, h_n(s)) \\ c(s) &= C(h_1(s), h_2(s), \dots, h_n(s)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

На функции  $h_i$  наложены ограничения ( $h_i^- = \text{const}$ ,  $h_i^+ = \text{const}$ ):

$$0 < h_i^- \leq h_i(s) \leq h_i^+ \quad (i=1, \dots, n) \quad (1.3)$$

Кроме того, задано изопериметрическое условие постоянства объема материала ребра, а следовательно, и всей конструкции

$$V = \int_{\Gamma} S(h_1(s), \dots, h_n(s)) ds \quad (1.4)$$

Итак, задача оптимизации подкрепленных упругих систем с энергетическим критерием качества сводится к нахождению функций  $h_i(s)$  ( $i=1, \dots, n$ ), удовлетворяющих (1.3), (1.4) и обеспечивающих минимум функционала (1.1):

$$u^* = \min_{h_i(s)} u = \min_{h_i(s)} \min_{w(x,y)} (u_0 + u_i) \quad (1.5)$$

Поскольку участки выхода функций  $h_i$  на ограничения заранее неизвестны, введем в рассмотрение новые управляющие функции  $\varphi_i(s)$ , связанные с  $h_i(s)$  равенствами (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} h_i &= \alpha_i + \beta_i \sin \varphi_i \quad (i=1, \dots, n) \\ \alpha_i &= 1/2(h_i^- + h_i^+), \quad \beta_i = 1/2(h_i^+ - h_i^-) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда при любых значениях  $\varphi_i(s)$  условия (1.3) будут выполнены.

2. Решение задачи оптимизации строится при помощи последовательных приближений. На каждом шаге  $k$  итераций решается задача об отыскании функции  $w^k(x, y)$  при заданных функциях  $\varphi_i^k(s)$ , происходит проверка выполнения условий оптимальности. При выполнении условий оптимальности с заданной точностью процесс прекращается. В противном случае происходит варьирование функций  $\varphi_i^k(s)$ :

$$\varphi_i^{k+1} = \varphi_i^k + \delta \varphi_i^k \quad (2.1)$$

и переход к вычислению функции  $w^{k+1}(x, y)$  для новых управляющих функций  $\varphi_i^{k+1}(s)$ .

Для определения вариаций  $\delta^k \varphi_i$  на шаге  $k$  (индекс  $k$  в дальнейшем опускаем) найдем вариации функционалов (1.5), (1.4):

$$\begin{aligned} \delta u &= \sum_i \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial f_i}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial h_i} + \frac{\partial f_i}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial h_i} \right) \cos \varphi_i \delta \varphi_i ds = \\ &= \sum_i \int_{\Gamma} \Phi_i \cos \varphi_i \delta \varphi_i ds = \langle F, \delta \varphi \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\delta V = \sum_i \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial h_i} \cos \varphi_i \delta \varphi_i ds = \sum_i \int_{\Gamma} \psi_i \cos \varphi_i \delta \varphi_i ds = \langle E, \delta \varphi \rangle \quad (2.3)$$

Угловыми скобками обозначены скалярные произведения вектор-функций. Функции  $\delta \varphi_i$ , являющиеся компонентами вектор-функции  $\delta \varphi$ , определяем по формулам

$$\delta \varphi = -\tau \left( F - \frac{\langle F, E \rangle}{\langle E, E \rangle} E \right) \quad (0 < \tau \leq 1) \quad (2.4)$$

Такой выбор функций варьирования гарантирует уменьшение функционала  $u$  при сохранении изопериметрического условия. Кроме того, функция варьирования  $\delta \varphi$  обращается в нуль тождественно при точном выполнении необходимых условий оптимальности:  $F_i = \lambda E_i$ , где  $\lambda = \langle F, E \rangle / \langle E, E \rangle$  — аналог множителя Лагранжа.

Для данной задачи скалярное произведение  $\langle F, E \rangle$  целесообразно определить в виде

$$\langle F, E \rangle = \sum_i \int_{\Gamma} F_i E_i \cos^{\gamma} \varphi_i ds \quad (\gamma = \text{const}) \quad (2.5)$$

где  $\gamma$  — заданное число, выявляющее характер скалярного произведения двух вектор-функций.

В этом случае компоненты вектор-функций  $E_i$  и  $F_i$ , согласно (2.2), (2.3), имеют вид

$$F_i = \Phi_i \cos^{1-\gamma} \varphi_i, \quad E_i = \Psi_i \cos^{1-\gamma} \varphi_i \quad (2.6)$$

а равенство (2.4) для функции варьирования запишется в форме

$$\delta \varphi_i = -\tau \cos^{1-\gamma} \varphi_i \left( \Phi_i - \Psi_i \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} \right) \quad (2.7)$$

$$\Sigma_1 = \sum_i \int_{\Gamma} \Phi_i \Psi_i \cos^{2-\gamma} \varphi_i ds, \quad \Sigma_2 = \sum_i \int_{\Gamma} \Psi_i^2 \cos^{2-\gamma} \varphi_i ds$$

В точках выхода функций  $h_i$  на верхнее или нижнее ограничение  $\sin \varphi_i$  обращается соответственно в  $\pm 1$ , а  $\cos \varphi_i = 0$ . Поэтому, согласно (2.7), при различных  $\gamma$  подход решения к ограничениям будет происходить с разной скоростью. Так, при  $\gamma > 1$  формула (2.7) дает большие вариации в окрестности ограничений и ограничения могут «проскакиваться». При  $\gamma < 1$  подход к ограничениям будет более плавным. Численные эксперименты показывают, что для рассматриваемых задач наилучшую сходимость дает  $\gamma = 1$ .

При решении задачи оптимизации на каждом шаге необходимо определять функцию  $w(x, y)$  (т. е. решать прямую задачу). Поскольку оптимизация проводится при помощи последовательных приближений, то на каждом шаге  $k$  управляющая функция  $\varphi(s)$ , а поэтому и функция  $w$  от  $k$ -го приближения к  $(k+1)$ -му изменяются незначительно. Следовательно,

для решения прямой задачи (задачи определения функции  $w(x, y)$ ) на  $k$ -м шаге оптимизации целесообразно применять итерационный метод, использующий преимущество хорошего начального приближения.

Для расчета прямой задачи использован итерационный вариационно-разностный метод локальных вариаций с переменными шагами варьирования. Область  $\Omega$  разбивается сеткой на ячейки. Функция  $w(x, y)$  задается своими значениями  $w_{ij}$  в каждом узле сетки. На каждом шаге  $t$  решения прямой задачи варьирование значения  $w_{ij}^t$  происходит последовательно во всех внутренних точках области на локально-оптимальную величину шага  $l_{ij}^t$ :

$$w_{ij}^{t+1} = w_{ij}^t + l_{ij}^t \quad (2.8)$$

причем  $l_{ij}^t$  выбирается по правилу, изложенному в [6], чтобы обеспечить максимальное убывание конечно-разностного аналога функционала (1.1).

Обычно [4—7] итерации в прямой задаче заканчиваются при выполнении условия

$$\max_{ij} |l_{ij}^t| < \delta \quad (\delta = \text{const}) \quad (2.9)$$

при заданном малом  $\delta$ , так как при малом  $|l_{ij}^t|$  величины  $w_{ij}^t$  удовлетворяют конечно-разностному аналогу уравнения Эйлера для функционала (1.1). Замечено [7], что в схеме с переменным шагом  $\max_{ij} |l_{ij}^t| = z_t$  последовательность шагов варьирования  $z_1, \dots, z_t$  при росте номера итерации  $t$  превращается в сходящуюся геометрическую прогрессию со знаменателем, не зависящим от вида начального приближения и от номера узла сетки  $(i, j)$ . Поэтому, вычислив  $w_{ij}^t$  на некоторой итерации, можно прибавить к значениям варьлируемой функции в каждом узле остатки сумм геометрических прогрессий и получить асимптотическое значение  $w_{ij}^*$ .

Для достаточно большого номера итерации  $t$  кривая  $w_{ij}(t)$  хорошо описывается функцией

$$w_{ij}^t = w_{ij}^* [1 - \exp \alpha_1 (t - t_0)] \quad (\alpha_1 < 0; \alpha_1, t_0 = \text{const}) \quad (2.10)$$

где  $\alpha_1$  и  $t_0$  — постоянные, зависящие от начального приближения; их значения несущественны для дальнейшего.

При итерации с номерами  $t, t+\Delta, t+2\Delta$ , где  $\Delta$  — небольшое число (обычно  $\Delta=3-7$ ), вычисляется значение  $w_{ij}$  и по формуле (2.10) определяется асимптотическое значение

$$w_{ij}^* = [(w_{ij}^{t+\Delta})^2 - w_{ij}^t w_{ij}^{t+2\Delta}] / (2w_{ij}^{t+\Delta} - w_{ij}^t - w_{ij}^{t+2\Delta}) \quad (2.11)$$

Отметим, что методика [7] предполагает суммирование геометрической прогрессии по формуле (2.11) в качестве завершающего этапа решения прямой задачи. При этом суммирование производится после достаточно большого числа  $t$  шагов по формуле (2.8). Известно, что в основном машинное время уходит на итерирование по формуле (2.8).

Предлагаемый итерационный алгоритм решения прямой задачи заключается в следующем. Производится небольшое (до 30) число шагов по формуле (2.8). Далее осуществляется суммирование по формуле (2.11) и полученное значение прогибов  $w_{ij}^*$  принимается в качестве начального приближения для следующей итерации. Процесс прекращается при выполнении условия  $\max_{ij} |l_{ij}^t| < \delta$ . Численные эксперименты показали, что описанный алгоритм приводит к ускорению сходимости в 10—40 раз в сравнении с методом локальных вариаций [4—7].

При рассмотрении других типов функционалов формула (2.2) для вариации оптимизируемого функционала изменится, так как в выражение для функции  $\varphi_i$  войдет сопряженная переменная. В этом случае для ре-

шения задачи оптимизации на каждом шаге потребуется решить сопряженную задачу, что удвоит время вычислений. Решение сопряженной задачи проводится аналогично решению прямой задачи. Формулы для варьирования управляющих функций (2.7) не изменяются.

3. В качестве примера описанной методики рассмотрим задачу оптимизации полной потенциальной энергии деформации упругой квадратной пластины постоянной толщины  $\Omega (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  с прямолинейным ребром жесткости  $\Gamma (0 \leq x \leq 1, y = y_s = \text{const})$ : Функционал полной потенциальной энергии деформации (1.1) имеет вид

$$u = u_0 + u_1 \quad (3.1)$$

$$u_0 = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} [(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] dx dy$$

$$D = E_0 H^3 / [12(1-\nu^2)]$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [a(s)(kw_n - w_{ss})^2 + c(s)(kw_s + w_{ns})^2] ds$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины  $\Omega$ , изготовленной из материала, имеющего упругие постоянные  $E_0$ ,  $\nu$ ,  $k$  — кривизна ребра; нижние индексы означают дифференцирование вдоль дуги  $s$  и по нормали  $n$  к ребру. Предполагается, что  $w(x, y)$  удовлетворяет соответствующим граничным условиям.

Сечение ребра в каждой точке  $s \in \Gamma$  имеет два характерных размера:  $h_1(s) = g(x)$ ,  $h_2(s) = h(x)$ . Ребро жестко скреплено с пластиной. На  $h(x)$  и  $g(x)$  наложены конструктивные ограничения

$$0 < g^- \leq g(x) \leq g^+ \leq h^- \leq h(x) \leq h^+ \quad (3.2)$$

Изгибная и крутильная жесткости  $a(s)$  и  $c(s)$  выражаются через  $h_1(s) = g(x)$ ,  $h_2(s) = h(x)$  по формулам

$$a(x) = \varepsilon g(x) h^3(x), \quad c(x) = \beta h(x) g^3(x) \quad (3.3)$$

где  $\varepsilon$  и  $\beta$  — заданные константы, пропорциональные соответственно модулю Юнга  $E$  и модулю сдвига  $G$  материала ребра и зависящие от вида поперечного сечения стержня.

Зависимости (3.4) можно считать справедливыми для ряда возможных поперечных сечений ребра (двутавр, прямоугольник, крест [8]) при условии, что в решении соответствующей задачи кручения стержня можно пренебречь слагаемыми  $O(g/h)$ .

Изопериметрическое условие (1.4) имеет вид

$$v = \kappa \int_0^1 g(x) h(x) dx = \text{const} \quad (\kappa = \text{const}) \quad (3.4)$$

Введем безразмерные переменные  $x' = x/l$ ,  $y' = y/l$ ,  $w' = Dw/(q_0 l^4)$ ,  $u' = uD/(q_0^2 l^6)$ ,  $a' = a/(lD)$ ,  $c' = c/(lD)$ ,  $y_s' = y_s/l$ ,  $q' = q(x, y)/q_0$ , где  $l$  — характерный размер пластины,  $q_0$  — масштаб для интенсивности изгибающей нагрузки.

Пусть пластина закреплена по внешнему контуру. Тогда функционал (3.1) примет вид (штрихи у безразмерных величин здесь и далее опущены):

$$u = \int_0^1 \int_0^1 [(\Delta w)^2 - 2qw] dx dy + \int_0^1 [a(x)w_{xx}^2 + c(x)w_{xy}^2] |_{y=y_s} dx \quad (3.5)$$

Структура (3.5) такова, что приведение ограничений (3.4) к безразмерному виду можно проводить в значительной степени независимо. Вводя, например, нормировки  $g' = g/H$ ,  $h' = h/H$ ,  $v' = v/(H^2 l)$  ( $H$  — толщина пластины), получим

$$v' = \int_0^1 g'(x') h'(x') dx' \quad (3.6)$$

и значения безразмерных констант  $\varepsilon'$  и  $\beta'$  в (3.3) будут равны

$$a' = \frac{\varepsilon H^4 g'(h')^3}{lD} \Rightarrow \varepsilon' = \frac{\varepsilon H^4}{lD} = \frac{12k_1(1-v^2)EH}{E_0 l}$$

$$c' = \frac{\beta H^4 (g')^3 h'}{lD} \Rightarrow \beta' = \frac{\beta H^4}{lD} = \frac{12k_2(1-v^2)GH}{E_0 l}$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — числа, характеризующие тип поперечного сечения стержня.

4. Рассматриваемая в примере задача оптимизации заключается в отыскании двух характерных размеров  $g=g(x)$ ,  $h=h(x)$  поперечного сечения подкрепляющего стержня, при которых достигается минимум функционала (3.5)

$$u[g, h, w] = u_0[w] + u_1[g, h, w] \quad (4.1)$$

В (4.1) прогибы пластины  $w(x, y)$  удовлетворяют соответствующим граничным условиям при любых допустимых управлениях, ограниченных согласно (3.2), (3.6).

Как известно [9], оптимальный промежуточный режим управления выделяется равенством удельных потенциальных энергий изгиба и кручения

$$\varepsilon h^2(x) w_{xx}^2 = \beta g^2(x) w_{xy}^2 \Rightarrow a(x) w_{xx}^2 = c(x) w_{xy}^2, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (4.2)$$

которое должно выполняться всюду вдоль ребра, если  $g(x)$  и  $h(x)$  не выходят на ограничения. Выход управлений на ограничения учитывается преобразованием неравенств (3.2) к условиям типа равенств и анализом по обычным правилам [9].

Введем две новые управляющие функции  $\varphi_1 = \varphi(x)$  и  $\varphi_2 = \xi(x)$ :

$$g = a_g + b_g \sin \xi, \quad 2a_g = g^+ + g^-, \quad 2b_g = g^+ - g^- \quad (4.3)$$

$$h = a_h + b_h \sin \varphi, \quad 2a_h = h^+ + h^-, \quad 2b_h = h^+ - h^-$$

Изопериметрическое ограничение имеет вид

$$v = \int_0^1 (a_h b_g \sin \xi + a_g b_h \sin \varphi + b_h b_g \sin \varphi \sin \xi + a_g a_h) dx \quad (4.4)$$

откуда при вариациях управлений (4.3)  $\delta g = b_g \cos \xi \delta \xi$ ,  $\delta h = b_h \cos \varphi \delta \varphi$  получим

$$\int_0^1 (h b_g \cos \xi \delta \xi + g b_h \cos \varphi \delta \varphi) dx = 0 \quad (4.5)$$

Следовательно,  $\Psi_1 = h b_g$ ,  $\Psi_2 = g b_h$ . Вариация  $u_1[g, h, w]$  из (4.1) может быть приведена к виду

$$\delta u_1 = \int_0^1 (\Phi_1 \delta g + \Phi_2 \delta h) dx = \int_0^1 (\Phi_1 b_g \cos \xi \delta \xi + \Phi_2 b_h \cos \varphi \delta \varphi) dx \quad (4.6)$$

$$\Phi_1 = \varepsilon h^3 w_{xx}^2 + 3\beta b g^2 w_{xy}^2, \quad \Phi_2 = 3\varepsilon g h^2 w_{xx}^2 + \beta g^3 w_{xy}^2$$

Формула варьирования (2.4) в этом случае примет вид

$$\delta\varphi = -\tau(\varepsilon h^3 w_{xx}^2 + 3\beta h g^2 w_{xy}^2 - \lambda h b_g)$$

$$\delta\xi = -\tau(3\varepsilon g h^2 w_{xx}^2 + \beta g^3 w_{xy}^2 - \lambda g b_h)$$

$$\lambda_\gamma = \frac{\kappa}{\gamma}, \quad \kappa = \int_0^1 (h b_g \Phi_1 \cos \varphi + g b_h \Phi_2 \cos \xi) dx$$

$$\gamma = \int_0^1 (h^2 b_g \cos \varphi + g^2 b_h \sin \varphi) dx$$

Заметим, что указанная методика применима для решения задачи оптимизации подкрепленной пластины переменной толщины  $H(x, y)$ .

5. При помощи построенной методики численного решения были рассчитаны конкретные задачи оптимизации жесткостей ребра, подкрепляющего пластину единичной постоянной толщины. Расчеты производились на сетке  $15 \times 15$  при различных  $q(x, y)$  и следующих значениях постоянных:  $v=0,4$ ;  $g_1=0,1$ ;  $g_2=0,3$ ;  $h_1=0,3$ ;  $h_2=0,7$ ;  $\delta=10^{-10}$ ;  $k_1=250-300$ ;  $\Delta=5$ .

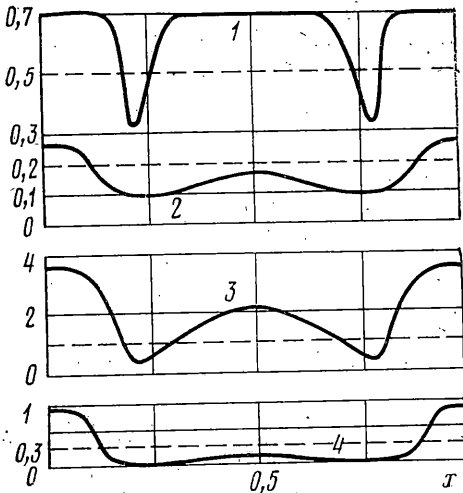
Постоянные  $\varepsilon$  и  $\beta$  выбирались так, чтобы при  $\varphi=0$ ,  $\xi=0$  начальные значения жесткостей были равны  $a=a_0=1$ ;  $c=c_0=0,3$ ; поэтому в начальном приближении  $g(x) \equiv g_0 = a_g$ ,  $h(x) \equiv h_0 = a_h$ .

В таблице приведены результаты расчетов выигрыша от оптимизации при различных видах нагрузки  $q(x, y)$  и положениях ребра  $y_s$  заземленной по всему контуру пластины. Выигрыш от оптимизации определяется в процентах отношениями  $p = 100(u - u^*)/u$  и  $p_1 = 100(u_1 - u_1^*)/u_1$ , где  $u^*$  и  $u_1^*$  — величины энергии после оптимизации размеров сечения ребра,  $u$  и  $u_1$  — те же величины, рассчитанные по средним значениям размеров  $g_0 = (g_2 + g_1)/2$ ,  $h_0 = (h_2 + h_1)/2$  сечения ребра того же объема.

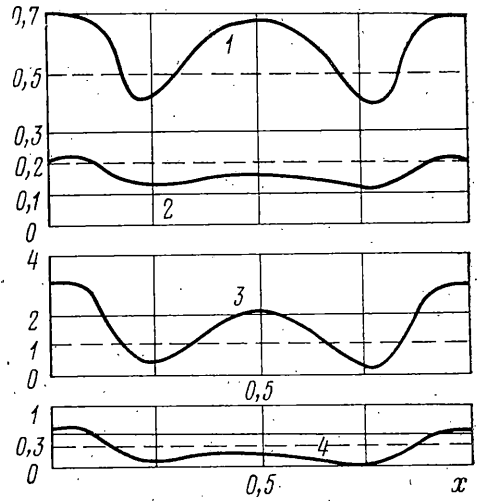
На графиках фиг. 1 — 4 представлены оптимальные распределения размеров  $h(x)$  (кривая 1),  $g(x)$  (кривая 2) и жесткостей  $a(x)$  (кривая 3),  $c(x)$  (кривая 4) вдоль ребра при  $q=1$ ,  $y_s=0,5$  (фиг. 1),  $q=1+\cos \pi y$ ,  $y_s=0,64$  (фиг. 2),  $q=1+\cos \pi x \cos \pi y$ ,  $y_s=0,64$  (фиг. 3),  $q=5 \cos \pi y$ ,  $y_s=0,5$  (фиг. 4). Фиг. 1 — 7 соответствуют случаю заземления пластины по всему контуру. Штриховой линией на каждом графике обозначены начальные значения указанных величин, относительно которых и рассчитан выигрыш.

На фиг. 5 — 7 изображены поверхности изгиба пластины с ребром при оптимальном (фиг. 5, а, 6, а, 7, а) и начальном (фиг. 5, б, 6, б, 7, б) распределениях управлений соответственно для  $q=1$ ,  $y_s=0,5$ ,  $q=1+\cos \pi x \cos \pi y$ ,  $y_s=0,64$ ,  $q=5 \cos \pi y$ ,  $y_s=0,5$ . Штриховой линией обозначено положение ребра. Здесь визуально наблюдается влияние оптимального распределения размеров, а следовательно, и материала ребра на деформированное состояние конструкции. Видно, что даже при небольших выигрышах в величине энергии конструкции (см., например, фиг. 7) после оптимизации поверхность деформации пластины значительно сглаживает-

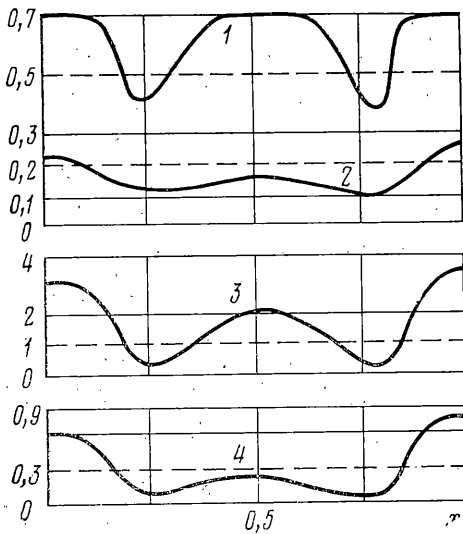
$q(x, y)$	$y_s$	$p, \%$	$p_1, \%$
заземление по всему контуру			
1	0,5	31,4	18,4
1	0,64	20,6	7,8
$5 \cos \pi y$	0,5	6,2	28,0
$1 + \cos \pi y$	0,36	36,2	12,7
$1 + \cos \pi y$	0,5	27,0	21,8
$1 + \cos \pi y$	0,64	5,1	3,6
$1 + \cos \pi x \cos \pi y$	0,5	32,1	27,1
$1 + \cos \pi x \cos \pi y$	0,64	16,1	7,5
стороны $y=0$ ; 1 — оперты; стороны $x=0$ ; 1 — заземлены			
1	0,5	30,0	28,8
$5 \cos \pi y$	0,5	7,6	40,8



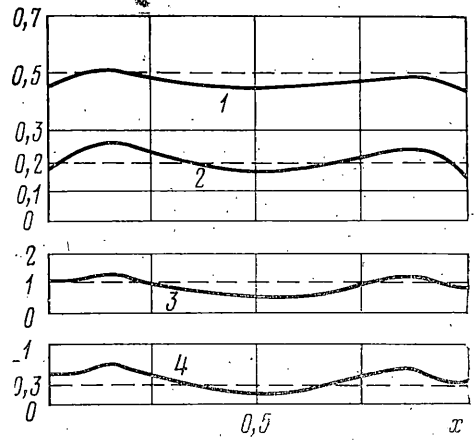
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



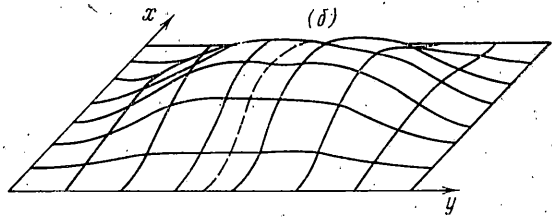
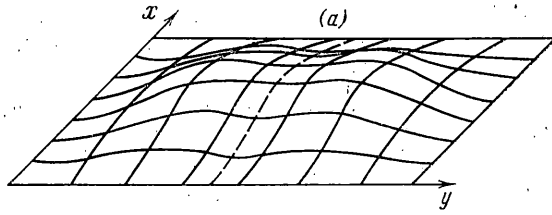
Фиг. 4

ся. Поэтому можно заключить, что уменьшение полной энергии сопровождается снижением напряжений и прогибов конструкции.

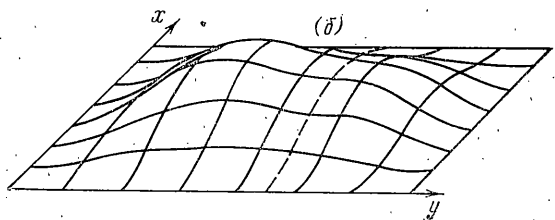
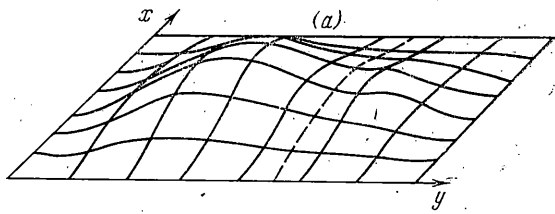
При  $q=1$ ,  $y_s=0,5$  (фиг. 1, 5) ребро работает только на изгиб, поэтому  $h(x)$  выходит на верхнее ограничение  $h=h_2$  всюду, за исключением двух симметрично расположенных относительно середины ребра  $x=0,5$  точек, где обращается в нуль изгибающий момент, приложенный к ребру. Распределение меньшего размера  $g(x)$  определяется изопериметрическим ограничением (3.6). Жесткости ребра максимальны у заземленных краев пластины, крутильная жесткость  $c(x)$  очень мала и почти всюду меньше исходной  $c_0=0,3$ , изгибная  $a(x)$  сильно отличается от значения  $a_0=1$ .

Сдвиг ребра к заземленному краю, как видно из таблицы, приводит к уменьшению выигрыша вследствие оптимизации; качественная картина распределения управлений при этом существенно не меняется.

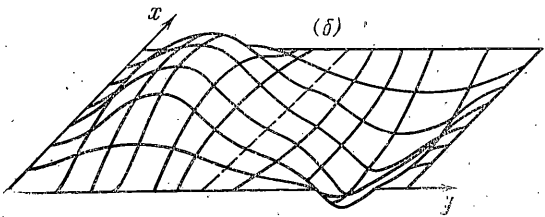
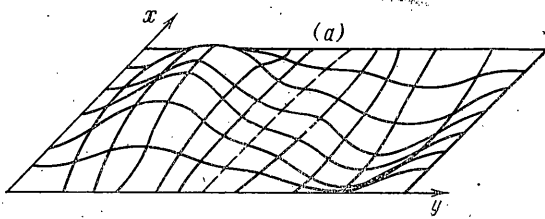




Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

При нагрузке, имеющей переменную составляющую, выигрыш уменьшается по мере увеличения  $y_s$ , хотя ребро в этом случае подвержено как изгибу, так и кручению. При сложном нагружении:  $q=1+\cos \pi x \cos \pi y$  и несимметрично расположенном ребре ( $y_s=0,64$ ) (фиг. 3, 6) жесткости максимальны только у точки  $x=1$ , графики  $g(x)$ ,  $h(x)$ ,  $a(x)$ ,  $c(x)$  несимметричны относительно  $x=0,5$ .

В рассмотренных вариантах крутильная жесткость  $c(x)$  сравнительно слабо влияет на потенциальную энергию защемленной пластины с ребром. Это объясняется тем, что при постоянной и комбинированной нагрузках величина  $w_{xy}^2$  (множитель при  $c(x)$  в выражении (4.1) для энергии ребра  $u_1$ ) не входит явно в выражение для энергий пластины  $u$ , если контур пластины защемлен. Поэтому  $c(x)$  влияет на величину функционала (3.5) в основном за счет нелинейной связи с  $w(x, y)$  в краевой задаче (1.4).

Для уточнения эффекта, связанного с оптимальным распределением крутильной жесткости, был рассчитан вариант:  $q=5 \cos \pi y$ ,  $y_s=0,5$  (фиг. 4, 7), при котором ребро работает только на кручение. В результате оптимального распределения управлений получены небольшие выигрыши в полной энергии конструкции, сопровождающиеся значительным изменением энергии самого ребра (таблица). Оба управления находятся в промежуточных режимах, крутильная жесткость  $c(x)$  почти всюду больше начального значения, а изгибная почти не отличается от  $a_0=1$ .

Если стороны пластины  $y=0$ ,  $y=1$  свободно оперты, то, как видно из таблицы, выигрыш в полной энергии конструкции почти не меняется по сравнению с пластиной, защемленной по всему контуру. То же самое можно сказать и о характере распределений размеров поперечного сечения ребра и его жесткостей; т. е. выигрыш при оптимальном распределении материала ребра, по-видимому, не слишком чувствителен по отношению к типу условий закрепления пластины. Заметим, однако, что при этом варианте граничных условий энергия самого ребра в результате оптимизации уменьшается гораздо сильнее.

*Примечание.* При выводе необходимых условий (1.2) предполагалось, что при переменных размерах  $g(x)$ ,  $h(x)$  справедлива формула (3.3) для крутильной жесткости. Для этого, в свою очередь, требуется, чтобы интервалы  $[g_1, g_2]$ ,  $[h_1, h_2]$  и скорости изменения размеров вдоль ребра были не слишком велики.

По полученным оптимальным распределениям управлений видно, что в большинстве вариантов они удовлетворяют этим требованиям, за исключением концевых зон, где достигается значение  $g/h \approx 0,5$  и значение  $c(x)$  по (3.3) завышено. Этот локальный эффект не сильно влияет на результаты оптимизации, так как по оценкам [8, 10] можно заключить, что, например, для конических стержней с углом раствора конуса в  $30^\circ$  отношение верхней (элементарной) оценки для  $c(x)$  типа (3.3) к нижней (точной) равно 0,82, для угла в  $45^\circ$  — 0,6. Еще одним доводом в пользу применения простой формулы для  $c(x)$  служит сравнительно слабое влияние крутильной жесткости на функционал при защемлении пластины по внешнему контуру.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев: Наукова думка, 1964. 384 с.
2. Bronowicki A. J., Nelson R. B., Felton L. P., Schmit L. A. Optimization of ring cylindrical shells.— AIAA Journal, 1975, v. 13, No. 10, p. 1319.
3. Simitsev G. J. Optimal vs the stiffened circular plate.— AIAA Journal, 1973, v. 11, No. 10, p. 1409.
4. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Задачи оптимизации с локальными критериями качества в теории изгиба пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 124.
5. Баничук Н. П., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Численное решение двумерных задач оптимизации упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 68.

6. Картвелишвили В. М. Численное решение двух контактных задач для упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 68.
7. Мухамедиев Ш. А., Никитин А. В., Юнга С. Л. Применение модифицированного метода локальных вариаций к задачам нелинейной механики разрушения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 76.
8. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
9. Самсонов А. М. Необходимые условия оптимальности распределения жесткостей на упругой пластине.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 136.
10. Reissner E. On bounds for the torsional stiffness of shafts of varying circular cross-section.— J. Elasticity, 1978, v. 8, No. 2, p. 221.

Москва

Поступила в редакцию  
29.IV.1980