МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1981

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ В МЕТОДЕ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

ШМАКОВ В. П.

Прием, упрощающий применение метода Бубнова – Галеркина к решению краевых задач для самосопряженных дифференциальных операторов в обыкновенных производных предложен в работе [1]. Суть его заключается в том, что решение задачи можно искать в виде разложения по координатным функциям, которые могут не удовлетворять граничным условиям. Невязка в граничных условиях устраняется введением корректирующих функций. Такой прием позволил получить решение ряда сложных задач [2, 3]. Однако процесс выбора корректирующих функций в [1] не исследован, что затрудняет его дальнейшее применение.

В данной работе дается видоизменение этого приема и указывается метод построения корректирующих функций. Введение корректирующих функций для устранения невязки в граничных условиях аналогично введению сглаживающих функций при улучшении сходимости функциональных рядов по методу А. Н. Крылова [4], который для решения краевых задач применялся многими авторами, например [5, 6].

1. Рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения вида

$$Lu-\lambda u=0 \tag{1.1}$$

Здесь L — линейный самосопряженный дифференциальный оператор в обыкновенных производных порядка $2n$, $n\geqslant1$.

Будем предполагать, что граничные условия линейны и могут быть записаны в виде

$$M_j(u)=a_{0,j}u+a_{1,j}u'+\ldots+a_{2n-1,j}u^{(2n-1)}=0 \tag{1.2}$$

причем половина из этих условий задана при $x=a$, другая — при $x=b$.

Так как оператор L самосопряженный, то вид граничных условий (1.2), т. е. вид граничных операторов M_j, может быть определен из формулы Грина [7, 8]

$$\int_a^b L(u)v\,dx=\sum_{j=0}^{2n-1} M_j(u)M_{2n-1-j}(v)\,\Big|_a^b+\int_a^b uL(v)\,dx \tag{1.3}$$

Наряду с краевой задачей (1.1), (1.2) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$L\varphi-\sigma\varphi=0 \tag{1.4}$$

$$M_l(\varphi)=a_{0,l}\varphi+a_{1,l}\varphi'+\ldots+a_{2n-1,l}\varphi^{(2n-1)}=0$$

Будем считать, что решение задачи (1.4) известно, т. е. известны собственные значения σ_k и соответствующие им собственные функции $\varphi_k(x)$. Задачу (1.4), отличающуюся от исходной лишь видом граничных условий, в дальнейшем будем называть базовой, при этом будем считать, что вид граничных операторов базовой задачи также является следствием формулы Грина (1.3). Так как оператор L является самосопряженным, то его собственные функции ортогональны [9]. Если, кроме того, считать их ортонормированными, то условия ортогональности для $\varphi_k(x)$ можно записать в виде

$$\int_a^b \varphi_k\varphi_m\,dx=0 \text{ при } m\neq k, \quad \int_a^b \varphi_k\varphi_m\,dx=1 \text{ при } m=k$$
$$\int_a^b L(\varphi_k)\varphi_m\,dx=0 \text{ при } m\neq k, \quad \int_a^b L(\varphi_k)\varphi_m\,dx=\sigma_k \text{ при } m=k \tag{1.5}$$

Некоторые граничные условия базовой задачи могут совпадать с граничными условиями исходной задачи. В дальнейшем для простоты и наглядности изложения положим, что базовая задача отличается от исходной лишь одним граничным условием. Пусть это будет граничное условие, соответствующее равенству

$$M_i[u(b)]=0 \tag{1.6}$$

Решение краевой задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде

$$u(x)=cf(x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \tag{1.7}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая функция, c — произвольная постоянная, позволяющая удовлетворить несовпадающему граничному условию (1.6), которое после подстановки в него (1.7) примет вид

$$cM_i[f(b)]+\sum_{k=1}^{\infty}a_kM_i[\varphi_k(b)]=0 \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) содержит неизвестные коэффициенты a_k; для их определения воспользуемся обобщенными уравнениями Бубнова — Галеркина [10]

$$\int_a^b [L(u)-\lambda u]\varphi_k\,dx=0 \qquad (k=1,2\ldots) \tag{1.9}$$

После подстановки в них (1.7) и использования условий ортогональности (1.5) они принимают вид

$$c\int_a^b [L(f)-\lambda f]\varphi_k\,dx+(\sigma_k-\lambda)a_k=0 \tag{1.10}$$

Рассмотрим следующий интеграл и преобразуем его с помощью формулы Грина (1.3):

$$\int_a^b f\varphi_k\,dx=\frac{1}{\sigma_k}\int_a^b fL(\varphi_k)\,dx=\frac{1}{\sigma_k}\sum_{j=0}^{2n-1}M_j(\varphi_k)M_{2n-1-j}(f)\Big|_a^b+\frac{1}{\sigma_k}\int_a^b L(f)\varphi_k dx \tag{1.11}$$

Выражение (1.11) позволяет сформулировать задачу для выбора функции $f(x)$, однако здесь требуется рассмотреть два случая: базовая задача не имеет нулевых собственных значений; базовая задача имеет нулевое собственное значение кратности p.

Рассмотрим первый случай. Выберем $f(x)$ как решение краевой задачи

$$L(f)=0,\quad M_j(f)=0\quad {\scriptstyle (j=0,1,2,\ldots,2n-1;\ j\neq i)},\quad M_{2n-1-i}[f(b)]=1 \tag{1.12}$$

которая для функции $f(x)$ разрешима и имеет единственное решение [7, 8]. Если $f(x)$ — решение задачи (1.12), то соотношение (1.11) примет вид

$$\int_a^b f\varphi_k\,dx=\frac{1}{\sigma_k}M_i[\varphi_k(b)] \tag{1.13}$$

С учетом (1.13) из (1.10) получим следующие выражения для коэффициентов a_k:

$$a_k=c\frac{\lambda}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}M_i[\varphi_k(b)] \tag{1.14}$$

Исключая a_k из (1.8) и полагая $c\neq 0$, получим уравнение для определения собственных значений исходной задачи (1.1), (1.2):

$$M_i[f(b)]+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_i^2[\varphi_k(b)]}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}=0 \tag{1.15}$$

а из (1.7) — выражение для собственных функций

$$u(x)=c\left\{f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_i[\varphi_k(b)]\varphi_k(x)}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}\right\} \tag{1.16}$$

Если предположить, что собственные значения базовой задачи асимптотически ведут себя как $\sigma_k\sim k^{2n}$ (для многих задач такая асимптотика выполняется [11, 12]), то из (1.16) непосредственно следует для коэффициента при $\varphi_k(x)$ оценка

$$M_i[\varphi_k(b)]/\sigma_k(\sigma_k-\lambda)\sim O(k^{-4n+\alpha}) \tag{1.17}$$

Здесь α — порядок оператора M_i; так как α не превышает $2n-1$, то из (1.17) следует, что соответствующие ряды сходятся как ряды, общий член которых имеет вид $S_n=Ak^{-2n-1}$, т. е. действительно имеет место равномерная сходимость решения и его производных до порядка оператора.

Сопоставим результаты, полученные по предлагаемому методу, с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа [13—15], который достаточно широко применяется для решения аналогичных задач. В соответствии с этим методом решение ищется в виде

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \tag{1.18}$$

где коэффициенты a_k должны удовлетворять условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kM_i[\varphi_k(b)]=0 \tag{1.19}$$

Полагая, что в соответствии с видом оператора L можно составить выражение для кинетической и потенциальной энергий, для определения a_k получим уравнение (μ — неопределенный множитель Лагранжа)

$$(\sigma_k-\lambda)a_k=\mu M_i[\varphi_k(b)] \tag{1.20}$$

Из (1.18) — (1.20) для определения собственных значений и собственных функций исходной задачи получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_i^2[\varphi_k(b)]}{\sigma_k-\lambda}=0,\qquad u(x)=\mu\sum_{k=1}\frac{M_i[\varphi_k(b)]\varphi_k(x)}{\sigma-\lambda} \tag{1.21}$$

Оценки вида (1.17) для данного случая показывают, что метод неопределенных множителей Лагранжа может привести к расходящимся рядам в зависимости от вида граничного оператора M_i, в то время как изложенный выше метод от этих условий не зависит. Если заметить, что $f(x)$ — решение задачи (1.12) — представляет сумму следующего ряда, что следует из (1.13)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma}M_i[\varphi_k(b)]\varphi_k(x) \tag{1.22}$$

то формальное применение метода улучшения сходимости А. Н. Крылова приводит к выражениям (1.15), (1.16).

Рассмотрим второй случай, когда среди собственных значений базовой задачи имеется нулевое собственное значение кратности p. Собственные функции, соответствующие нулевому собственному значению, обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, собственные функции базовой задачи, отвечающие ненулевым собственным значениям,— через φ_{p+k} $(k=1, 2, \ldots, \infty)$; будем считать их также ортонормированными.

Решение исходной задачи будем искать в виде

$$u(x)=cf(x)+\sum_{k=1}^{p}a_k\varphi_k(x)+\sum_{k=p+1}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \tag{1.23}$$

Из уравнений метода Бубнова — Галеркина имеем

$$\begin{aligned}&-\lambda a_k+c\int_a^b[L(f)-\lambda f]\varphi_k\,dx=0 \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}\\ &(\sigma_k-\lambda)a_k+c\int_a^b[L(f)-\lambda f]\varphi_k\,dx=0 \quad {\scriptstyle (k=p+1,p+2,\ldots)}\end{aligned} \tag{1.24}$$

Выберем $f(x)$ как решение краевой задачи

$$\begin{aligned}&L(f)=A_1\varphi_1+A_2\varphi_2+\ldots+A_p\varphi_p,\quad M_j(f)=0 \quad {\scriptstyle (j=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,2n-1,\ j\neq i)},\\ &M_{2n-1-i}[f(b)]=1\end{aligned} \tag{1.25}$$

Константы A_k определим из условий

$$\int_a^b f\varphi_k\,dx=0 \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)} \tag{1.26}$$

Можно показать [7, 8], что краевая задача (1.25) с дополнительными условиями (1.26) разрешима и имеет единственное решение. С учетом выбора функции $f(x)$ и соотношения $L\varphi_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, p)$ уравнения (1.24) приводятся к виду

$$a_k=\frac{A_k}{\lambda}c \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)},\qquad a_k=c\frac{\lambda M_i[\varphi_k(b)]}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)} \quad {\scriptstyle (k=p+1,p+2,\ldots)} \tag{1.27}$$

Исключая a_k из (1.23), получим

$$u(x)=c\left\{f(x)+\sum_{k=1}^{p}\frac{A_k\varphi_k(x)}{\lambda}+\lambda\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{M_i[\varphi_k(b)]\varphi_k(x)}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}\right\} \tag{1.28}$$

а граничное условие (1.6) дает следующее уравнение для собственных значений исходной задачи:

$$M_i[f(b)]+\sum_{k=1}^{p}\frac{A_k}{\lambda}M_i[\varphi_k(b)]+\lambda\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{M_i^2[\varphi_k(b)]}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}=0$$

Выше был рассмотрен случай, когда исходная и базовая задачи отличались невязкой лишь в одном граничном условии. Нетрудно обобщить изложенный выше метод, когда невязка имеет место в большем числе граничных условий. Очевидно, это можно сделать двумя способами. Первый заключается в том, что рассматривается последовательность базовых задач, различающихся невязкой лишь в одном граничном условии и приближающихся к исходной задаче, другой состоит в устранении сразу всех невязок. Ограничимся для простоты изложения случаем, когда базовая задача отличается от исходной двумя невязками в граничных условиях, т. е. в базовой задаче не выполняются следующие условия исходной задачи:

$$M_i[\varphi_k(b)]\neq 0,\qquad M_\nu[\varphi_k(b)]\neq 0 \tag{1.29}$$

В этом случае решение исходной задачи, как и в работе [1], следует искать в виде

$$u(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \tag{1.30}$$

Граничные условия (1.29) приводят к следующим уравнениям для определения постоянных c:

$$\begin{gathered}c_1M_i[f_1(b)]+c_2M_i[f_2(b)]+\sum_{k=1}^{\infty}a_kM_i[\varphi_k(b)]=0\\ c_1M_\nu[f_1(b)]+c_2M_\nu[f_2(b)]+\sum_{k=1}^{\infty}a_kM_\nu[\varphi_k(b)]=0\end{gathered} \tag{1.31}$$

Ограничиваясь случаем, когда собственные значения базовой задачи отличны от нуля, выберем корректирующие функции $f(x)$ как решение следующих краевых задач:

$$L(f_1)=0,\ M_j(f_1)=0\quad {\scriptstyle (j=1,2,\,\ldots\,,\,2n-1;\ j\neq i)},\qquad M_{2n-1-i}[f_1(b)]=1$$

$$L(f_2)=0,\ M_j(f_2)=0\quad {\scriptstyle (j=1,2,\,\ldots\,,\,2n-1;\ j\neq \nu)},\qquad M_{2n-1-\nu}[f_2(b)]=1$$

Аналогично, как и выше, для коэффициентов a_k получим

$$a_k=\frac{\lambda M_i[\varphi_k(b)]}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}c_1+\frac{\lambda M_\nu[\varphi_k(b)]}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}c_2 \tag{1.32}$$

Подстановка (1.32) в граничные условия приводит к следующей системе уравнений:

$$Q_{11}c_1+Q_{12}c_2=0,\quad Q_{21}c_1+Q_{22}c_2=0,\quad Q_{11}=M_i[f_1(b)]+\Gamma_i$$

$$Q_{22}=M_\nu[f_2(b)]+\Gamma_\nu,\quad Q_{12}=M_i[f_2(b)]+\Gamma_{i\nu},\quad Q_{21}=M_\nu[f_1(b)]+\Gamma_{i\nu}$$

$$\Gamma_i=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_i^2[\varphi_k(b)]}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)},\qquad \Gamma_{i\nu}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_i[\varphi_k(b)]M_\nu[\varphi_k(b)]}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}$$

Из равенства нулю определителя системы получим уравнение для определения собственных значений исходной задачи.

При определенных предположениях полученные результаты можно распространить и на уравнение вида $Lu-\lambda Bu=0$.

2. Рассмотрим дальнейшее улучшение сходимости разложений собственных функций исходной задачи через собственные функции базовой задачи. Покажем, что специальным выбором корректирующих функций можно получить улучшение сходимости. Ограничимся случаем, когда невязка имеет место в одном граничном условии и когда базовая задача не имеет нулевых собственных значений.

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=f_0(x)+\lambda f_1(x)+\ldots+\lambda^\alpha f_\alpha(x) \tag{2.1}$$

Выберем функции $f_\alpha(x)$ как решение следующей рекуррентной последовательности краевых задач:

$$\begin{gathered} Lf_0=0,\ M_j(f_0)=0\quad {\scriptstyle(j=0,1,2,\ \ldots\ ,\ 2n-1;\ j\neq i)},\qquad M_{2n-1-i}[f_0(b)]=1\\ Lf_\beta=f_{\beta-1},\ M_j(f_\beta)=0\quad {\scriptstyle(j=0,1,2,\ \ldots\ ,\ 2n-1;\ \beta=1,2,\ \ldots\ ,\ \alpha)} \end{gathered} \tag{2.2}$$

В результате такого выбора корректирующей функции выражения для коэффициентов (1.14) a_k приводятся к виду

$$a_k=c\frac{M_i[\varphi_k(b)]}{(\sigma_k-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{\alpha+1} \tag{2.3}$$

а частотное уравнение (1.15) принимает форму

$$M_i[f(b)]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_i^2[\varphi_k(b)]}{(\sigma_k-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^{\alpha+1}=0 \tag{2.4}$$

Докажем соотношение (2.3). Для этого вычислим

$$J=\int_a^b[L(f)-\lambda f]\varphi_k\,dx=\int_a^b\left[\sum_{\beta=0}^{\alpha}\lambda^\beta L(f_\beta)-\sum_{\beta=0}^{\alpha}\lambda^{\beta+1}f_\beta\right]\varphi_k\,dx$$

Учитывая, что функции $f_\beta(x)$ являются решением краевых задач (2.2), преобразуем выражение для J к виду

$$J=\int_a^b\left(\sum_{\beta=1}^{\alpha}\lambda^\beta f_{\beta-1}-\sum_{\beta=0}^{\alpha}\lambda^{\beta+1}f_\beta\right)\varphi_k\,dx=\lambda^{\alpha+1}\int_a^b f_\alpha\varphi_k\,dx \tag{2.5}$$

Так как $\varphi_k=L(\varphi_k)/\sigma_k$, то согласно (1.3):

$$\int_a^b f_\alpha\varphi_k dx=\frac{1}{\sigma_k}\sum_{j=0}^{2n-1}M_j(\varphi_k)M_{2n-1-j}(f_\alpha)\,|_a^b+\frac{1}{\sigma_k}\int_a^b L(f_\alpha)\,\varphi_k dx \tag{2.6}$$

Поскольку φ_k и f_α удовлетворяют таким граничным условиям, при которых произведения вида $M_j(\varphi_k)M_{2n-1-j}(f_\alpha)$ обращаются в нуль, то все внеинтегральные члены в (2.6) равны нулю, что приводит к следующему соотношению:

$$\int_a^b f_\alpha\varphi_k dx=\frac{1}{\sigma_k}\int_a^b L(f_\alpha)\,\varphi_k dx=\frac{1}{\sigma_k}\int_a^b f_{\alpha-1}\varphi_k dx$$

Применяя этот процесс дальше и учитывая (1.13), получим

$$\int_a^b f_\alpha \varphi_k dx = \frac{1}{\sigma_k{}^\alpha} \int_a^b f_\alpha \varphi_k dx = \frac{1}{\sigma_k^{\alpha+1}} M_i[\varphi_k(b)] \tag{2.7}$$

Таким образом, с учетом (2.5), (2.7) для J получим

$$J = (\lambda/\sigma_k)^{\alpha+1} M_i[\varphi_k(b)] \tag{2.8}$$

Из (2.8) непосредственно следует (2.3). Отметим важную формулу суммирования, вытекающую из (2.8)

$$f_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_i[\varphi_k(b)]\varphi_k(x)}{\sigma_k^{\alpha+1}} \tag{2.9}$$

Таким образом, представление корректирующей функции в форме (2.1) позволяет улучшать сходимость разложений собственных функций исходной задачи через собственные функции базовой задачи.

3. В качестве иллюстрации изложенного подхода рассмотрим простейшую краевую задачу

$$Lu = \lambda u, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \tag{3.1}$$

Формула Грина (1.3) для оператора $L = -d^2/dx^2$ принимает вид

$$\int_0^1 L(u) v dx = M_0(u) M_1(v)|_0^1 - M_1(u) M_0(v)|_0^1 + \int_0^1 u L(v) dx \tag{3.2}$$

$$M_0 = -d/dx, \quad M_1 = 1$$

Таким образом, граничные условия (3.1) можно записать в форме

$$M_1(u) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad M_0(u) = 0 \quad \text{при} \quad x = 1 \tag{3.3}$$

В качестве собственных функций базовой задачи выберем собственные функции φ_k оператора L, соответствующие граничным условиям

$$M_1(\varphi) = \varphi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ 1 \tag{3.4}$$

Собственные функции базовой задачи и соответствующие им собственные значения равны

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x, \quad \sigma_k = (k\pi)^2 \tag{3.5}$$

Так как базовая задача не имеет нулевых собственных значений, то краевая задача (1.12) для корректирующей функции примет вид

$$Lf = 0, \quad M_1(f) = f(0) = 0, \quad M_0(f) = -f'(1) = 1 \tag{3.6}$$

Решение задачи (3.6) имеет вид $f(x) = -x$. В этом случае коэффициенты

$$a_k = c\lambda \varphi_k'(1)/\sigma_k(\sigma_k - \lambda) \tag{3.7}$$

Граничные условия для исходной задачи при $x = 1$ после подстановки в них (1.7) дают

$$cf'(1) + \sum_{k=1} a_k \varphi_k'(1) = 0 \tag{3.8}$$

Исключая a_k из (3.8) и приравнивая нулю коэффициент при c, получим уравнение для собственных значений исходной задачи

$$-1 + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\varphi_k'(1)]^2}{\sigma_k(\sigma_k - \lambda)} = 0 \quad \text{или} \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{(\lambda - \sigma_k)} = 0 \tag{3.9}$$

Если положить $f(x)=f_0(x)+\lambda f_1(x)$, то $f_1(x)$ в соответствии с (2.3) будет решение задачи

$$Lf_1=-x,\ M_1(f_1)=f_1=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ 1$$

В этом случае для a_k получаем выражение

$$a_k=c\lambda^2\varphi_k'(1)/\sigma_k^2(\sigma_k-\lambda)$$

и уравнение для определения собственных значений исходной задачи принимает вид

$$-1+\frac{\lambda}{3}+2\lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_k(\sigma_k-\lambda)}=0$$

Если формально следовать методу неопределенных множителей Лагранжа, то оказывается, что соответствующий ряд (3.9) для частотного уравнения получится расходящимся.

4. В качестве следующих примеров, подтверждающих возможности изложенного метода, рассмотрим задачу о представлении динамических характеристик (форм, частот колебаний) упругой системы с внешними связями через соответствующие характеристики этой же системы без связей. Эта задача рассматривалась в работах [14—16], в основу которых положен метод неопределенных множителей Лагранжа. Покажем решение этой задачи на примере продольных колебаний стержня.

Допустим, что требуется определить частоты и формы колебаний стержня длины l с упругими связями, приложенными в сечениях $x=x_k$. Уравнения рассматриваемой задачи имеют вид [17]

$$\frac{d}{dx}\left(EF\frac{du}{dx}\right)+m\omega^2u=0$$

$$EF\frac{du}{dx}\Big|_{x_k-0}^{x_k+0}=c_ku(x_k),\quad EF\frac{du}{dx}=0 \quad \text{при} \quad x=0,l \tag{4.1}$$

где EF, m — погонные жесткость и масса, c_k — жесткость упругой связи в сечении $x=x_k$ $(k=1, 2, \ldots, N)$.

В качестве собственных функций базовой задачи примем формы свободных колебаний стержня без связей $(c_k=0)$.

Решение задачи (4.1) будем искать в виде

$$u(x)=\sum_{m=1}^{N}A_mf_m(x)+s_0+\sum_{j=1}^{\infty}s_j\varphi_j(x) \tag{4.2}$$

Здесь $f_m(x)$ — корректирующие функции, $\varphi_j(x)$ — формы колебаний стержня без связей, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$\int_0^l m\varphi_i\varphi_jdx=0,\quad \int_0^l\frac{d}{dx}\left(EF\frac{d\varphi_i}{dx}\right)\varphi_jdx=0$$

$$\int_0^l m\varphi_j^2dx=a_j,\quad \int_0^l\frac{d}{dx}\left(EF\frac{d\varphi_j}{dx}\right)\varphi_jdx=-a_j\sigma_j^2$$

В рассматриваемом случае базовая задача имеет нулевое собственное значение $\sigma_0=0$, соответствующую ему собственную функцию обозначим через $\varphi_0=1$.

Уравнения (1.10) для определения коэффициентов s_j применительно к рассматриваемому случаю примут вид

$$\sum_{m=1}^{N} A_m[(Lf_m, \varphi_0)+\omega^2(mf_m, \varphi_0)]+a_0\omega^2 s_0=0$$

$$\sum_{m=1}^{N} A_m[(Lf_m, \varphi_j)+\omega^2(mf_m, \varphi_j)]+a_j(\omega^2-\sigma_j^2)=0 \quad (j=1,2,\cdots) \tag{4.3}$$

$$L=\frac{d}{dx}\left(EF\frac{d}{dx}\right), \quad (Lf_m, \varphi_j)=\int_0^l L(f_m)\varphi_j dx, \quad a_j=\int_0^l m\varphi_j^2 dx$$

Из граничных условий при $x=x_k$ имеем

$$\sum_{m=1}^{N} A_m EF\frac{df_m}{dx}\Bigg|_{x_k-0}^{x_k+0}=c_k\left[\sum_{m=1}^{N} A_m f_m(x_k)+\sum_{j=0}^{\infty} s_j\varphi_j(x_k)\right] \tag{4.4}$$

Выберем функции $f(x)$ (в соответствии с изложенным выше) как решение краевой задачи

$$Lf_m=-m(x)\varphi_0(x) \tag{4.5}$$

$$f_m'=0 \quad \text{при} \quad x=0, l; \quad f_m(x_m-0)=f_m(x_m+0), \quad \int_0^l mf_m dx=0$$

Отметим, что как следствие (4.5)

$$EF\frac{df_m}{dx}\Bigg|_{x_m-0}^{x_m+0}=a_0, \quad a_0=\int_0^l m(x)\,dx \tag{4.6}$$

Краевая задача (4.5) разрешима и имеет единственное решение, в случае $m=1$, $EF=1$, $l=1$ это решение имеет вид

$$f_k(x)=\begin{cases} {}^1/_2(x^2+x_k^2)-(x_k-{}^1/_3) & (0\leqslant x\leqslant x_k-0) \\ {}^1/_2(x^2+x_k^2)-(x-{}^1/_3) & (x_k+0\leqslant x\leqslant l) \end{cases}$$

С учетом (4.5) из (4.3) следует

$$s_0=-\frac{1}{\omega^2}\sum_{m=1}^{N} A_m, \quad s_j=\frac{a_0\omega^2}{a_j\sigma_j^2(\omega^2-\sigma_j^2)}\sum_{m=1}^{N} A_m\varphi_j(x_m) \tag{4.7}$$

Уравнения (4.4) с учетом (4.7) примут вид

$$a_0A_k+c_k\sum_{m=1}^{N} Q_{km}A_m=0 \quad (k=1,2,\cdots,N)$$

$$Q_{km}=f_m(x_k)+\frac{1}{\omega^2}+a_0\omega^2\sum_{j=1} \frac{\varphi_j(x_k)\varphi_j(x_m)}{a_j\sigma_j^2(\omega^2-\sigma_j^2)} \tag{4.8}$$

Приравнивая нулю определитель системы (4.8), получим уравнение для определения частот стержня со связями. В случае $m=1$, $EF=1$, $l=1$, $k=1$, $x_1=0$, $c_1=\infty$, $\varphi_j(0)=1$ частотное уравнение приводится к виду $\cos\omega=0$ или $\omega_j={}^1/_2(2j-1)\pi$, что дает точное решение задачи.

К рассмотренной выше задаче можно применить процесс улучшения сходимости, для чего $f_m(x)$ будем искать в форме

$$f_m(x)=f_{m0}(x)+\lambda f_{m1}(x)+\ldots+\lambda^\alpha f_{m\alpha}(x), \quad \lambda=\omega^2$$

Функции $f_{m\beta}(x)$ определяются из следующей рекуррентной последовательности неоднородных задач:

$$Lf_{m\beta}=-m(x)f_{m\beta-1}$$

$$f_{m\beta}'=0 \quad \text{при} \quad x=0,l; \quad f_{m\beta}|_{x_m-0}^{x_m+0}=0, \quad \int_0^l mf_{m\beta}dx=0$$

В этом случае для коэффициентов разложения s_0, s_j имеем

$$s_0=\frac{1}{\omega^2}\sum_{m=1}^{N}A_m, \quad s_j=\frac{a_0}{a_j(\omega^2-\sigma_j^2)}\left(\frac{\omega^2}{\sigma_j^2}\right)^{\alpha+1}$$

5. На примере продольных колебаний стержня решим задачу об определении форм и частот колебаний упругой системы по заданным формам и частотам ее элементов [18—20]. Как правило, в основу ее решения положен метод неопределенных множителей Лагранжа. Для простоты ограничимся случаем, когда стержень длины l разбит на две части сечением $x=a$. Для определенности предположим, что формы и частоты колебаний отдельных элементов известны для случая свободных концов. Обозначим их через σ_j, $\varphi_j(x)$ и Ω_n, ψ_n. Соответствующие краевые задачи для φ_j и ψ_n имеют вид

$$\begin{aligned} &L\varphi+m\sigma^2\varphi=0, \quad \varphi'(0)=\varphi'(a)=0 \\ &L\psi+m\Omega^2\psi=0, \quad \psi'(a)=\psi'(l)=0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

В дальнейшем будем полагать, что σ_j и Ω_n не совпадают с собственными частотами исходной задачи.

Краевая задача для определения собственных частот и форм колебаний всего стержня имеет вид

$$Lu+m\omega^2u=0, \quad u'(0)=u'(l) \tag{5.2}$$

Решение задачи (5.2) будем искать в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} &u(x)=c_1f_1(x)+s_0+\sum_{j=1}^{\infty}s_j\varphi_j(x), \quad 0\leqslant x\leqslant a-0 \\ &u(x)=c_2f_2(x)+q_0+\sum_{j=1}^{\infty}q_n\psi_n(x), \quad a+0\leqslant x\leqslant l \end{aligned} \tag{5.3}$$

В сечении $x=a$ для всего стержня должны выполняться условия непрерывности усилий и перемещений. Полагая EF непрерывный при $x=a$, эти условия запишем в виде

$$u(a-0)=u(a+0), \quad u'(a-0)=u'(a+0) \tag{5.4}$$

Подстановка (5.3) в (5.4) приводит к следующим уравнениям для определения c_i:

$$\begin{aligned} &c_1f_1(a)+s_0+\sum_{j=1}^{\infty}s_j\varphi_j(a)=c_2f_2(a)+q_0+\sum_{n=1}^{\infty}q_n\psi_n(a) \\ &c_1f_1'(a)=c_2f_2'(a) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Коэффициенты s_j и q_n определим из уравнений

$$\int_0^a (Lu+m\omega^2 u)\varphi_j dx=0 \quad (j=0,1,2,\ldots),$$
$$\int_a^l (Lu+m\omega^2 u)\psi_n dx=0 \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{5.6}$$

Выберем функции $f_i(x)$ как решение следующих краевых задач:

$$Lf_1=-m(x)\varphi_0(x), \quad f_1'(0)=0, \quad \int_0^a mf_1 dx=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a-0$$
$$Lf_2=-m(x)\varphi_0(x), \quad f_2(l)=0, \quad \int_a^l mf_2 dx=0, \quad a+0\leqslant x\leqslant l \tag{5.7}$$

В этом случае с учетом свойств ортогональности для $\varphi_j(x)$ и $\psi_n(x)$ из уравнений (5.6) для определения s_j и q_n получим следующие соотношения:

$$s_0=\frac{c_1}{\omega^2}, \quad s_j=\frac{\omega^2 a_0^{(1)}\varphi_j(a)}{a_j^{(1)}\sigma_j^2(\omega^2-\sigma_j^2)}c_1, \quad a_j^{(1)}=\int_0^a m(x)\varphi_j^2 dx$$
$$q_0=\frac{c_2}{\omega^2}, \quad q_n=-\frac{\omega^2 a_0^{(2)}\psi_n(a)}{a_n^{(2)}\Omega^2(\omega^2-\Omega_n^2)}c_2, \quad a_n^{(2)}=\int_a^l m(x)\psi_n^2 dx \tag{5.8}$$

И граничных условий (5.5) с учетом (5.8) следует уравнение для определения частот колебаний всей системы

$$f_1(a)-\gamma f_2(a)+\frac{1-\gamma}{\omega^2}+\omega^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_0^{(1)}\varphi_j^2(a)}{a_j^{(1)}\sigma_j^2(\omega^2-\sigma_j^2)}+$$
$$+\omega^2\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0^{(2)}\psi_n^2(a)}{a_n^{(2)}\Omega_n^2(\omega^2-\Omega_n^2)}=0, \quad \gamma=\frac{f_1'(a)}{f_2'(a)} \tag{5.9}$$

Если частоты ω определены из уравнения (5.9), то формы колебаний определяются согласно (5.3), (5.8). Следует отметить, что уже первое приближение позволяет получить ряды для форм колебаний и их производных, которые сходятся равномерно до порядка оператора включительно. Дальнейшее улучшение сходимости разложений (5.3), (5.9) можно осуществить аналогично изложенному выше.

Сопоставим приведенные результаты с полученными по методу неопределенных множителей Лагранжа.

В соответствии с этим методом решение ищется в форме (5.3), если положить $c_1=c_2=0$. Условие связи имеет вид

$$u(a-0)-u(a+0)=\sum_{j=0}^{\infty}s_j\varphi_j(a)-\sum_{n=0}^{\infty}q_n\psi_n(a)=0 \tag{5.10}$$

Определим коэффициенты s_j и q_n из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\left\{\Pi-T-\lambda\left[\sum_{j=0}^{\infty} s_j\varphi_j(a)-\sum_{n=0}^{\infty} q_n\psi_n(a)\right]\right\}=0 \qquad (5.11)$$

где Π — потенциальная, T — кинетическая энергия системы, λ — неопределенный множитель.

Из (5.11) с учетом условий ортогональности получим уравнения для определения коэффициентов s_j и q_n:

$$s_0=-\frac{\lambda}{a_0^{(1)}\omega^2}, \quad s_j=\lambda\frac{\varphi_j(a)}{a_j^{(1)}(\sigma_j^2-\omega^2)}$$
$$q_0=\frac{\lambda}{a_0^{(2)}\omega^2}, \quad q_n=-\lambda\frac{\psi_n(a)}{a_n^{(2)}(\Omega_n^2-\omega^2)} \qquad (5.12)$$

Из (5.10) после исключения s_j, q_n получаем уравнение для частот колебаний всей системы

$$-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{a_0^{(1)}}+\frac{1}{a_0^{(2)}}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j^2(a)}{a_j^{(1)}(\sigma_j^2-\omega^2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi^2(a)}{a_n^{(2)}(\Omega_n^2-\omega^2)}=0 \qquad (5.13)$$

Например, для стержня постоянного сечения ряды, входящие в (5.9) и (5.13), сходятся соответственно как k^{-4}, k^{-2} $(k=j, n)$. Если, например, для определения квадрата первой частоты колебаний всей системы с заданной точностью необходимо в уравнении (5.13) удерживать N членов, т. е. N форм и частот колебаний каждой из подсистем, то для достижения той же точности для квадрата частоты в уравнении (5.9) необходимо учитывать $N^{1/2}$ членов. Если применить процесс улучшения сходимости, то количество форм колебаний для каждой подсистемы может быть уменьшено. Так, при учете α членов в рекуррентной последовательности корректирующих функций для достижения той же точности необходимо учесть $N^{1/(\alpha+1)}$ частот и форм колебаний каждой подсистемы.

Аналогичные результаты могут быть получены и для более сложных механических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмаков В. П.* Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова — Галеркина к решению краевых задач.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 5, с. 129.
2. *Шмаков В. П.* О колебаниях непологих сферических оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 177.
3. *Шмаков В. П.* Некоторые задачи осесимметричных колебаний сферической оболочки.— В кн.: Исследования по теории сооружений. Вып. 17. М.: Стройиздат, 1969, с. 33.
4. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 398 с.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. *Канторович А. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 695 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
8. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
9. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1957. 476 с.
10. *Петров Г. И.* Применение метода Галеркина в задаче об устойчивости течения вязкой жидкости.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 3, с. 3.

11. *Вибрации в технике*. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
12. *Сансоне Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1, 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 346, 415 с.
13. *Блейх Ф.* Устойчивость металлических конструкций. М.: Физматгиз, 1959. 544 с.
14. *Dowell E. H.* Free vibrations of a linear structure with arbitrary support conditions.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1971, v. 38, No. 3, p. 595.
15. *Шклярчук Ф. Н.* О влиянии сжимаемости жидкости при продольных колебаниях цилиндрического бака.— В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирский электротехн. ин-т, 1973, с. 291.
16. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
17. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Гостехиздат, 1958, 628 с.
18. *Craig R. R., Bampton C. C.* Coupling of substructures for dynamic analyses.— AJAA Journal, 1968, v. 6, No. 7, p. 1313.
19. *Benfield W. A., Hruda R. F.* Vibration analysis of structures by component mode substitution.— AJAA Journal, 1971, v. 9, No. 7, p. 1255.
20. *Kuhar E. J., Stahle C. V.* Dynamic trnsformation method for modal synthesis.— AJAA Journal, 1974, v. 12, No: 5, p. 672.

Москва

Поступила в редакцию
30.III.1979