МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1981

УДК 539.375

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

БОРОДАЧЕВ А. Н.

Ранее были предложены несколько методов решения краевых задач линейной однородной и изотропной теории упругости для неограниченного тела, содержащего плоскую эллиптическую трещину. В результате были найдены законы изменения коэффициентов интенсивности напряжений K_1, K_2 и K_3 вдоль контура такой трещины, соответствующие некоторым простейшим полиномиальным граничным условиям. Однако остался не исследованным вопрос о структуре коэффициентов интенсивности при полиномиальных граничных условиях общего вида.

В публикуемой работе получены общие формулы, устанавливающие закон изменения коэффициентов интенсивности напряжений вдоль контура плоской эллиптической трещины в случае, когда на ее поверхностях задаются нормальные и касательные напряжения, определяемые полиномами произвольной степени. Показано, что при неполиномиальных граничных условиях полученные формулы можно использовать для эффективного приближенного вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. При этом оказалось, что систематическое применение теоремы Дайсона и использование свойств внешних потенциальных факторов эллиптического диска позволяют полностью отказаться от привлечения аппарата эллипсоидальных и эллиптических функций.

1. Краевую задачу для плоской эллиптической трещины будем формулировать используя систему декартовых координат x_1, x_2, x_3 совместно с симметричной формой эллипсоидальных координат ξ, η, ζ [1]. Точки, принадлежащие поверхностям трещины и ее граничному контуру, определяются соответственно соотношениями

$$x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2\leqslant 1,\quad x_3=0^\pm \tag{1.1}$$

$$x_1=a_1\cos\varphi,\quad x_2=a_2\sin\varphi \tag{1.2}$$

где φ — параметрический угол эллипса с полуосями a_1 и a_2 $(a_1\geqslant a_2)$. Значения координат $\xi=0$ и $\eta=0$ отвечают точкам плоскости $x_3=0$, лежащим соответственно внутри и вне эллипса, описываемого параметрическими уравнениями (1.2).

Общий случай полиномиальных граничных условий реализуется, когда на поверхностях трещины действуют напряжения

$$\sigma_{k3}=Q_k(x_1,x_2)\equiv\sum_{m+n=0}^{t} q_{mn}^{(k)}x_1^m x_2^n\quad (k=1,2,3) \tag{1.3}$$

где Q_k — полиномы произвольной степени t $(t=0, 1, 2,\ldots)$ по x_1 и x_2 с известными коэффициентами $q_{mn}^{(k)}$. В [2] показано, что напряжения, действующие на площадках в плоскости $x_3=0$, допускают представление типа

$$\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{x})=\frac{\lambda\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\int\limits_S\frac{U_\beta(\mathbf{x}')\,dS(\mathbf{x}')}{R(\mathbf{x},\mathbf{x}')}-$$

$$-\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\int\limits_S \frac{U_\alpha(\mathbf{x}')\,dS(\mathbf{x}')}{R(\mathbf{x},\mathbf{x}')} \quad (\alpha,\beta=1,2) \tag{1.4}$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{x})=-\frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\int\limits_S \frac{U_3(\mathbf{x}')\,dS(\mathbf{x}')}{R(\mathbf{x},\mathbf{x}')} \tag{1.5}$$

где U_k (k=1, 2, 3) — скачки составляющих вектора перемещений $\mathbf{u}$ при пересечении поверхностей трещины, λ и μ — постоянные Ламе, R — расстояние между точками $\mathbf{x}$, в которых определяются напряжения, и точками $\mathbf{x}'$ любой из поверхностей трещины S, по которым ведется интегрирование. В уравнениях (1.4) предполагается суммирование по повторяющемуся индексу β.

Для того чтобы напряжения σ_{k3} из (1.4) и (1.5) обращались на S в полиномы степени t по x_1 и x_2, скачки перемещений, на основании теоремы Дайсона [3], должны иметь следующий вид:

$$U_k(\mathbf{x}')=\left[1-\left(\frac{x_1'}{a_1}\right)^2-\left(\frac{x_2'}{a_2}\right)^2\right]^{1/2}P_k(x_1',x_2'),\quad P_k(x_1,x_2)=\sum_{m+n=0}^{t}p_{mn}^{(k)}x_1^m x_2^n \tag{1.6}$$

где P_k — полиномы той же степени t по x_1 и x_2, что и Q_k, но с неопределенными пока коэффициентами $p_{mn}^{(k)}$. Требование, чтобы на поверхностях трещины S напряжения σ_{k3} обращались именно в полиномы Q_k, приводит к системам линейных алгебраических уравнений относительно величин $p_{mn}^{(k)}$.

2. Ниже показано, что исходя из (1.4) и (1.5) можно получить универсальные формулы для коэффициентов интенсивности K_1, K_2 и K_3, выявляющие их структуру (т. е. характер зависимости от параметрического угла φ) в случае полиномиальных граничных условий общего вида (1.3). Решающим моментом при этом оказывается использование одного соотношения для так называемых обобщенных внешних потенциальных факторов эллиптического диска

$$B_{m,n,k}(\xi)=\frac{\pi a_1a_2}{2}\int\limits_\xi^\infty \frac{du}{(a_1^2+u)^m(a_2^2+u)^n u^k Q(u)} \tag{2.1}$$

где $Q(u)=[(a_1^2+u)(a_2^2+u)u]^{1/2}$, которое имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}B_{m,n,1}(\xi)=\pi a_1a_2[(a_1^2+\xi)^m(a_2^2+\xi)^nQ(\xi)]^{-1}-\\-(2m+1)B_{m+1,n,0}(\xi)-(2n+1)B_{m,n+1,0}(\xi)\end{gathered} \tag{2.2}$$

и является следствием общих соотношений для потенциальных факторов эллиптического диска[1].

Как известно, для определения коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва K_1 достаточно знать напряжения σ_{33}, действующие на площадках в плоскости $x_3=0$ вне трещины, т. е. при $\eta=0$. Подставляя в (1.5) выражение для U_3 из (1.6) и используя упоминаемую выше теорему Дайсона, находим

$$\sigma_{33}=-\frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2},\quad x_3=0 \tag{2.3}$$

[1] Эти общие соотношения будут рассматриваться в последующих публикациях.

$$\Phi=\frac{\pi a_1 a_2}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{N(u)\,du}{Q(u)}\mathrm{M}P_3(\varepsilon_1 x_1,\varepsilon_2 x_2)$$

$$N(u)=1-x_1^2/(a_1^2+u)-x_2^2/(a_2^2+u)-x_3^2/u$$

$$\mathrm{M}=1+\ldots+\frac{u^n N^n}{4^n(n+1)(n!)^2}D^n+\ldots$$

$$D=\frac{d^2}{\varepsilon_1 dx_1^2}+\frac{d^2}{\varepsilon_2 dx_2^2},\quad \varepsilon_\alpha=\frac{a_\alpha^2}{a_\alpha^2+u}\quad (\alpha=1,2)$$

Представляя далее функцию Φ в виде суммы

$$\Phi=\sum_{k=0}^{r}\Phi_k \tag{2.4}$$

$$\Phi_k=\frac{\pi a_1 a_2}{2\cdot 4^k(k+1)(k!)^2}\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{u^k N^{k+1}(u)\,du}{Q(u)}D^k P_3(\varepsilon_1 x_1,\varepsilon_2 x_2) \tag{2.5}$$

$r=t/2$ при четном t, $r=(t-1)/2$ при нечетном t можно непосредственно проверить, что производные $\partial^2\Phi_k/\partial x_3^2$ $(k=1,2,\ldots,r)$ не дают вклада в K_1. Следовательно, коэффициент интенсивности определяется не суммарным напряжением σ_{33} из (2.3), а лишь его составляющей

$$\sigma_{33}^{\circ}=-\frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_3^2} \tag{2.6}$$

Исходя из (2.5) при $k=0$, находим

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_3^2}=-\pi a_1 a_2\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{P_3(\varepsilon_1 x_1,\varepsilon_2 x_2)\,du}{uQ(u)}+ \tag{2.7}$$

$$+\frac{2\pi(a_1^2+\xi)(a_2^2+\xi)\eta\zeta P_3(\varkappa_1 x_1,\varkappa_2 x_2)}{a_1 a_2(\xi-\eta)(\xi-\zeta)Q(\xi)},\quad \varkappa_\alpha=\frac{a_\alpha^2}{a_\alpha^2+\xi}\quad (\alpha=1,2)$$

При $\eta=0$ второй член в правой части (2.7) сам обращается в нуль. Поэтому, воспользовавшись обозначениями для внешних потенциальных факторов, можно записать

$$\sigma_{33}^{\circ}=\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\sum_{m+n=0}^{t}p_{mn}^{(3)}(a_1^2x_1)^m(a_2^2x_2)^nB_{m,n,1}(\xi),\quad \eta=0 \tag{2.8}$$

После замены переменных x_1, x_2 и ξ в (2.8) их асимптотическими представлениями, справедливыми в окрестности контура трещины [1]:

$$x_1=a_1\cos\varphi+\rho a_2\cos\varphi\Pi_0^{-1/2},\quad x_2=a_2\sin\varphi+\rho a_1\sin\varphi\Pi_0^{-1/2} \tag{2.9}$$

$$\xi=2\rho a_1 a_2\Pi_0^{-1/2},\quad \Pi_0=a_1^2\sin^2\varphi+a_2^2\cos^2\varphi$$

где ρ — расстояние от контура трещины, коэффициент интенсивности K_1 определяется как предел

$$K_1=\lim_{\rho\to 0}(2\rho)^{1/2}\sigma_{33}^{\circ} \tag{2.10}$$

Для осуществления этого предельного перехода необходимо в (2.8) явно выделить при помощи (2.2) особенность типа $\rho^{-1/2}$ в точке $\rho=0$. Из

(2.9) видно, что $\xi\to0$ при $\rho\to0$. Внешние же потенциальные факторы $B_{m,n,0}(\xi)$ при $\xi\to0$ стремятся к некоторым конечным значениям и, следовательно, не дают вклада в K_1. Поэтому на основе (2.2) составляющую нормальных напряжений, определяющую K_1, можно записать в виде суммы

$$\sigma_{33}^*=\frac{a_1a_2\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)Q(\xi)}\sum_{m+n=0}^{t}p_{mn}^{(3)}(\varkappa_1x_1)^m(\varkappa_2x_2)^n,\quad \eta=0 \qquad (2.11)$$

с явно выделенной мультипликативной особенностью типа $\xi^{-1/2}$ (или, что то же самое, $\rho^{-1/2}$) в точке $\xi=0$ ($\rho=0$).

Подставляя теперь асимптотические представления (2.9) в (2.11), а результат — в (2.10), находим

$$K_1=\frac{\mu(a_1a_2)^{-1/2}}{2(1-\nu)}\Pi_0^{1/4}\sum_{m+n=0}^{t}p_{mn}^{(3)}(a_1\cos\varphi)^m(a_2\sin\varphi)^n \qquad (2.12)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Подобные, но несколько более длинные выкладки приводят к аналогичным общим формулам для коэффициентов интенсивности напряжений поперечного и продольного сдвига

$$K_2=\frac{\mu(a_1a_2)^{-1/2}}{2(1-\nu)}\Pi_0^{-1/4}\sum_{m+n=0}^{t}(p_{mn}^{(1)}a_2\cos\varphi+p_{mn}^{(2)}a_1\sin\varphi)(a_1\cos\varphi)^m(a_2\sin\varphi)^n \qquad (2.13)$$

$$K_3=\frac{\mu}{2}(a_1a_2)^{-1/2}\Pi_0^{-1/4}\sum_{m+n=0}^{t}(p_{mn}^{(2)}a_2\cos\varphi-p_{mn}^{(1)}a_1\sin\varphi)(a_1\cos\varphi)^m(a_2\sin\varphi)^n \qquad (2.14)$$

Формулы (2.12)—(2.14) устанавливают общий закон (с точностью до постоянных $p_{mn}^{(k)}$) изменения коэффициентов интенсивности напряжений вдоль контура плоской эллиптической трещины в случае полиномиальных граничных условий (1.3).

3. Как уже отмечалось в п. 1, постоянные $p_{mn}^{(k)}$ находятся из условия, что на поверхностях трещины напряжения σ_{k3} должны обращаться в заданные полиномы Q_k. Для определения фигурирующих в (2.12) коэффициентов $p_{mn}^{(3)}$ достаточно знать лишь нормальные напряжения σ_{33}, действующие на поверхностях трещины, где $\xi=0$.

Устремляя ξ к нулю в правой части (2.3) и опуская громоздкие промежуточные выкладки, приходим к следующей формуле для нормальных напряжений на поверхностях трещины:

$$\sigma_{33}=-\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\sum_{m+n=0}^{t}E_{mn}x_1^mx_2^n,\quad \xi=0 \qquad (3.1)$$

$$E_{mn}=F_{mn}+G_{mn},\quad F_{mn}=2a_1^{2m}a_2^{2n}[(2m+1)B_{m+1,n}^{(0)}+(2n+1)B_{m,n+1}^{(0)}]p_{mn}^{(3)}$$

$$G_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{k}{}' V_{mnij}^{ks}p_{\alpha,j+2s}^{(3)}\quad (\alpha=i+2k-2s),$$

$$B_{m;n}^{(k)}=\frac{\pi a_1 a_2}{2}\int\limits_0^\infty \frac{u^k\,du}{(a_1^2+u)^m(a_2^2+u)^nQ(u)}$$

$$V_{mnij}^{ks}=-\frac{2a_1^{2(i+k-s)}a_2^{2(j+s)}}{4^k(k!)^2}C_k{}^sS_{m-i,\,n-j}^{k}J_{\alpha,\,j+2s}^{ks}B_{\beta,\,\gamma}^{(k-1)}\quad\left(\beta=\frac{m+i}{2}+k-s,\quad\gamma=\frac{n+j}{2}+s\right) \tag{3.2}$$

где $C_k{}^s$ — биномиальные коэффициенты, а постоянные $S_{mn}{}^k$ и $J_{mn}{}^{ks}$ определяются так: $S_{mn}{}^k=0$, если выполняется хотя бы одно из условий

$$m+n>2k,\quad m \text{ — нечетно},\quad n \text{ — нечетно} \tag{3.3}$$

В противном случае

$$S_{mn}^{k}=(-1)^{1/2(m+n)}C_k^{n/2}C_{k-n/2}^{m/2} \tag{3.4}$$

Аналогично, $J_{mn}{}^{ks}=0$, если выполняется хотя бы одно из условий

$$m-2k+2s<0,\quad n-2s<0,\quad m+n>t \tag{3.5}$$

Если же ни одно из условий (3.5) не выполняется, то

$$\begin{gathered} J_{mn}{}^{ks}=m(m-1)\ldots(m-2k+1) \text{ при } s=0 \\ J_{mn}{}^{ks}=n(n-1)\ldots(n-2s+1) \text{ при } k=s \end{gathered} \tag{3.6}$$

В остальных случаях

$$J_{mn}{}^{ks}=m(m-1)\ldots(m-2k+2s+1)n(n-1)\ldots(n-2s+1)$$

Штрих около знака внутренней суммы в выражении для G_{mn} означает, что по s суммируются лишь те члены, для которых

$$1/2(t-j)\geqslant s\geqslant k+1/2(i-t) \tag{3.7}$$

Сравнивая теперь коэффициенты полинома в правой части (3.1) с соответствующими коэффициентами полинома Q_3 из (1.3), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных $p_{mn}^{(3)}$:

$$E_{mn}=-4\pi(1-\nu)\,q_{mn}^{(3)}/\mu \qquad (m+n=0,1,\ldots,t) \tag{3.8}$$

Аналогично, в соответствии с указаниями п. 1, можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $p_{mn}^{(1)}$ и $p_{mn}^{(2)}$.

Очевидно, что содержащиеся в [1, 4—8] результаты являются частными случаями общих формул (2.12)—(2.14), соответствующими некоторым конкретным значениям t. Рассмотрим, например, трещину нормального отрыва и пусть Q_3 будет полиномом первой степени по x_1 и x_2 с коэффициентами

$$q_{0,0}^{(3)}=-q_0,\quad q_{1,0}^{(3)}=-q_1/a_1,\quad q_{0,1}^{(3)}=-q_2/a_2 \tag{3.9}$$

Система (3.8) в этом случае сводится к следующей:

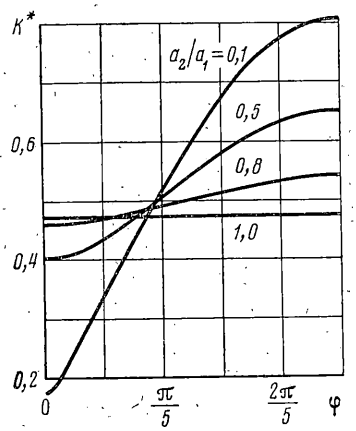
$$\begin{gathered} p_{0,0}^{(3)}=\frac{2a_2(1-\nu)q_0}{\mu E(\theta)},\quad p_{1,0}^{(3)}=\frac{2a_2\theta^2(1-\nu)q_1}{\mu a_1[\theta_1^2K(\theta)+(\theta^2-\theta_1^2)E(\theta)]} \\ p_{0,1}^{(3)}=\frac{2\theta^2(1-\nu)q_2}{\mu[(1+\theta^2)E(\theta)-\theta_1^2K(\theta)]}\quad \theta=\left(1-\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)^{1/2},\quad \theta_1^2=1-\theta^2 \end{gathered} \tag{3.10}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Подставляя (3.10) в (2.12) при $t=1$, получаем известный результат [1, 7]:

$$K_1=\theta_1^{1/2}\Pi_0^{1/4}\left[\frac{q_0}{E(\theta)}+\frac{q_1\theta^2\cos\varphi}{\theta_1^2K(\theta)+(\theta^2-\theta_1^2)E(\theta)}+\frac{q_2\theta^2\sin\varphi}{(1+\theta^2)E(\theta)-\theta_1^2K(\theta)}\right] \qquad (3.11)$$

Заметим, что хотя в (2.12) и фигурируют постоянные μ и ν, фактически K_1 не зависит от упругих свойств материала, о чем, в частности, свидетельствует и формула (3.11). В самом деле, структура системы линейных алгебраических уравнений (3.8) позволяет сразу находить величины $\mu(1-\nu)^{-1}p_{mn}^{(3)}$, поэтому при вычислении K_1 нет необходимости задаваться конкретными значениями упругих постоянных.



4. Если в случае полиномиальных граничных условий формулы (2.12)–(2.14) дают точные значения коэффициентов интенсивности, то при неполиномиальных граничных условиях, когда на поверхностях трещины задаются напряжения $\sigma_{k3}=T_k(x_1, x_2)$, где T_k ($k=1, 2, 3$) – произвольные (достаточно гладкие) функции двух переменных, их можно использовать для эффективного приближенного вычисления указанных величин. Для этого достаточно аппроксимировать определенные в ограниченной области S функции T_k полиномами сравнительно высокой степени.

Ограничимся для простоты рассмотрением трещины нормального отрыва ($T_1=T_2\equiv0$) и пусть

$$T_3(x_1, x_2)=-\sigma\cos(x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2),\quad \sigma=\mathrm{const}>0 \qquad (4.1)$$

Чтобы иметь возможность применить формулу (2.12), запишем

$$\cos\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)\approx\sum_{m+n=0}^{3}t_{mn}x_1^{2m}x_2^{2n} \qquad (4.2)$$

Структура полинома в правой части (4.2) обусловлена четностью функции T_3. Если для определения коэффициентов t_{mn} воспользоваться методом наименьших квадратов, то рассматриваемый полином шестой степени позволяет получить наибольшую относительную ошибку аппроксимации, не превышающую 0,5% для всех приведенных ниже значений отношения a_2/a_1.

На фигуре приведены графики безразмерной величины $K^*=\sigma^{-1}a_2^{-1/2}K_1$ для нагрузки (4.1), отвечающие нескольким значениям отношения a_2/a_1 при $a_1=1$.

В случае, когда $a_2/a_1=1$, плоская эллиптическая трещина вырождается в круговую с радиусом $a_1=1$. Точное значение K^* для круговой трещины, соответствующее нагружению ее поверхностей по закону (4.1), на основании формулы (1.16) из [1], равно

$$K^*=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-u}}\approx0,4773$$

и не зависит от параметрического угла φ. Приближенные же значения K^*, найденные по формуле (2.12), лежат в пределах от 0,4767 до 0,4774. Таким образом, максимальная относительная ошибка вычисления K_1 для круговой трещины по формуле (2.12) не превышает 0,13%. Приблизительно такой же точности вычисления K_1, по-видимому, можно ожидать и для других значений отношения a_2/a_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kassir M. K., Sih G. C.* Mechanics of fracture. V. 2. Three-dimensional crack problems.— Leyden: Noordhoff, 1975. 452 p.
2. *Walpole L. J.* Some elastostatic and potential problems for an elliptical disc.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1970, v. 67, pt. 1, p. 225.
3. *Dyson F. W.* The potentials of ellipsoids of variable densities.— Quart. J. Pure Appl. Math., 1891, v. 25, No. 99, p. 259.
4. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading.— Engng Fract. Mech., 1971, v. 3, No. 1, p. 71.
5. *Smith F. W., Sorensen D. R.* The elliptical crack subjected to nonuniform shear loading.— Trans. ASME. Ser. E, 1974, v. 41, No. 2, p. 502.
6. *Shibuya T.* Some mixed boundary value problems for an infinite solid containing a flat elliptical crack.— Bull. JSME, 1977, v. 20, No. 146, p. 909.
7. *Shail R.* Lame polynomial solutions to some elliptic crack and punch problems.— Internat. J. Engng Sci., 1978, v. 16, No. 8, p. 551.
8. *Sneddon I. N.* The stress intensity factor for a flat elliptical crack in an elastic solid under uniform tension.— Internat. J. Engng Sci., 1979, v. 17, No. 2, p. 185.

Киев

Поступила в редакцию
15.VII.1980