

УДК 539.3 : 551.243

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОФИЛЯ
СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН СЖАТИЯ В СРЕДАХ
С ДИСЛОКАЦИОННЫМ МЕХАНИЗМОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ
РЕЛАКСАЦИИ

ДЫНИН Е. А.

Формулируется общее уравнение для профиля стационарной ударной волны и на его основе проводится анализ различных типов волновых структур. Найдены условия существования и амплитуда внутреннего скачка, построен ряд примеров аналитического решения задачи, обобщающих известные ранее результаты для более простых моделей [1]. Рассмотрено изменение формы волны при вариации дислокационных параметров. Хотя из данных отдельных численных расчетов [2, 3] не удается извлечь значение ширины фронта в конкретных материалах, в публикуемой работе развит эффективный способ определения этой, практически наиболее важной, характеристики процесса. Разработанные методы применены к расчету ширины фронта в алюминии 6061-T6 и армо-железе, благодаря чему удалось для этих веществ интерпретировать ряд фактов, обнаруженных в экспериментах [4, 5].

1. Формулировка основного уравнения. Приведем соотношения, обычно используемые [2, 4, 6, 7] для описания структуры ударных волн в материалах с дислокационной кинетикой упругопластического перехода

$$\dot{\tau} = \mu(\dot{\epsilon} - 2\dot{\epsilon}_p), \quad \tau = \frac{3}{4}[\sigma - P(\epsilon)] \quad (1.1)$$

$$\dot{\epsilon}_p = F, \quad F = bvN \quad (1.2)$$

где σ и ϵ — напряжение и деформация вдоль оси сжатия, ϵ_p и τ — главные компоненты тензоров пластической деформации и касательного напряжения, P — гидростатическое давление (среднее значение главных напряжений), μ — коэффициент, при $\epsilon \ll 1$ совпадающий с модулем сдвига. Релаксационная функция F выражена через вектор Бюргера b , скорость v и плотность N подвижных дислокаций. При $\dot{\epsilon}_p = 0$ реализуется чисто упругий процесс с кривой сжатия $\sigma_i(\epsilon)$, для которой, согласно (1.1)

$$d\sigma_i/d\epsilon = dP/d\epsilon + \frac{4}{3}\mu \quad (1.3)$$

Из (1.1) — (1.3) вытекает компактная форма определяющего соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}[\sigma - \sigma_i(\epsilon)] = -\frac{8\mu}{3}F \quad (1.4)$$

где правая часть зависит не только от текущих значений σ и ϵ , как в обобщенной максвелловской модели [8], но и от предыстории процесса.

Рассмотрим задачу о стационарной ударной волне, идущей со скоростью $D > 0$ из состояния с плотностью ρ_0 , $\epsilon = 0$, $\sigma = \sigma_0$ в состояние с $\sigma = \sigma_1$, $\epsilon = \epsilon_1 > 0$. Здесь и далее нижние индексы (нуль и единица) относятся соответственно к начальному и конечному состоянию в волне. Вводя переменную $\xi = t - x/D$, где t — время, x — координата Лагранжа, проинтегрируем уравнение $\rho_0 \dot{\epsilon}_{ii} = \sigma_{xx}$, что дает

$$\sigma(\xi) = \sigma_0 + \rho_0 D^2 \epsilon(\xi) \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4), получим уравнение

$$[\chi(\varepsilon) - 1] \frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{8\mu}{3\rho_0 D^2} F, \quad \chi = \frac{c_l^2}{D^2}, \quad c_l = \left(\frac{d\sigma_l}{\rho_0^2 d\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

где c_l — лагранжева скорость распространения продольной звуковой волны. Граничные условия имеют вид

$$\varepsilon(\xi = -\infty) = 0, \quad \varepsilon(\xi = +\infty) = \varepsilon_1 \quad (1.7)$$

Так как обычно $(d^2\sigma_l/d\varepsilon^2) > 0$ и функция F непрерывна и неотрицательна, то при $\chi_0 > 1$ реализуется гладкий монотонный профиль. При $\chi_0 < 1$ профиль состоит из скачка от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = \varepsilon_* > 0$ и последующей зоны релаксации, причем ε_* является корнем уравнения $\rho_0 D^2 \varepsilon_* = \sigma_l(\varepsilon_*)$, получающегося при интегрировании (1.4) или (1.6) в окрестности разрыва и использовании (1.5).

Дальнейший анализ требует конкретизации функций, входящих в (1.6). Пусть μ постоянно и

$$P - P_0 = \rho_0 c_0^2 \varepsilon (1 + g\varepsilon), \quad c_0^2 = c_{l0}^2 - 4\mu/3\rho_0 \quad (1.8)$$

где g — константа нелинейности и c_0 — объемная скорость звука. Тогда скорость волны относительно вещества перед фронтом $D = c_0(1 + g\varepsilon_1)^{1/2}$, а из (1.4) следует

$$\tau = \tau_0 + \frac{3}{4} g \rho_0 c_0^2 \varepsilon (\varepsilon_1 - \varepsilon), \quad \varepsilon_p = \frac{3g\rho_0 c_0^2}{8\mu} \varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_*) \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_* = \varepsilon_1 (D^2 - c_{l0}^2) (D^2 - c_0^2)^{-1}, \quad P_0 = \sigma_0 - 4\tau_0 / (3\mu), \quad \varepsilon_{p0} = 0$$

Уравнение (1.6) будет иметь вид

$$(2\varepsilon - \varepsilon_*) \frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{8\mu}{3g\rho_0 c_0^2} F \quad (1.10)$$

и при $\varepsilon_* > 0$ решение содержит скачок от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = \varepsilon_*$.

Отметим, что, поскольку при $\varepsilon \ll 1$ модуль сдвига мало меняется, то приближение постоянного μ , принятое также в [2, 4, 6, 7], может считаться вполне оправданным. Двучленное представление (1.8) анализировалось в [8], где показано, что для металлов погрешность такой аппроксимации ударной адиабаты при $P \leq 10$ ГПа не превышает нескольких процентов. В указанном диапазоне развиваемый подход пригоден для получения количественной информации о профиле, а при больших амплитудах — для качественного описания.

Существенной особенностью упругопластической релаксации в ударных волнах будет проявление текучих свойств, начиная с некоторых значений $\sigma = \sigma_L$ и $\tau = \tau_L$, характеризующих упругий предел Гюгонио [7]. Если F резко зависит от τ и $F(\tau = 0) = 0$, то за конечное время эксперимента пластические свойства действительно не успевают проявиться в области $\tau < \tau_L$, где F достаточно мала. При этом в качестве начального состояния в стационарной волне следует выбирать состояние с $P_0 = 0$, $\tau_0 = 0$, что автоматически обеспечит равенства $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, приводящие к стационарности особых точек $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ в уравнении (1.10). При слабой зависимости F от τ проще всего считать, что при $\tau \leq \tau_L$ $F = 0$, а в области $\tau \geq \tau_L$ задать F непрерывным образом.

В качестве начального состояния при $D > c_{l0}$ здесь следует принять состояние за фронтом упругого предвестника. Подобная процедура с выбором $\tau_0 = \tau_L$, $\sigma_0 = \sigma_L$ была использована в [4, 4]. Укажем, что упругим предвестником будем считать волну с амплитудой σ_L и скоростью движения

по несжатому веществу $c_0 > D$, в то время как в [2] этим же термином обозначен передний участок профиля пластической волны, а в [3] — упругий скачок в пластической волне, существующий при $D > c_0$.

Отметим, что имеется принципиальное различие в свойствах уравнения (1.10) и соответствующего уравнения из [2], в которой принята некорректная формула для функции $\sigma_1(\epsilon)$. В результате решение из [2] обладает дополнительной особой точкой, приводящей к наличию в профиле волны выступа, внешне похожего на упругий предвестник, но движущегося со скоростью D . Используемый в предлагаемой работе подход не претендует на полностью адекватное реальности описание подножья волны — области $\sigma \leq \sigma_L$, а предназначен для анализа профиля в области резкого перепада, когда $\sigma \gg \sigma_L$ и заложенные в модель упрощающие предположения играют малую роль.

2. Анализ уравнения для профиля. Аналитические методы исследования структуры волны иллюстрируются ниже на примере модели со степенной зависимостью $v(\tau)$ [4], где v_* и τ_* — постоянные параметры

$$v(\tau) = v_*(\tau - \tau_0)^n / \tau_* \quad (2.1)$$

Размножение дислокаций задается законом

$$N = N_0 + M \epsilon_p \quad (2.2)$$

где N_0 и M — постоянные. Вводя обозначения: $z = \epsilon / \epsilon_1$, $z_* = \epsilon_* / \epsilon_1$, $m = 3Mg\rho_0 c_0^2 \epsilon_1^2 (8\mu N_0)^{-1}$, $T = 2^{-3+2n} \epsilon_1^{2-2n} (\mu v_* N_0)^{-1} (3g\rho_0 c_0^2)^{(1-n)} \tau_*^n$, при помощи (1.9) перепишем (1.7), (1.10) в виде

$$T(2z - z_*) \frac{dz}{d\xi} = [1 + mz(z - z_*)] (z - z_*^2)^n \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) допускает интегрирование в рациональных функциях при любом целом n , но ниже приводятся наиболее простые по форме аналитические решения при $n=1$. В этом случае для $m=0$ решение в области непрерывности дается формулой

$$\xi/T = \ln [z^{-z_*} (1-z)^{z_*-2}] \quad (2.4)$$

На фиг. 1 приведены варианты профиля при различных значениях z_* . При $z_* \ll -1$ результат (2.4) переходит в известное [9] решение для слабой ударной волны в вязкой среде. При значении $g=3/2$ формула типа (2.4) была получена в [1], где ее анализ был проведен лишь для слабых волн. Однако в указанном частном случае легко учитывается и размножение дислокаций. Вводя $\varphi = -mz_*$, имеем приближенную формулу, справедливую при $\varphi \ll 1$:

$$\frac{\xi}{Tz_*} = \ln \left| \frac{1-z}{z} \right| + \frac{\varphi}{1+\varphi} \ln \left| \frac{1+\varphi z}{1-z} \right| \quad (2.5)$$

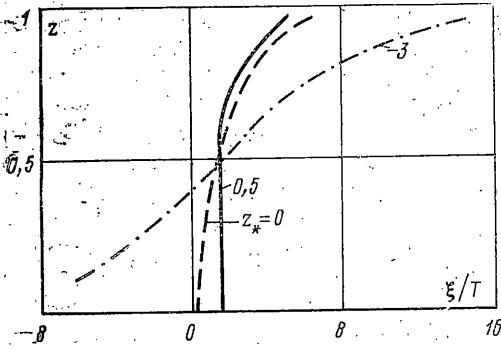
из которой вытекает, что при фиксированной амплитуде с увеличением m возрастает степень асимметрии профиля (вершина становится круче основания) и уменьшается его ширина (фиг. 2).

Для любых моделей рассматриваемого класса задача расчета наиболее важной характеристики профиля — его ширины Δ — может быть сведена к решению алгебраического уравнения. Величина Δ определяется через максимальную крутизну профиля $\Delta = (dz/d\xi)_{\max}$. Действительно, если уравнение для структуры имеет вид $(dz/d\xi) = f(z)$ и существует точка $z = z_f$ ($0 < z_f < 1$), в которой величина $(dz/d\xi)$ максимальна, то в этой точке

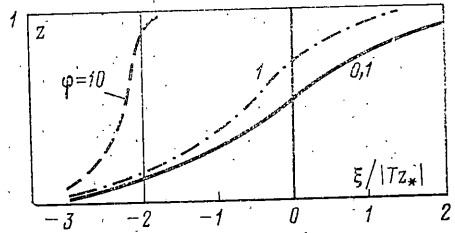
$(df/dz)=0$. Определяя z_f из решения этого уравнения, найдем

$$\Delta = [f(z_f)]^{-1} \quad (2.6)$$

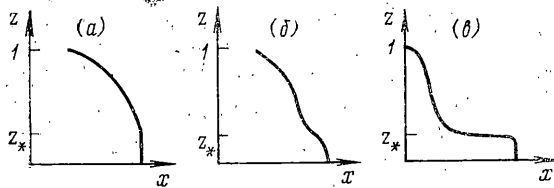
При $z_* < 0$ имеем $f(0) = f(1) = 0$ и точка z_f существует. Полная аналитическая реализация описанной процедуры возможна, например, для сла-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

бых волн ($-z_* \gg 1$) при любом n , когда из (2.3) вытекает следующее алгебраическое уравнение относительно z_f :

$$\varphi(1+2n)z_f^2 - [\varphi + n(2-\varphi)]z_f - n = 0 \quad (2.7)$$

Так как $\varphi > 0$, то в интервале $(0, 1)$ существует единственное решение (2.7), при помощи которого ширина фронта вычисляется по формуле

$$\Delta = -Tz_* (1 - mz_*z_f) z_f^{-n} (1 - z_f)^n \quad (2.8)$$

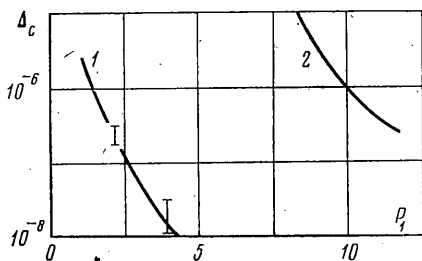
Для волн произвольной амплитуды при $m=0$ функция $f(z_f)$ также является квадратным трехчленом

$$f(z_f) = (4n-2)z_f^2 - 2(nz_* + n-1)z_f + nz_*$$

Его положительный корень существует и единствен при $z_* < 0$, а при $z_* > 0$ условие его существования в требуемом интервале $(z_*, 1)$ имеет вид $z_* < (n-2)/(2n-2)$. В этом случае при $1 \leq n < 2$ крутизна фронта меняется монотонно и профиль качественно аналогичен полученному в простейшей релаксационной модели. По мере возрастания n увеличивается область амплитуд, для которых существует точка максимальной крутизны (фиг. 3, случай *a* относится к $1 < n < 2$, случай *б* — к $n=3 \div 4$, а случай *в* — к $n \gg 2$). Резкое различие в крутизне профиля в окрестностях точек $z=z_f$ и $z=z_*$, имеющиеся на фиг. 3, *в*, связано с сильной зависимостью F от τ при $n \gg 1$.

Если f в качестве сомножителя содержит быстро меняющуюся функцию z с максимумом в нужном интервале, то можно так же, как при проведении переверальных оценок, этот максимум принять за z_f , а затем по формуле (2.6) оценить Δ . Например, если n достаточно велико, то для рассматриваемого уравнения (2.3) z_f близок к 0,5 — точке максимума выражения $(z-z^2)^n$. Это имеет место и при учете размножения дислокаций, а профиль при $z_* > 0$ близок к представленному на фиг. 3, в. Имеющееся отличие между волновыми конфигурациями в случаях слабой (фиг. 3, а) и сильной (фиг. 3, в) зависимости F от τ отмечалось в [10] на основании численных расчетов.

Развитый в публикуемой работе подход позволяет не только интерпретировать качественные особенности профиля, но и получать его количественные характеристики, что далее иллюстрируется на примерах рас-



Фиг. 4

3. Структура волн в алюминии и железе. Для расчета профиля стационарной ударной волны в алюминии 6061-T6 в соответствии с [4] привлекается модель с кинетикой, задаваемой соотношениями (1.2), (2.1), (2.2). Значения параметров равны: $b=2,86 \cdot 10^{-10}$ м, $bN_0=1700$ м⁻¹, $bM=3,5 \cdot 10^5$ м⁻¹, $n=2,14$, $\tau_*=0,2$ ГПа, $v_*=2$ км/с, $\mu=28,7$ ГПа. Начальное состояние характеризуется скоростью $u_0=40$ м/с, при превышении которой сохраняется постоянство τ_0 [4]. Исходя из этого значения u_0 , а также из требований максимальной близости с приведенной в [4] кривой гидростатического сжатия, получены следующие параметры формулы (1.8): $P_0=0,7$ ГПа, $\rho_0=2,72$ Мг/м³, $c_0=5,4 \cdot 10^3$ м/с, $g=3,25$.

Такая модель применима при амплитудах волны от 2 до 5 ГПа. При больших значениях P_1 существенны эффекты насыщения скорости дислокаций, при $P_1 < 2$ ГПа согласно [4] реализуется вязкое течение дислокаций, для которого $n=1$ и $M=0$. В последнем случае профиль достаточно точно описывается формулой (2.5) при $\varphi=0$, а соответствующее значение эффективной вязкости составляет $6,7 \cdot 10^2$ кг/(м·с).

Результаты расчета ширины фронта в алюминии 6061-T6 (фиг. 4, кривая 1) показывают, что при $P_1 > 2$ ГПа Δ нелинейно падает с ростом амплитуды. В этой области ввиду отсутствия малого параметра ($\varphi \sim 1$) и дробного значения n представить решение (2.3) в явном виде не удалось, но для определения Δ достаточно было воспользоваться формулами (2.7), (2.8). Вычисленные значения Δ хорошо согласуются с экспериментальными значениями, определенными графическим дифференцированием данных [4] при $P_1=2,1$ и 3,7 ГПа (вертикальные отрезки на фиг. 4).

Аналогичный подход был применен к модели, описывающей армо-железо, в которой используется формула [6] с постоянными коэффициентами v_* , h_0 , h_* , N_0 , M

$$N_0 = (N_0 + M \varepsilon_p) v_* \exp\left(-\frac{h_0 + h_* \varepsilon_p}{\tau}\right) \quad (3.1)$$

Уравнение (1.10) при этом приобретает вид

$$T_*(2z-z_*) \frac{dz}{z^2} = (1+mz(z-z_*)) \exp\left(\frac{H_0+H_*(z-z_*)z}{z^2-z}\right) \quad (3.2)$$

$$H_0 = h_0 / (3g\rho_0 c_0^2 \varepsilon_1^2), \quad H_* = h_* / (2\mu), \quad T_* = 3g\rho_0 c_0^2 \varepsilon_1^2 / (8\mu b v_* N_0)$$

где z , z_* , m определены при выводе (2.3).

В соответствии со структурой формулы (3.1) в качестве начального состояния выбирается состояние с $P_0=0$, для которого [6]: $\rho_0=7,85 \text{ Мг/м}^3$, $\mu=90,6 \text{ ГПа}$, $b=2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $v_*=3,2 \text{ км/с}$, $N_0=3,75 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}$, $M=10^{15} \text{ м}^{-2}$, $h_0=1,2 \text{ ГПа}$, $h_*=0,41 \text{ ГПа}$. Параметры c_0 , g определены при помощи линеаризации формулы для D , дающей при $u_0=0$ связь $D=c_0+gu_1/2$. Сопоставление с экспериментально зафиксированными коэффициентами в линейном $D-u_1$ соотношении [5] приводит к результату $c_0=4,63 \text{ км/с}$, $g=2,66$.

В рассматриваемом диапазоне амплитуд волны от нескольких ГПа до фазового перехода при 13 ГПа справедливы неравенства $H_* \ll H_0$, $m \gg 1$ и максимум правой части (3.2) практически совпадает с максимумом знаменателя в показателе экспоненты. Подставляя $z_f=1/2$ в (2.6) и используя (3.2), получим простую формулу для ширины фронта волны в армо-железе

$$\Delta = \frac{4T_*(1-z_*)}{m(1-2z_*)} \exp(4H_0) \quad (3.3)$$

Результаты расчета по (3.3), указавшего на доминирующую роль экспоненциального множителя, также приведены на фиг. 4 (кривая 2). Отметим, что прямое сопоставление с результатами численного расчета [2] затруднено не только ввиду обсуждения выше отличия в основном уравнении, но и из-за слишком грубого масштаба, в котором представлен в [2] волновой профиль. Последний недостаток отмечен и в [3], посвященной анализу структуры волны в алюминии на основе модели, развитой в [10].

По известному значению Δ можно оценить величину t_* — время формирования стационарной конфигурации из первоначального скачка. Для экспериментальной реализации стационарных волн необходимо, чтобы выполнялось неравенство $t_* < \theta$, где θ — время движения ударной волны по образцу. В случае слабых волн в вязкой среде известна оценка¹ $t_* \sim \Delta/\varepsilon_1$. В опытах [4] по алюминию при амплитуде $P_1=0,95 \text{ ГПа}$ ($\varepsilon_1 \sim 0,01$) зафиксирована нестационарная стадия эволюции. Этот факт легко объясняется тем, что при таких слабых волнах применима модель вязкого вещества, расчет по которой дает $\Delta \sim \theta$ и, следовательно, $\theta \ll t_*$. Распространение приведенной оценки для t_* на более сложные модели приводит к согласию с данными опытов [4] для алюминия при $P_1 \approx 2 \text{ ГПа}$ и позволяет интерпретировать нестационарность волны в армо-железе при $P_1 \approx 10 \text{ ГПа}$ [5].

Автор признателен Л. В. Альтшулеру за полезные обсуждения публикуемой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelly J. M., Gillis P. P. An ideally viscoplastic analysis of shock profiles.— Acta mech., 1977, т. 26, No. 1–4, p. 42.
2. Гулидов А. И., Фомин В. М., Яценко Н. Н. Структура волн сжатия в неупругих средах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5, с. 101.

¹ См. Дынин Е. А. О распространении импульсов сжатия в конденсированных средах.— В кн.: II Всес. симпоз. по импульсным давлениям: Тез. докл. М.: Всес. н.-и. ин-т физ.-техн. и радиотехн. измерений, 1976, с. 51.

3. Годунов С. К., Козин Н. С. Структура ударных волн в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров веществ.— ПМТФ, 1974, № 5, с. 92.
4. Johnson J. N., Barker L. M. Dislocation dynamics and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminium.— J. Appl. Phys., 1969, v. 40, No. 11, p. 4321.
5. Barker L. M. α -Phase Higniot of iron.— J. Appl. Phys., 1975, v. 46, No. 6, p. 2544.
6. Gilman J. J. Dislocation dynamics and the response of material to impact.— Appl. Mech. Rev., 1968, v. 21, No. 8, p. 767.
7. Duvall G. E. Shock waves in condensed media.— In: Physics of high energy density. New York — London: Acad. Press, 1971, p. 7.
8. Herrmann W. Nonlinear stress waves in metals.— In: Wave propagation in solids. New York: ASME, 1969, p. 129.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 419 с.
10. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. с. 303.
11. Murri W. J., Currau D. R., Petersen C. F., Crewdson R. C. Response of solids to shock waves.— In: Advances in high-pressure research. V. 4. New York: Acad. Press, 1974, p. 1.

Москва

Поступила в редакцию
15.II.1979