УДК 539.376

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНЫХ ПУТЯХ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ СЛОЖНЫХ СРЕД

ЦВЕЛОДУБ И. Ю.

Рассматриваются два возможных подхода к построению основных соотношений теории установившейся ползучести сложных сред, поведение которых не описывается классической теорией [1]. Первый базируется на введении в определяющие уравнения помимо общепринятого второго инварианта девиатора напряжений третьего инварианта, второй – на введении первого инварианта тензора напряжений. Принимаются гипотезы о соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести и об устойчивости среды в малом. Обсуждаются вопросы обращения связи между указанными тензорами, о единственности решения краевых задач. В работе используются результаты, полученные в [2, 3].

1. Как показано в [2, 3], самая общая связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций установившейся ползучести в предположении их соосности представима в виде

$$\eta_{kl}=\frac{1}{3}I_\eta\frac{\partial I_\sigma}{\partial\sigma_{kl}}+W^\circ\left(\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{kl}}-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\xi}{\partial\sigma_{kl}}\right)\quad (k,l=1,2,3) \tag{1.1}$$

где σ_{kl}, η_{kl}, I_σ, I_η – компоненты в первые инварианты указанных тензоров, σ_i и ξ – интенсивность и угол вида тензора напряжений, W° – удельная мощность деформации формоизменения, ω – фаза подобия девиаторов. Эти величины определяются обычным образом [3]. Предполагается, что функции

$$I_\eta=I_\eta(\sigma_i,\ \xi,\ I_\sigma),\ W^\circ=W^\circ(\sigma_i,\ \xi,\ I_\sigma),\ \omega=\omega(\sigma_i,\ \xi,\ I_\sigma) \tag{1.2}$$

дифференцируемы по всем своим аргументам в некоторой области пространства инвариантов σ_i, ξ и I_σ. Кроме того, считаем, что рассматриваемая среда устойчива в малом, т. е. в указанной области имеет место неравенство

$$\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl}\geqslant 0 \tag{1.3}$$

Условие (1.3) накладывает на функции (1.2) определенные ограничения, полученные в [2, 3]. Там же показано, что неравенство (1.3) эквивалентно неравенству $\delta\sigma_k\delta\eta_k\geqslant 0$, где σ_k, η_k ($k=1, 2, 3$) – главные значения тензоров напряжений и скоростей деформаций, что позволяет довольно просто решить задачу обращения зависимости (1.1). Докажем следующее утверждение: чтобы выразить тензор напряжений как функцию тензора скоростей деформаций, т. е. обратить зависимость (1.1), достаточно выполнить строгое неравенство в условии (1.3).

Действительно, так как указанные тензоры соосны, то по аналогии с (1.1) можно записать

$$\sigma_{kl}=\frac{1}{3}I_\sigma\frac{\partial I_\eta}{\partial\eta_{kl}}+W^\circ\left(\frac{1}{\eta_i}\frac{\partial\eta_i}{\partial\eta_{kl}}+\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\psi}{\partial\eta_{kl}}\right)\quad (k,l=1,2,3) \tag{1.4}$$

где η_i и ψ – интенсивность и угол вида тензора скоростей деформаций.

Покажем, что инварианты I_σ, σ_i и ξ тензора напряжений можно выразить в виде функций инвариантов I_η, η_i и ψ тензора скоростей деформаций. Последнее эквивалентно существованию однозначной зависимости главных значений первого тензора от главных значений второго. Для этого достаточно, чтобы якобиан $J=\partial(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)/\partial(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$ нигде не обращался в нуль. Покажем, что $J>0$. Имеем $J=\det\|b_{kl}\|$, где $b_{kl}=\partial\eta_k/\partial\sigma_l$. Матрицу $\|b_{kl}\|$ представим в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц $\|b_{kl}\|=\|a_{kl}\|+\|c_{kl}\|$, $a_{kl}={}^1/_2(b_{kl}+b_{lk})$, $c_{kl}={}^1/_2(b_{kl}-b_{lk})$. Тогда получим $J=\det\|a_{kl}\|+a_{11}c_{23}^2+a_{22}c_{13}^2+a_{33}c_{12}^2-2a_{12}c_{13}c_{23}-2a_{23}c_{12}c_{13}+2a_{13}c_{12}c_{23}>0$, так как $\det\|a_{kl}\|>0$ и квадратичная форма относительно c_{12}, c_{23}, c_{13} положительно определена в силу положительной определенности матрицы $\|a_{kl}\|$; это следует из выполнения строгого неравенства в (1.3). Таким образом, имеют место однозначные зависимости $I_\sigma=I_\sigma(I_\eta, \eta_i, \psi)$, $\sigma_i=\sigma_i(I_\eta, \eta_i, \psi)$ и $\xi=\xi(I_\eta, \eta_i, \psi)$. Тогда из (1.2) имеем $W^\circ=W^\circ(I_\eta, \eta_i, \psi)$ и $\omega=\omega(I_\eta, \eta_i, \psi)$, подстановка которых в (1.4) и доказывает утверждение.

Более того, можно показать, что и все главные миноры матрицы $\|b_{kl}\|$ (не только $\det\|b_{kl}\|$) положительны: $b_{kk}=a_{kk}>0$, $b_{kk}b_{ll}-b_{kl}b_{lk}=a_{kk}a_{ll}-a_{kl}^2+c_{kl}^2>0$, так как $a_{kk}a_{ll}-a_{kl}^2>0$ ($k\neq l$, суммирования по индексам нет). Следовательно, если симметричная часть матрицы положительно определена, то и все главные миноры самой матрицы будут положительны.

Из доказанного выше по теореме о неявной функции следует, что выполнение строгого неравенства в (1.3) позволяет при задании любых трех величин с разными индексами из шести η_k, σ_k ($k=1, 2, 3$) однозначно находить оставшиеся три.

Для несжимаемой среды, когда $I_\eta=0$, указанные условия достаточны для определения девиатора напряжений как функции тензора скоростей деформаций, который в данном случае также является девиатором. Действительно, в [3] установлено, что якобиан $\partial(\eta_i, \psi)/\partial(\sigma_i, \xi)>0$. Это обеспечивает единственность данного обращения. Отметим, что и для несжимаемой среды величины $\partial\eta_k/\partial\sigma_k>0$ ($k=1, 2, 3$) согласно [2, 3].

Кроме того, в [3] доказано, что выполнение строгого неравенства в (1.3) является достаточным для единственности решения краевых задач теории установившейся ползучести, и приводится пример, когда невыполнение постулата устойчивости влечет неединственность решения. Ниже будет приведен аналогичный пример, связанный с неединственностью обращения связи между скоростями деформаций и напряжениями.

2. Классические теории установившейся ползучести базируются на следующих допущениях [1]: $I_\eta=0$, $W^\circ=W^\circ(\sigma_i)$, $\omega=0$. Очевидно, что в рамках этих предположений невозможно описать такие присущие материалам сложной природы свойства, как разносопротивляемость при растяжении и сжатии, отклонение от подобия девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций. Это послужило поводом для построения определяющих уравнений, содержащих помимо общепринятого инварианта σ_i либо третий инвариант девиатора напряжений, либо первый инвариант тензора напряжений, либо все три инварианта. Некоторые из таких работ указаны в [3]. При этом подавляющее большинство подходов базируется на гипотезе пластической несжимаемости. Но в этом случае, как показано в [3], присутствие первого инварианта I_σ в определяющих уравнениях вызывает нарушение условия устойчивости (1.3). Последнее, в свою очередь, может повлечь неединственность обращения зависимости между напряжениями и скоростями деформаций.

Рассмотрим конкретный пример. В [4] для области $|I_\sigma|\leqslant\sigma_i$ предложены определяющие уравнения в виде

$$\begin{gathered} I_\eta=0,\ W^\circ=B(1+\alpha I_\sigma/\sigma_i)\sigma_i^n,\ \omega=0 \\ B=(B_+ + B_-)/2,\ \alpha=(B_+ - B_-)/(B_+ + B_-)<1 \end{gathered} \tag{2.1}$$

где B_+, B_- — коэффициенты ползучести при растяжении и сжатии, n — показатель ползучести.

Подставляя (2.1) в (1.1) и учитывая представление главных значений тензора напряжений через инварианты I_σ, σ_i и ξ, получим, например, для второй главной компоненты тензора скоростей деформаций

$$\eta_2=B(1+\alpha I_\sigma/\sigma_i)\sigma_i^{n-1}\sin\xi \tag{2.2}$$

Покажем, что в области $|I_\sigma|\leqslant\sigma_i$ всегда найдется такая поверхность, на которой $\partial\eta_2/\partial\sigma_2=0$. Имеем

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial\sigma_2}=\frac{\partial\eta_2}{\partial I_\sigma}\frac{\partial I_\sigma}{\partial\sigma_2}+\frac{\partial\eta_2}{\partial\sigma_i}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_2}+\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma_2}= \tag{2.3}$$

$$=\frac{\partial\eta_2}{\partial I_\sigma}+\frac{\partial\eta_2}{\partial\sigma_i}\sin\xi+\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi}\cos\xi$$

Подставляя (2.2) в (2.3), найдем

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial\sigma_2}=B\sigma_i^{n-3}\,\{\alpha\sigma_i\sin\xi+[(n-1)\sigma_i+\alpha(n-2)I_\sigma]\sin^2\xi+(\sigma_i+\alpha I_\sigma)\cos^2\xi\}$$

Отсюда видно, что величина $\partial\eta_2/\partial\sigma_2$ обращается в нуль при

$$\frac{I_\sigma}{\sigma_i}=-\frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha\sin\xi+(n-1)\sin^2\xi+\cos^2\xi}{(n-2)\sin^2\xi+\cos^2\xi} \tag{2.4}$$

Поверхность (2.4) может лежать в указанной выше области, если абсолютная величина правой части (2.4) не будет превосходить единицу. Не останавливаясь на элементарном анализе получившегося неравенства, укажем одно из допустимых решений: при $n\geqslant2$ достаточно взять $\alpha\geqslant(n+2)/(n+3)$ и $-{}^1/_2\leqslant\sin\xi\leqslant-1/n$.

Следовательно, при известных главных значениях σ_1, η_2, σ_3 величина σ_2 из уравнений (2.1) может определяться неоднозначно, что в свою очередь вызовет неединственность решения некоторых частных задач. Простейшей задачей такого рода является задача об установившейся ползучести прямоугольной пластинки под действием однородного двухосного напряженного состояния, когда известно значение σ_x (напряжение, действующее вдоль оси x) и u_y (скорость смещения вдоль оси y), а следовательно, и η_y. В этом случае напряжение σ_y может определяться неединственным образом. Действительно, чтобы указанное напряжение определялось однозначно, необходимо, чтобы $\partial\eta_y/\partial\sigma_y\neq0$, что эквивалентно условию $\partial\eta_2/\partial\sigma_2\neq\neq0$. Как показано выше, выполнение строгого неравенства в (1.3) влечет $\partial\eta_2/\partial\sigma_2>0$, т. е. является достаточным условием для единственности решения задачи о двухосном растяжении пластинки. Определяющие соотношения (2.1) не удовлетворяют постулату устойчивости (1.3) (поскольку в них присутствует первый инвариант тензора напряжений, а среда считается несжимаемой) и, в частности, допускают возможность равенства $\partial\eta_2/\partial\sigma_2=0$, что и вызывает неединственность решения указанной задачи.

Чтобы избежать упомянутой ситуации, необходимо для несжимаемой среды брать определяющие уравнения в виде $W=W(\sigma_i, \xi)$ и $\omega=\omega(\sigma_i, \xi)$, где W — диссипативная функция [3]. Ограничения, накладываемые на эти функции условием (1.3), получены в [2, 3].

Рассмотрим кратко один из возможных вариантов построение определяющих уравнений установившейся ползучести для изотропной несжимаемой среды. В этом случае общие соотношения (1.1) примут вид [2]:

$$\eta_{kl}=W\left(\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{kl}}-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\xi}{\partial\sigma_{kl}}\right)\quad (k,l=1,2,3) \tag{2.5}$$

Дальнейшее упрощение зависимости (2.5) будет состоять в предположении, что качественная характеристика скоростей деформаций, определяемая инвариантом ψ, является функцией аналогичной характеристики напряженного состояния, определяемой инвариантом ξ, т. е. $\omega=\omega(\xi)$ [5], что представляется естественным обобщением классической теории, согласно которой $\omega=0$. Тогда соотношения (2.5) запишутся так:

$$\eta_{kl}=(W/\Sigma)\,(\partial\Sigma/\partial\sigma_{kl}) \quad (k,\ l=1,\ 2,\ 3) \tag{2.6}$$

$$\Sigma=\sigma_i e^{\gamma(\xi)}=\sigma_i f(\xi), \quad \gamma(\xi)=-\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \operatorname{tg}\omega\, d\xi$$

Следуя общепринятой схеме [1], величину W положим в виде однородной функции степени n от компонент напряжений: $W=B\Sigma_1^n$, где $\Sigma_1=\sigma_i f_1(\xi)$. Будем предполагать в дальнейшем, что $n>1$. (В [6] утверждается, что при степенной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций ползучести величина n должна удовлетворять условию $n>2$.)

Необходимо отметить, что в общем случае $\Sigma\neq\Sigma_1$, т. е. $f(\xi)\neq f_1(\xi)$. Действительно, нормаль к поверхности $\Sigma=\mathrm{const}$ определяет в пространстве напряжений направление вектора скоростей деформаций, как это следует из (2.6). Поверхность же $\Sigma_1=\mathrm{const}$ определяет процессы ползучести равной интенсивности, если за меру последней принять мощность рассеиваемой энергии W. Однако, как показывают многочисленные эксперименты над тонкостенными трубчатыми образцами при совместном действии осевого растягивающего или сжимающего усилия и крутящего момента, вектор с компонентами $(\sqrt{3}\eta_0,\ \eta_c)$, где η_0, η_c — осевая и сдвиговая скорости ползучести, ортогонален к контуру $W=\mathrm{const}$ в плоскости $(\sigma,\ \sqrt{3}\ \tau)$, где σ, τ — осевое и касательное напряжения [4, 7—9]. Отсюда нетрудно показать, используя (2.5), что при сделанных выше предположениях будет иметь место равенство $\operatorname{tg}\omega=-\sigma_i^{-1}(\partial W/\partial\xi)\,(\partial W/\partial\sigma_i)^{-1}$. Следовательно, и в самом общем случае вектор скоростей деформаций ползучести будет ортогонален к поверхности $W=\mathrm{const}$, что приводит к ассоциированному закону течения $f(\xi)=f_1(\xi)$ или к существованию потенциала ползучести $\Phi=W/n$ [2].

Видно, что условие строгой выпуклости полученного потенциала (или соблюдение строгого неравенства в (1.3)) эквивалентно условию единственности обращения зависимости девиатора скоростей деформаций ползучести от девиатора напряжений. Действительно, при принятых предположениях [3]:

$$J_1=\frac{\partial(\eta_i,\ \psi)}{\partial(\sigma_i,\ \xi)}=\frac{\eta_i}{\sigma_i}(n-1)\left(1-\frac{d\omega}{d\xi}\right)$$

причем величина J_1 нигде не должна обращаться в нуль. Учитывая, что $n>1$, должно быть либо $d\omega/d\xi>1$, либо $d\omega/d\xi<1$ при любом $|\xi|\leqslant\pi/6$. Очевидно $\omega(-\pi/6)=\omega(\pi/6)=0$, так как при одноосном растяжении ($\xi=-\pi/6$) или сжатии ($\xi=\pi/6$) изотропного материала из условия несжимаемости следует, что поперечные деформации равны половине осевой и обратны по знаку, откуда $\psi(-\pi/6)=-\pi/6$ и $\psi(\pi/6)=\pi/6$. Поэтому величина $d\omega/d\xi$ на интервале $[-\pi/6,\ \pi/6]$ должна менять знак, либо всегда оставаться равной нулю. Следовательно, условие $d\omega/d\xi>1$ невозможно и остается только $d\omega/d\xi<1$, что совпадает с условием устойчивости указанного ассоциированного закона [2].

Функция $f(\xi)$, входящая в (2.6), должна удовлетворять некоторым условиям периодичности и симметрии, указанным в [5]. Там же получено общее представление этой функции в виде ряда Фурье. Если при построении определяющих уравнений установившейся ползучести в качестве независимых характеристик брать характеристики только на растяжение и сжатие, то в этом ряду достаточно удержать два члена, т. е. положить $f(\xi)=1+a\sin 3\xi$. Такой подход, как один из возможных, был использован в [4] для описания установившейся ползучести тонкостенных трубчатых образцов из титанового сплава ОТ-4 при 475° и различных комбинациях растяжения (сжатия) с кручением.

В таблице приведены экспериментальные значения осевой $\eta_0{}^*$ и сдвиговой $\eta_c{}^*$ скоростей деформаций, соответствующих различным комбинациям осевого σ и касательного τ напряжений. Аналогичные величины, рассчитанные по указанным выше зависимостям, обозначены в таблице через η_{01} и η_{c1} (данные [4]). Из сравнения экспериментальных и расчетных

$\sigma\cdot 10^{-7}$ Па	$\tau\cdot 10^{-7}$ Па	$\eta_0^*\cdot 10^8 c^{-1}$	$\eta_c^*\cdot 10^8 c^{-1}$	$\eta_{c1}\cdot 10^8 c^{-1}$	$\eta_{c1}\cdot 10^8 c^{-1}$	$\eta_{02}\cdot 10^8 c^{-1}$	$\eta_{c2}\cdot 10^8 c^{-1}$
19,10	4,57	7,20	5,00	6,75	4,78	6,67	4,50
14,70	8,49	4,89	9,33	5,28	8,61	5,06	8,11
7,94	10,98	3,06	15,00	2,83	9,92	2,64	9,56
−8,23	11,47	−2,69	11,86	−1,75	9,11	−1,94	9,50
−15,58	9,00	−5,42	9,03	−3,78	7,00	−3,94	7,42
8,87	8,87	1,67	7,67	2,00	5,31	1,86	5,06
15,32	5,11	3,00	3,56	3,39	3,31	3,33	3,14

значений видно, что наибольшее расхождение имеет место при напряженных состояниях, близких к чистому кручению (т. е. при ξ, близких к нулю). Поэтому для более точного описания процесса ползучести в качестве независимых характеристик следует брать таковые, полученные из экспериментов на растяжение, сжатие и чистое кручение, на что было указано в [4, 5].

Заметим, что отмеченные выше соотношения для материала ОТ-4 удовлетворяют условию (1.3), так как $a=-0{,}057$, а областью устойчивости ассоциированного закона течения при $f(\xi)=1+a\sin 3\xi$ будет $|a|\leqslant{}^1/_8$ [2].

Введение инварианта ξ в потенциал ползучести Φ обусловливает тензорно-нелинейную зависимость между напряжениями и скоростями деформаций [1], что приводит к громоздким выкладкам даже в простейших задачах. В некоторых случаях (когда величина ω достаточно мала) можно использовать приближенные тензорно-линейные соотношения, полагая $\omega=0$, а разносопротивляемость растяжению и сжатию учитывать введением инварианта ξ в выражение для диссипативной функции W [3]. Дальше будет рассмотрен иной подход, также приводящий к тензорно-линейной связи между указанными тензорами.

3. В последнее время появились работы в области упругости [10, 11] и пластичности [12—14], где предприняты попытки описания процесса деформирования сложных сред (в частности сред, разносопротивляющихся растяжению и сжатию) введением в определяющие уравнения первого инварианта тензора напряжений. Аналогичные работы, некоторые приведены в [3], есть и в теории ползучести, однако в большинстве из них используется гипотеза пластической несжимаемости, что противоречит условию (1.3). Для устранения этого противоречия следует предположить, что рассматриваемая среда является сжимаемой в процессе ползучести, т. е. $I_\eta\neq 0$.

Рассмотрим некоторые из возможных подходов к построению основных соотношений теории установившейся ползучести для сжимаемых материалов. В этом случае для учета разносопротивляемости при растяжении и сжатии достаточно пренебречь тензорно-нелинейными членами в (1.1) и исключить инвариант ξ из определяющих уравнений. Таким образом, в дальнейшем будем считать, что $I_\eta=I_\eta(I_\sigma, \sigma_i)$, $W^\circ=W^\circ(I_\sigma, \sigma_i)$, $\omega=0$.

Ограничения, вытекающие из (1.3) для данного случая, впервые использовались в [12] при построении определяющих уравнений для одной модели физически нелинейной среды. Видно, что неравенства, полученные в [12], будут следствием положительной определенности квадратичной формы, установленной в [3], при сделанных выше упрощающих предположениях.

Введем в рассмотрение две величины: $\xi'=I_\sigma/\sigma_i$ и $\psi'={}^1/_3 I_\eta/\eta_i$, являющиеся качественными характеристиками для тензоров напряжений и скоростей деформаций. Заметим, что инвариант ξ' использовался в [10, 11] при построении разномодульной теории упругости. Введенные величины в некотором смысле аналоги углов вида напряжений и скоростей деформаций, рассмотренных выше. С учетом сделанных предположений, равенства $W={}^1/_3 I_\eta I_\sigma+\eta_i\sigma_i\cos\omega$ и тригонометрических представлений для главных значений соосных симметричных тензоров второго ранга общие соотношения (1.1) примут вид, аналогичный (2.5):

$$\eta_{kl}=W\left(\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{kl}}+\frac{\psi'}{1+\xi'\psi'}\frac{\partial\xi'}{\partial\sigma_{kl}}\right)\quad (k,l=1,2,3) \tag{3.1}$$

Далее, как и в п. 2, будем считать, что качественная характеристика скоростей деформаций определяется только такой же характеристикой напряженного состояния и не зависит от уровня последнего, т. е. $\psi'=\psi'(\xi')$. Тогда из (3.1) следует

$$\eta_{kl}=(W/\Sigma')(\partial\Sigma'/\partial\sigma_{kl})\quad (k,\ l=1,\ 2,\ 3) \tag{3.2}$$

$$\Sigma'=\sigma_i e^{\gamma'(\xi')}=\sigma_i f'(\xi'),\quad \gamma'(\xi')=\int\limits_{\xi_0'}^{\xi'}\frac{\psi'}{1+\xi'\psi'}d\xi'$$

Как видно из (3.2), нормаль к поверхности $\Sigma'=\mathrm{const}$ определяет в пространстве напряжений направление вектора скоростей деформаций ползучести. Так, например, при $f'(\xi')=[1+(\xi')^2]^{1/2}$ имеет место закон течения, аналогичный закону течения Мизеса, когда качественные характеристики для напряжений и скоростей деформаций совпадают: $\psi'=\xi'$. Функция $f'(\xi')=1+c\xi'$ определяет аналог закона течения типа Треска, когда $\psi'=c=\mathrm{const}$.

Предположим, что $W=W(\Sigma_1')$, где $\Sigma_1'=\sigma_i f_1'(\xi')$. В самом общем случае $\Sigma_1'\neq\Sigma'$, т. е. имеет место неассоциированный закон течения. Условия устойчивости последнего вытекают из общих неравенств, приведенных в [3], и имеют вид

$$\begin{gathered}\partial I_\eta/\partial I_\sigma\geqslant 0,\quad \partial\eta_i/\partial\sigma_i\geqslant 0,\quad f'-\xi' df'/d\xi'\geqslant 0\\ \frac{1}{3}\frac{\partial I_\eta}{\partial I_\sigma}\frac{\partial\eta_i}{\partial\sigma_i}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial I_\sigma}+\frac{1}{3}\frac{\partial I_\eta}{\partial\sigma_i}\right)^2\geqslant 0\\ \frac{1}{3}I_\eta=\frac{W}{\Sigma'}\frac{df'}{d\xi'},\quad \eta_i=\frac{W}{\Sigma'}\left(f'-\xi'\frac{df'}{d\xi'}\right)\end{gathered} \tag{3.3}$$

Из (3.3) можно показать, что если взят указанный аналог закона течения Треска, то и аргументом диссипативной функции W будет величина $\Sigma'=\sigma_i(1+c\xi')$, т. е. неассоциированный закон невозможен. Действительно, в этом случае ${}^1/_3 I_\eta=c\eta_i$ и из последнего неравенства (3.3) следует, что $-{}^1/_4(\partial\eta_i/\partial I_\sigma-c\partial\eta_i/\partial\sigma_i)^2\geqslant 0$, что возможно только при условии $\partial\eta_i/\partial I_\sigma=c\partial\eta_i/\partial\sigma_i$, откуда $\eta_i=\eta_i(\sigma_i+cI_\sigma)=\eta_i(\Sigma')$. Тогда $W=\eta_i(\Sigma')\Sigma'=W(\Sigma')$. Этот же факт был отмечен в [2] для классического закона течения Треска.

Как и выше, примем, что W – однородная степени n функция относительно компонент напряжений: $W=B\Sigma_1'^n$. Так как при плоском напряженном состоянии вектор скоростей деформаций ползучести ортогонален к контуру $W=\mathrm{const}$, то аналогично п. 2 можно показать, что $\Sigma_1'=\Sigma'$, т. е. будет иметь место ассоциированный закон течения; в данном случае это эквивалентно существованию потенциала ползучести $\Phi'=W/n$. Условие (1.3) приводит к выпуклости последнего в пространстве напряжений.

Функцию $f_1'(\xi')$ следует аппроксимировать на основании экспериментальных данных. В простейшем случае, если в качестве независимых брать характеристики только на растяжение ($\xi'=1$) и сжатие ($\xi'=-1$), $f_1'(\xi')$ можно представить в виде $f_1'(\xi')=1+c\xi'$, что приводит к упомянутому аналогу ассоциированного закона течения типа Треска. При этом $c=(B_+^{1/n}-B_-^{1/n})/(B_+^{1/n}+B_-^{1/n})$. Например, для материала ОТ-4 величина $c=0{,}057$.

Условия устойчивости такого закона, как видно из (3.3), сводятся к выполнению неравенств $f_1'(\xi')\geqslant 0$, $n\geqslant 1$. Учитывая, что всегда $c<1$, предложенные соотношения можно применять при описании процесса ползучести при различных комбинациях растяжения (сжатия) с кручением, когда $I_\sigma=\sigma$, $\sigma_i=(\sigma^2+3\tau^2)^{1/2}$, т. е. $|I_\sigma|\leqslant\sigma_i$ и $|\xi'|\leqslant 1$.

В таблице в колонках η_{02} и η_{c2} приведены значения осевой и сдвиговой скоростей деформаций ползучести, рассчитанные по таким зависимостям. И в этом случае наибольшее расхождение между экспериментальными и расчетными значениями наблюдается при ξ', близких к нулю, что связано с недостаточно точной аппроксимацией функции $f_1'(\xi')$. Однако соответствующие величины η_{01} и η_{02}, так же как и η_{c1} и η_{c2}, близки, т. е. расчеты по зависимостям, включающим третий инвариант девиатора напряжений, близки к аналогичным, содержащим первый инвариант тензора напряжений. В последнем случае материал считается пластически сжимаемым. При этом доля объемной деформации, характеризуемой первым инвариантом тензора деформаций, на фоне деформации формоизменения, характеризуемой интенсивностью деформаций, при постоянных напряжениях составляет величину $I_\eta/\eta_i=3c$. Так, для материала ОТ-4 отношение $I_\eta/\eta_i=0{,}171$. Если учесть, что максимальная деформация формоизменения составляет не более 3—5%, то объемная деформация не будет превосходить 0,5—0,9% соответственно.

Предложенные в п. 2, 3 потенциалы являются выпуклыми в пространстве напряжений. Соответствующие потенциалы для напряжений будут выпуклыми в пространстве скоростей деформаций [1]. Следовательно, в обоих рассмотренных случаях можно сформулировать вариационные принципы типа Кастильяно и Лагранжа, доказать теорему единственности [1] и получить ряд оценок для диссипации энергии и поля деформаций [15, 16].

Таким образом, для описания процесса деформирования при ползучести сложных сред возможны два подхода. Первый базируется на введении в определяющие уравнения третьего инварианта девиатора напряжений (или угла вида напряженного состояния) с сохранением гипотезы пластической несжимаемости. Второй — на введении первого инварианта тензора напряжений, что в рамках выполнимости постулата устойчивости в малом приводит к отказу от гипотезы пластической несжимаемости. Экспериментальные данные при плоском напряженном состоянии свидетельствуют о наличии потенциала ползучести, что при использовании первого подхода приводит к тензорно-нелинейным соотношениям между тензорами напряжений и скоростей деформаций установившейся ползучести. В этом смысле второй подход проще, так как базируется на тензорно-линейной связи. Однако используемая при этом гипотеза пластической сжимаемости нуждается в дополнительном обосновании. Для этого следует провести обширную экспериментальную программу в широком диапазоне изменения гидростатического давления с тщательным замером объемной деформации. (В упомянутых экспериментах при различных комбинациях растяжения и сжатия с кручением обычно замеряются только осевые и сдвиговые деформации, в то время как следует замерять еще и две поперечные.)

Проверка гипотезы пластической несжимаемости для материалов сложной природы позволит ответить на вопрос о выборе одного из двух возможных путей построения основных соотношений теории установившейся ползучести в предположении справедливости постулата Друккера. Использование же всех трех инвариантов тензора напряжений в определяющих уравнениях вряд ли является целесообразным, так как обычные эксперименты на ползучесть, проводимые при плоском напряженном состоянии, не позволяют выделить влияние каждого из них на процесс деформирования разносопротивляющихся растяжению и сжатию материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Цвелодуб И. Ю.* Устойчивость в малом и ее приложения к исследованию определяющих уравнений ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 125.
3. *Цвелодуб И. Ю.* О построении определяющих уравнений установившейся ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 104.
4. *Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В.* О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1979, № 4, с. 121.
5. *Цвелодуб И. Ю.* О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах.— Динамика сплошной среды. Сб. статей. Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1976, вып. 25, с. 113.
6. *Шестериков С. А.* Об одном условии для законов ползучести.— Изв. АН СССР. ОТН, 1959, № 1, с. 131.
7. *Соснин О. В.* К вопросу о существовании потенциала ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5, с. 85.
8. *Соснин О. В.* О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1970, № 5, с. 136.
9. *Никитенко А. Ф., Соснин О. В., Торшенов Н. Г.* О разрушении вследствие ползучести.— ПМТФ, 1973, № 6, с. 140.
10. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 29.
11. *Березин А. В., Ломакин Е. В., Строков В. И., Барабанов В. Н.* Сопротивление деформированию и разрушение изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния.— Проблемы прочности, 1979, № 2, с. 60.
12. *Быков Д. Л.* Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 4, с. 58.
13. *Агахи К. А., Кузнецов В. Н.* К теории пластичности материалов, учитывающей влияние гидростатического давления.— Упругость и неупругость. Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1978, вып. 5, с. 46.
14. *Макаров Э. С., Толоконников Л. А.* Вариант построения теории пластичности дилатирующей среды.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 88.
15. *Martin J. B.* A note on the determination of an upper bound on displacement rates for steady creep problem.— J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E, 1966, No. 1, p. 216. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1966, № 1, с. 208.)
16. *Leckie F. A., Martin J. B.* Deformation bounds for bodies in a state of creep.— J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E, 1967, No. 2, p. 411. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1967, № 2, с. 169).

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.VI.1979