

УЛК 539.374

О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СЖИМАЕМОГО ИДЕАЛЬНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

МУХАМЕДИЕВ Ш. А., НИКИТИН Л. В.

Обычно при решении задач о деформировании идеального упругопластического тела для упрощения математических выкладок пренебрегают упругой сжимаемостью материала. Решения простейших задач с учетом упругой сжимаемости, проведенные численными методами [1], показывают заметное влияние сжимаемости, особенно на перемещения. Учет ее лишь в упругой области не вполне логичен и может привести к разрывным решениям. В [2] для упругосжимаемого материала при плоской деформации принято условие пластичности, соответствующее течению на вполне определенном ребре призмы Треска. Однако это условие, аналогичное условию пластичности для несжимаемого материала, не совпадает в общем случае с условием Треска и с другими классическими условиями пластичности.

Общие вопросы учета упругой сжимаемости для идеально-пластического материала в рамках деформационной теории пластичности анализировались одним из авторов ранее¹ (впервые получены зависимости деформаций от напряжений в пластической области для плоской деформации). Перенесение этих результатов на теорию типа пластического течения содержится в [3]. В данной работе приведены результаты теории плоской деформации для сжимаемого идеального упругопластического материала и рассмотрены примеры, иллюстрирующие влияние сжимаемости при однородном напряженном состоянии и изгибе балки.

1. Рассмотрим соотношения деформационной теории пластичности (теории малых упругопластических деформаций) для упругосжимаемого материала, характеризуемого в упругой области коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига μ . Всюду в дальнейшем будем предполагать, что греческие индексы принимают значения 1, 2, 3, латинские — 1, 2. Согласно деформационной теории, тензоры деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ соосны, а их главные значения ε_α и σ_α связаны соотношениями

$$\varepsilon_\alpha = K\sigma + \psi(\sigma_\alpha - \sigma) \quad (1.1)$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad K = (1 - 2\nu) / [2\mu(1 + \nu)]$$

Здесь σ — гидростатическое давление, K — коэффициент объемного сжатия.

Из (1.1) коэффициент ψ можно выразить в виде

$$\psi = \gamma / (2T) \quad (1.2)$$

$$\gamma = \sqrt{2/3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}$$

где γ — интенсивность деформаций сдвига,

$$T = \sqrt{2/3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (1.3)$$

¹ См. Мухамедиев Ш. А. Прикладные задачи механики разрушения упругопластических тел: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук: М.: Моск. физ.-тех. ин-т, 1974. 124 с.

T — интенсивность касательных напряжений. Представив ψ в виде

$$\psi = 1/(2\mu) + \varphi$$

выделим в (1.1) пластическую часть деформации $\varepsilon_{\alpha}^p = \varphi(\sigma_{\alpha} - \sigma)$.

Пластическое изменение объема равно нулю, поэтому в дальнейшем под сжимаемостью подразумевается упругое изменение объема. В линейно-упругом состоянии $\varphi = 0$. В пластическом состоянии уравнения (1.1) необходимо дополнить соотношением, определяющим φ . В случае упругоупрочняющегося материала такое соотношение можно ввести, например, заданием единой кривой связи интенсивностей T и γ . Для монотонно возрастающей функции $T(\gamma)$ это ведет к взаимно-однозначному соответствию между компонентами напряжения и деформации в состоянии пластичности при активном процессе нагружения.

Рассмотрим упругоупругоупрочняющийся материал, характеризующийся при чистом сдвиге ($\sigma = 0$) прандтлевской диаграммой связи максимального касательного напряжения в плоскости сдвига и соответствующей сдвиговой деформации. Предел текучести на сдвиг обозначим через τ_* . В качестве дополнительного к (1.1) соотношения примем условие идеальной пластичности

$$f(\sigma_{\alpha}) = 0 \quad (1.4)$$

Кусочно-гладкая функция f определяет фиксированную в трехмерном пространстве σ_{α} поверхность пластичности.

Конкретными вариантами условия (1.4), изотропными и не зависящими от давления σ , могут служить [2] условия пластичности Мизеса

$$T = \tau_* \quad (1.5)$$

условие Треска постоянства максимального касательного напряжения

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right) = \tau_* \quad (1.6)$$

и условие постоянства максимального приведенного напряжения

$$s_{\max} = \max (|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|) = \tau_* \quad (1.7)$$

Из соотношений (1.1), (1.4) нельзя выразить ψ как функцию лишь напряжений, вследствие этого невозможно однозначное определение деформаций через напряжения в состоянии пластичности. Однако при наложении некоторых ограничений на вид напряженно-деформированного состояния такое определение возможно. Пусть, например, ограничение имеет вид

$$F_1(\varepsilon_{\alpha}, \sigma_{\beta}) = 0 \quad (1.8)$$

Выражая в (1.8) ε_{α} через ψ и σ_{α} из (1.1), получим

$$F_2(\psi, \sigma_{\alpha}) = 0 \quad (1.9)$$

При $\partial F_2 / \partial \psi \neq 0$ из (1.4) и (1.9) можно выразить ψ как функцию σ_{α} , т. е. через какие-либо два главных напряжения.

Остановимся на важном частном случае условия стеснения деформаций (1.8) — условия плоской деформации

$$\varepsilon_3 = 0 \quad (1.10)$$

при котором перемещения зависят лишь от двух координат в плоскости, называемой в дальнейшем плоскостью деформации. Введем обозначения для среднего давления p и главного касательного напряжения t в плоскости деформации

$$p = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2), \quad t = 1/2|\sigma_1 - \sigma_2| \quad (1.11)$$

Из соотношения (1.1), (1.10), (1.11) видно, что при плоской деформации несжимаемого материала ($K=0$) как в состоянии упругости, так и в состоянии пластичности $\sigma_3=p$ и все три условия пластичности (1.5)–(1.7) принимают одинаковый вид

$$t=\tau_s \quad (1.12)$$

Для сжимаемого материала

$$\sigma_3=2\chi p, \quad \chi=(\psi-K)/(2\psi+K) \quad (1.13)$$

Величина χ является в некотором смысле обобщением коэффициента Пуассона. Так как для всех трех условий пластичности (1.5)–(1.7) интенсивность T ограничена, а интенсивность γ в пластической области может неограниченно возрастать, то из (1.2) и (1.13) получаем пределы изменения для ψ и χ :

$$1/(2\mu) \leq \psi < \infty, \quad \nu \leq \chi < 1/2 \quad (1.14)$$

В упругой зоне, вплоть до упруго-пластической границы, $\chi=\nu$; для развитых пластических деформаций χ стремится к $1/2$. С учетом (1.11) и (1.13) интенсивность T запишем в форме

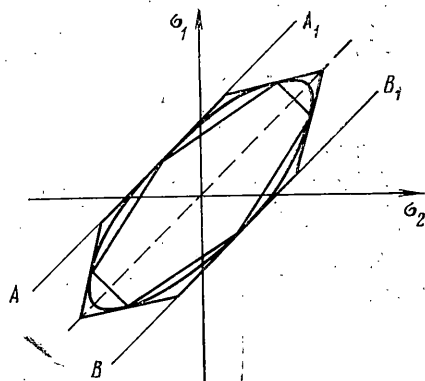
$$T=T(\sigma_i, \chi)=[t^2+1/3(1-2\chi)^2 p^2] \quad (1.15)$$

Используя (1.13), уравнение поверхности пластичности (1.4) можно представить в виде

$$g(\sigma_i, \chi)=0 \quad (1.16)$$

Учитывая существенную двумерность процесса деформирования при плоской деформации, поверхность пластичности (1.16) естественно рассматривать в двумерном пространстве главных напряжений σ_i . Как видно из (1.16), поверхность пластичности уже не фиксирована в двумерном пространстве σ_i , а параметрически зависит от коэффициента χ , определяемого видом напряженного состояния. Следовательно, поверхность пластичности может уже рассматриваться как поверхность нагружения (упрочнения), а коэффициент χ — как параметр упрочнения. Упругой области соответствуют отрицательные значения функций нагружения (1.16). Первоначальное положение поверхности нагружения определяется из (1.16) при $\chi=\nu$. Таким образом, при плоской деформации учет упругой сжимаемости придает идеально пластическому материалу свойства, характерные для упрочняющегося.

2. Проанализируем условия пластичности (1.5) и (1.7) для плоской деформации сжимаемого идеально пластического материала. Результаты анализа представим графически в плоскости главных напряжений σ_i . На фиг. 1 представлено взаимное расположение кривых нагружения при всех трех условиях пластичности для одного и того же значения параметра χ . Кривая нагружения Мизеса, представляющая эллипс с главными осями, направленными по прямым $\sigma_1=\sigma_2$ и $\sigma_1=-\sigma_2$, вписана в шестиугольник Треска и описана около шестиугольника максимального приведенного напряжения. Линии AA_1 и BB_1 , описываемые уравнениями $\sigma_1-\sigma_2=\pm 2\tau_s$, представляют вырожденное для несжимаемого материала условие пластичности (1.12). При стремлении параметра χ к $1/2$ кривая нагружения сжимаемого материала вытягивается вдоль линии $\sigma_1=\sigma_2$, область внутри этой кривой стремится к области, заключенной между линиями пластич-



Фиг. 1

ности несжимаемого материала. Этот процесс в осях p, t изображен на фиг. 2 для каждого из условий (1.5)–(1.7), причем $\chi < \chi_0$ и введено обозначение $\tau_s^0 = \tau_s / (1 - 2\chi)$.

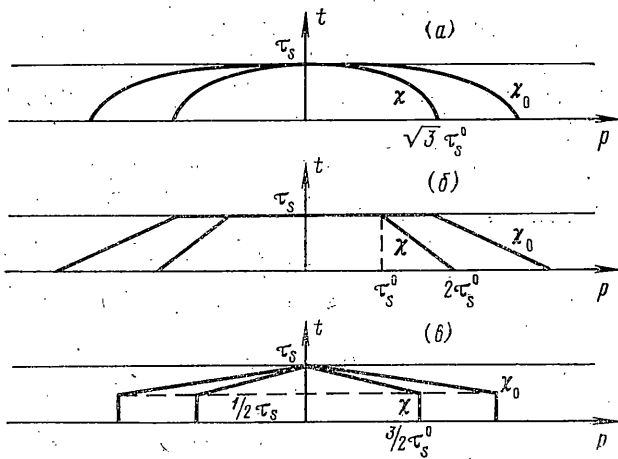
Рассмотрим условие пластичности Мизеса (фиг. 2, а). Обозначим T при $\chi = \nu$ через T_e . В упругом состоянии $T_e < \tau_s$. Из (1.5), (1.14) и (1.15), очевидно, следует, что в состоянии пластичности

$$T_e \geq \tau_s > t \quad (2.1)$$

Из условия пластичности Мизеса и (1.3) можно выразить σ_3 через напряжения в плоскости деформации

$$\sigma_3 = 2\chi p = p \pm \sqrt{3(\tau_s^2 - t^2)} \quad (2.2)$$

Используя (2.1), легко показать, что для выполнения неравенства (1.14) необходимо и достаточно в (2.2) выбрать знак, противоположный



Фиг. 2

знаку величины давления p . Таким образом, в пластической области из (1.13) найдем

$$\sigma_3 = p - \text{sign}(p) \sqrt{3(\tau_s^2 - t^2)}, \quad \psi = \frac{K}{2} \left(\frac{\sqrt{3}|p|}{\sqrt{\tau_s^2 - t^2}} - 1 \right) \quad (2.3)$$

Аналогично получаются результаты и для других условий пластичности.

Для условия Треска (фиг. 2, б) в состоянии пластичности при $t < \tau_s$:

$$\sigma_3 = p - \text{sign}(p) (2\tau_s - t), \quad \psi = \frac{K}{2} \left(\frac{3|p|}{2\tau_s - t} - 1 \right) \quad (2.4)$$

При $t = \tau_s$ условие пластичности Треска зависит лишь от напряжений в плоскости деформации, и поэтому величины σ_3 и ψ через эти напряжения однозначно определены быть не могут.

В пластическом состоянии для условия максимального приведенного напряжения (фиг. 2, в) в случае $2t \leq \tau_s$ величины σ_3 и ψ имеют вид

$$\sigma_3 = p - \text{sign}(p) \frac{3}{2}\tau_s, \quad \psi = \frac{K}{2} \left(\frac{|p|}{\tau_s} - 1 \right) \quad (2.5)$$

а в случае $\tau_s \leq 2t < 2\tau_s$:

$$\sigma_3 = p - \text{sign}(p) 3(\tau_s - t), \quad \psi = \frac{K}{2} \left(\frac{|p|}{\tau_s - t} - 1 \right) \quad (2.6)$$

Анализ всех трех условий пластичности (1.5)–(1.7) показывает, что в отличие от несжимаемого материала при плоской деформации сжимаемого идеального упругопластического материала, за исключением состояния чистого сдвига ($p=0$) и случая $t=\tau_s$ при условии Треска, можно определить в пластическом состоянии σ_3 и ψ через компоненты тензора напряжения в плоскости деформации. Таким образом, через эти напряжения однозначно определяются и деформации. Используя (1.1) и (1.13), получаем для главных компонент

$$\varepsilon_i = \psi(\sigma_i - \sigma_3) \quad (2.7)$$

где для различных условий пластичности ψ и σ_3 определяются из (2.3)–(2.6).

3. Замкнутая система уравнений для плоской деформации сжимаемого идеального упругопластического материала получается, если к уравнениям равновесия и совместности деформаций добавить соотношение (2.7). Можно показать, что ее характеристики в декартовой системе координат x_1, x_2 определяются из уравнения

$$\left[b_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{km}} + \frac{\psi(\psi + 2K)}{2\psi + K} \delta_{ij} \delta_{km} \right] dx_i dx_j dx_k dx_m = 0$$

$$b_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} p \left[1 - \frac{3K^2}{(2\psi + K)^2} \right] \quad (3.1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Рассмотрим уравнение (3.1) как алгебраическое относительно dx_2/dx_1 . Очевидно, что для любого ψ из (2.3)–(2.6) оно не имеет действительных корней. Таким образом, полная система уравнений сжимаемого идеального пластического материала для плоской деформации, так же как и для линейно-упругого материала ($\partial\psi/\partial\sigma_{ij}=0$), является системой эллиптического типа. Исключение составляют состояние $t=\tau_s$ при условии Треска и состояние чистого сдвига $p=0$ при всех условиях пластичности. В этих случаях из общей системы выделяется система второго порядка в напряжениях гиперболического типа. Таким образом, при плоской деформации сжимаемого неупрочняющегося материала возникает возможность постановки граничной задачи в напряжениях для чисто пластического состояния тела.

4. Аналогичным образом можно проанализировать и более общее, чем (1.10), условие плоской деформации $\varepsilon_3 = \varepsilon^0 = \text{const}$. В этом случае выражение главных компонент ε_i через σ_i будет иметь вид $\varepsilon_i = \psi(\sigma_i - \sigma_3) + \varepsilon^0$, где, например, для условия пластичности Мизеса (1.5)

$$\sigma_3 = p + \text{sign}(\varepsilon^0 - Kp) \sqrt{3(\tau_s^2 - t^2)}$$

$$\psi = \frac{\sqrt{3} |\varepsilon^0 - Kp|}{2 \sqrt{\tau_s^2 - t^2}} - \frac{K}{2}$$

Уравнение характеристик сохраняет свой вид (3.1), в котором коэффициенты b_{ij} теперь равны

$$b_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left[p + \frac{3K(\varepsilon^\circ - Kp)}{(2\psi + K)^2} \right]$$

Сделанные выше заключения о типе системы уравнений сохраняют свою силу, если помнить, что условие чистого сдвига $p=0$ надо заменить на условие $p=\varepsilon^\circ/K$.

Аналогично деформационной теории пластичности случай плоской деформации может быть проанализирован и для теории пластического течения Прандтля—Рейсса, в которой приращения деформаций в главных осях имеют вид

$$d\varepsilon_\alpha = d\varepsilon_\alpha^\circ + d\lambda(\sigma_\alpha - \sigma) \quad (4.1)$$

Здесь $d\varepsilon_\alpha^\circ$ — приращения упругих деформаций, второе слагаемое — приращения пластических деформаций.

Примем в качестве дополнительного соотношения условие пластичности Мизеса (1.5). Используя (4.1), из условия плоской деформации $d\varepsilon_3=0$ легко получить дифференциальное уравнение относительно σ_3 , решение которого имеет вид

$$\sigma_3 = \exp\left(-\frac{2}{3}E\lambda\right) \left[2\nu p + \int_0^\lambda \frac{2}{3}E p \exp\left(\frac{2}{3}E\lambda\right) d\lambda \right] \\ E = 2\mu(1+\nu) \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что, как и в деформационной теории пластичности, на упругопластической границе ($\lambda=0$) $\sigma_3=2\nu p$, а для развитых пластических деформаций ($\lambda \rightarrow \infty$) σ_3 стремится к p . При сравнении (4.2) и (2.3) можно получить уравнения для $d\lambda$, решение которого, справедливое для активного процесса нагружения, имеет вид

$$d\lambda = \frac{3}{2E} \left[\frac{d(p-R)}{R} - \frac{2\nu dw}{R_0 - 2\nu W} \right] \quad (4.3)$$

$$dw = \exp\left(-\int_0^p \frac{dp}{R}\right) dp, \quad W = \int_0^p dw, \quad R = \text{sign} \sqrt{3(\tau_s^2 - t^2)}$$

где R_0 — значение R в момент перехода в пластическое состояние ($\lambda=0$), p — некоторый монотонно возрастающий параметр, характеризующий процесс нагружения.

При помощи полученных выражений (2.3) и (4.3) в рамках теории Прандтля—Рейсса для сжимаемого идеального упругопластического материала можно однозначно определить приращения деформаций в пластическом состоянии через напряжения в плоскости деформации, их приращения и историю нагружения.

5. Проиллюстрируем некоторые особенности деформирования рассматриваемого материала при плоской деформации на простейшем примере — элементе материала, подверженном двухосному растяжению напряжениями σ_1 и $\sigma_2 = m\sigma_1$, где $\sigma_1 > 0$, $0 \leq m < 1$. При этом $p = \sigma_1(1+m)/2$, $t = \sigma_1(1-m)/2$. Предполагается, что коэффициент m остается постоянным в течение всего рассматриваемого процесса деформирования материала. В дальнейшем величины напряжения σ_i будем относить к τ_s , деформации ε_i — к $\tau_s/(2\mu)$, коэффициента объемного сжатия K — к $1/(2\mu)$.

Значения величин, характеризующих поведение несжимаемого материала, будут отмечены индексом (n) . Поведение элемента или конструкции из такого материала не зависит от того, какое из условий пластичности (1.5)–(1.7) используется. Здесь через ϵ_1^* и σ_1^* обозначим значения соответствующих величин в момент перехода в пластическое состояние. Из (1.12) следует

$$\sigma_{1(n)}^* = 2/(1-m).$$

Достижение напряжением $\sigma_{1(n)}$ значения $\sigma_{1(n)}^*$ означает потерю несущей способности элемента. В рассматриваемом элементе в упругом состоянии выполняется равенство $\epsilon_1 = [1 - (1+m)v]\sigma_1$, справедливое при $v \neq 1/2$ и для величин ϵ_1^* , σ_1^* . При анализе пластического состояния элемента используются соответствующие формулы п. 2.

При условии пластичности Мизеса элемент переходит в пластическое состояние при

$$\sigma_1^* = 2[(1-m)^2 + 1/3(1+m)^2(1-2v)^2]^{-1/2}$$

В пластическом состоянии $\sigma_1^* \leq \sigma_1 < \sigma_{1(n)}^*$:

$$\epsilon_1 = \frac{K}{2} \left(\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{1-t^2}} - 1 \right) [t + \sqrt{3(1-t^2)}]$$

Несущая способность элемента из сжимаемого материала исчерпывается ($\epsilon_1 \rightarrow \infty$) при том же значении $\sigma_1 = \sigma_{1(n)}^*$, что и для несжимаемого материала. На фиг. 3 показаны зависимости $\sigma_1(\epsilon_1)$ для элемента из несжимаемого материала и для двух элементов из сжимаемого материала с коэффициентами Пуассона ν_0 и ν при $\nu_0 > \nu$.

Для условия Треска (1.6) при $1/2 > \nu \geq m/(1+m)$ поведение элемента не отличается от поведения элемента из несжимаемого материала. Для $\nu < m/(1+m)$ в интервале пластического нагружения $\sigma_1^* \leq \sigma_1 < \sigma_{1(n)}^*$:

$$\epsilon_1 = K\{[3p/(2-t)] - 1\} \quad (5.1)$$

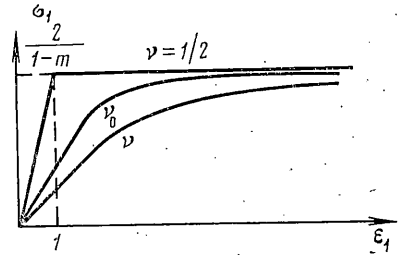
Однако в отличие от условия Мизеса кривая $\sigma_1(\epsilon_1)$ не стремится асимптотически к прямой $\sigma_1 = \sigma_{1(n)}^*$, а, начиная с деформации в (5.1), равной $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_{1(n)}^*)$, совпадает с этой прямой.

Для условия пластичности максимального приведенного напряжения (1.7) при $1/2 > \nu \geq (2m-1)/(m+1)$ в пластическом состоянии кривая $\sigma_1(\epsilon_1)$ аналогично случаю условия Мизеса асимптотически стремится к $\sigma_1 = \sigma_{1(n)}^*$ (фиг. 3), причем

$$\epsilon_1 = 1/2 K\{[p/(1-t)] - 1\} (3-2t) \quad (5.2)$$

Для $\nu < (2m-1)/(m+1)$ элемент переходит в пластическое состояние при $\sigma_1^* = 3(1+m)^{-1}(1-2\nu)^{-1}$. В этом случае при продолжающемся нагружении в интервале $\sigma_1^* < \sigma_1 < 1/(1-m)$ зависимость $\sigma_1(\epsilon_1)$ имеет вид $\epsilon_1 = 1/2 K(2p-1)(2t+3)$, а при $1/(1-m) \leq \sigma_1 < \sigma_{1(n)}^*$ принимает вид (5.2).

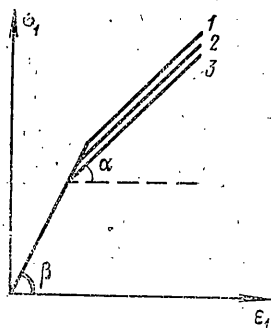
Таким образом, для сжимаемого материала потеря несущей способности элемента происходит при том же уровне нагрузки, что и для несжимаемого материала. Характер деформирования для всех условий пластичности, кроме условия Треска, аналогичен характеру деформирования упроч-



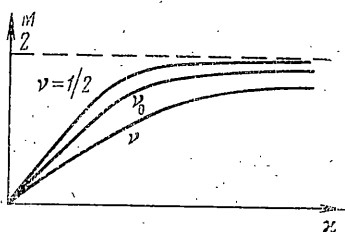
Фиг. 3

нящегося материала с горизонтальной асимптотой $\sigma_1 = \sigma_{1(n)}^*$. При этом переход в пластическое состояние происходит раньше, чем у несжимаемого материала, а деформации в этом состоянии для элементов с различной степенью сжимаемости существенно отличаются друг от друга при одном и том же уровне нагрузки.

Рассмотрим равностороннее нагружение в плоскости деформации $\sigma_1 = \sigma_2$. В этом случае как для сжимаемого, так и для несжимаемого материала несущая способность исчерпывается при бесконечно большом σ_1 . При этом элемент из несжимаемого материала вплоть до потери несущей способности остается в упругом состоянии с $\varepsilon_{1(n)} = 0$, а для элемента из сжимаемого



Фиг. 4



Фиг. 5

материала зависимость $\sigma_1(\varepsilon_1)$ вырождается в характерную для линейно-упрочняющегося материала билинейную зависимость (фиг. 4). Угол наклона α участка линейного упрочнения к оси деформации одинаков для всех трех рассматриваемых условий пластичности, причем $\operatorname{tg} \alpha = 2/(3K)$.

Для угла β наклона упругого участка $\operatorname{tg} \beta = 1/(1-2\nu)$. Переход в пластичность происходит для условия Мизеса при $\varepsilon_1^* = \sqrt{3}$, для условия Треска — при $\varepsilon_1^* = 2$, для условия максимального приведенного напряжения — при $\varepsilon_1^* = 3/2$.

6. Рассмотрим упругопластический изгиб балки из сжимаемого материала в условиях плоской деформации. В плоскости деформации введем декартову систему координат x_1, x_2 с осью x_1 , направленной по срединной линии балки. Примем обычные предположения $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, $\varepsilon_{11} = \kappa x_2$, $\kappa = -d^2 u_2 / dx_1^2$, где u_2 — перемещение по оси x_2 .

В дополнение к обезразмериванию σ_i и K , принятому в п. 5, отнесем величины размерности длины к полуширине балки h , а кривизну κ — к $\tau_s / (2\mu h)$. Изгибающий момент M вычисляется относительно единицы толщины по оси x_3 и условно считается положительным при положительном κ .

Воспользуемся условием пластичности максимального приведенного напряжения (1.7). Нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче в пластической области $2\sigma_1 - \sigma_3 = 3$. В упругом состоянии $\sigma_1 = \kappa x_2 / (1-\nu)$. Пластические зоны возникают впервые на краях балки при $|\kappa|^* = 3(1-\nu)/(2-\nu)$, а в процессе нагружения связь между κ и расстоянием ξ от оси балки до пластической зоны имеет вид $\xi = 3(1-\nu) / [(2-\nu)|\kappa|]$.

При $|\kappa| > |\kappa|^*$ напряжение σ_1 распределено по x_2 следующим образом:

$$\sigma_1 = \kappa x_2 / (1-\nu) \quad \text{при } |x_2| \leq \xi$$

$$\sigma_1 = \kappa x_2 / (2K) + \operatorname{sign}(\kappa x_2) \{2 - \sqrt{1 + [\kappa x_2 / (2K)]^2}\} \quad \text{при } |x_2| > \xi$$

До наступления пластичности момент M и кривизна κ связаны линейно-

НЫМ СООТНОШЕНИЕМ

$$M = \int_{-1}^1 \sigma_1 x_2 dx_2 = \frac{2\kappa}{3(1-\nu)}$$

а при $|\kappa| > |\kappa|$ * зависимость $M(\kappa)$ имеет вид

$$M = \frac{\kappa}{3K} \left[1 - \left(\sqrt{1 + \frac{4K^2}{\kappa^2}} \right)^3 \right] + \\ + 2 \operatorname{sign}(\kappa) \left[1 + \frac{11 - 82\nu + 138\nu^2 - 82\nu^3 + 11\nu^4}{3\kappa^2 (2-\nu)^2 (1+\nu)^2} \right] \quad (6.1)$$

При $\nu = 1/2$ формула (6.1) переходит в аналогичную зависимость для несжимаемого материала [4].

На фиг. 5 изображена зависимость обобщенной силы (изгибающего момента M) от обобщенного перемещения (кривизны κ) для балки из несжимаемого материала и для двух балок из сжимаемого материала с коэффициентами Пуассона ν и ν_0 при $\nu_0 > \nu$. Так же, как и в случае однородного напряженного состояния, предельное значение обобщенной силы не зависит от степени сжимаемости. При этом для каждого фиксированного значения обобщенной силы величина обобщенного перемещения тем больше, чем меньше ν . Для балки из сжимаемого материала пластические зоны возникают раньше, а по размеру они больше, чем при том же M у несжимаемого материала.

Приведенные в данной работе зависимости деформаций от напряжений дают возможность эффективно развить метод малого параметра для решения задач о плоской деформации сжимаемого идеального упругопластического материала, если известно решение соответствующей задачи для несжимаемого материала. Кроме того, они позволяют ставить и решать граничные задачи теории пластичности в напряжениях, что дает возможность при численном решении [4] получать хорошую точность в окрестностях особых точек без использования априорных предположений о характере сингулярности деформаций в этих окрестностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
3. Ивлев Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
4. Мухамедиев Ш. А., Никитин Л. В. Некоторые особенности реализации метода локальных вариаций. — Прикладная математика и программирование. Сб. статей. Кишинев: Штиинца, 1975, вып. 13, с. 92.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1980