

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ
КОНТАКТНОЙ (СМЕШАННОЙ) ЗАДАЧИ
ОБ УДАРЕ ТУПЫМ КЛИНОМ
ПО СЛОИСТОЙ ПЛИТЕ**

РИМСКИЙ В. К., САБОДАШ П. Ф.

Отличие композиционных материалов от традиционных металлических материалов состоит, как известно, в том, что они обладают высокой удельной прочностью. Этот показатель в десять раз может превышать соответствующие значения для средних сортов стали [1].

Композиционные материалы характеризуются также удельной жесткостью, заметно уступающей аналогичному показателю для сталей и титановых сплавов. В этой связи проводится работа по созданию высокомодульных материалов, армированных волокнами углерода, бора и их сочетаний, что к тому же расширяет возможности создания конструкционных материалов с наперед заданными свойствами [1].

Вследствие этого слоисто-неоднородное строение современных инженерных конструкций и сооружений является ведущим фактором, определяющим их работоспособность в условиях действия нестационарных внешних нагрузок. Поэтому прогнозирование динамических волновых процессов в деформируемых слоисто-неоднородных средах путем математического моделирования с целью определения характера возможных повреждений представляет помимо чисто научного интереса важное прикладное значение.

В [2] при помощи конечно-разностной процедуры численно решена задача о распространении волн напряжений в неоднородном упругом слое, армированном вертикальными неоднородностями. Слой общей постоянной толщины образован двумя чередующимися вертикальными слоями различной толщины и с различными механическими свойствами. Композиционная плита, представляющая собой периодическую в горизонтальном направлении структуру, на верхней поверхности нагружена нестационарным импульсом давления, а ее нижняя граница жестко закреплена. Исследование выполнено в рамках физической и геометрической нелинейности.

Смешанная динамическая (контактная) задача об ударе с постоянной скоростью по упругому однородному полупространству жестких клиновидных штампов и штампов в форме параболоидов вращения на основе конечно-разностной аппроксимации системы динамических уравнений Ламе исследовалась в [3]. В [4] численно анализируются процессы распространения и дифракции упругих волн в полуполосе, составленной из двух разнородных материалов, для исследования прочности соединения двух материалов с различными плотностями.

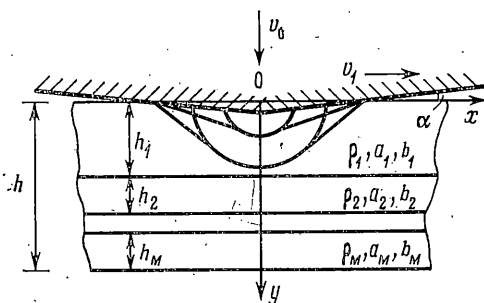
В настоящей работе разработана методика численного решения начально-краевой задачи об ударе с малой постоянной скоростью жесткого тупого клина по поверхности пакета, состоящего из произвольного числа упругих слоев. Получена явная разностная схема, позволяющая определять значения напряжений и скоростей частиц как во внутренних точках возмущенной упругими фронтами области, так и в точках границы.

В виде графиков представлены результаты изменения волновых полей в двухслойной (биметаллической) плите при заданном режиме ударного нагружения. Анализ числовой информации позволил исследовать динамические эффекты концентрации напряжений в окрестности контакта разнородных слоев и вблизи свободной поверхности.

1. Подстановка контактной задачи и вывод разностной системы уравнений. Пусть абсолютно жесткий штамп, имеющий форму тупого двугранного угла (клина), в начальный момент времени $t=0$ своей вершиной нормально сталкивается с поверхностью слоисто-неоднородной упругой плиты,

состоящей из пакета произвольного числа изотропных слоев и занимающей в прямоугольных координатах x, y, z область $0 \leq y \leq h, -\infty < x, z < \infty$. Каждый линейно-упругий слой характеризуется плотностью материала ρ_k , скоростью продольной волны a_k , скоростью поперечной волны b_k и толщиной h_k ($k=1-M, h_1+h_2+\dots+h_M=h$).

Симметричный относительно оси y нормальный поперечный удар происходит с постоянной скоростью v_0 , значительно меньшей скорости a_0 ($v_0 \ll a_0, a_0 = \min_k a_k$). Для металлических плит абсолютная величина скорости v_0 имеет порядок 7–15 м/с. Предполагается, что граница области неострывного контакта взаимодействующих тел перемещается с постоянной скоростью v_1 , которая однозначно определяется только углом раствора клина и скоростью v_0 ($v_1 = v_0 \operatorname{ch} g \alpha, \alpha$ — угол между поверхностью $y=0$ и образующей клина).



Фиг. 1

На фиг. 1 в плоскости xu показаны геометрия задачи и начальная фаза развития упругих волн в первом слое при $v_1 = 1,5a_1$.

По отношению к свойствам материала верхнего слоя можно рассматривать три различных режима соударения клина с многослойной

плитой: сверхзвуковой $v_1 > a_1$, транзвуковой $b_1 < v_1 < a_1$ и дозвуковой $v_1 < b_1$.

Противоположная (тыльная) сторона плиты $y=h$ в процессе всего интервала низкоскоростного контактного взаимодействия с ударником остается свободной от внешних усилий или каких-либо иных связей.

Задача заключается в определении внутри слоистой системы полей напряжений и скоростей, обусловленных ударно-волновым взаимодействием клина с поверхностью плиты в моменты времени $t > 0$, близкие к началу соударения.

Математической моделью процесса при отсутствии в зоне контакта местной пластической деформации является линейная система точных уравнений плоской динамической задачи теории упругости, записанных для внутренних точек каждого слоя в безразмерной форме относительно напряжений и массовых скоростей

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y}, & \rho_k \frac{\partial v^{(k)}}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial t} &= \rho_k a_k^2 \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \rho_k (a_k^2 - 2b_k^2) \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial t} &= \rho_k (a_k^2 - 2b_k^2) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \rho_k a_k^2 \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial t} &= \rho_k b_k^2 \left(\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \right) \\ a_k &= a_k^\circ / a_m^\circ, & b_k &= b_k^\circ / a_m^\circ, & \rho_k &= \rho_k^\circ / \rho_m^\circ \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ — компоненты вектора скорости (по x и y соответственно), разделенные на максимальную скорость распространения продольных волн в плите a_m° ($a_m^\circ = \max_k a_k^\circ$); $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_y^{(k)}$, $\sigma_{xy}^{(k)}$ — составляющие тензора напряжений, отнесенные к постоянной величине $\rho_m a_m^{\circ 2}$; все линейные размеры разделены на толщину слоистого пакета h° ; время t нормируется относительно множителя h°/a_m° (значок градуса относится к размерным величинам).

В принятых обозначениях граничные условия задачи с учетом сцепления между штампом и поверхностью плиты сводятся к заданию нормальной составляющей вектора скорости частиц, равной скорости удара, и касательной компоненты тензора напряжений на расширяющейся во времени площадке контакта клина и плиты; вне контакта на лицевой поверхности, так же как и на наружной стороне M -го слоя, внешние нагрузки отсутствуют

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_0, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = f \sigma_y^{(1)} \quad \text{при } y=0, \quad |x| < v_1 t \\ \sigma_y^{(1)} &= \sigma_{xy}^{(1)} = 0 \quad \text{при } y=0, \quad v_1 t \leq |x| < \infty \\ \sigma_y^{(M)} &= \sigma_{xy}^{(M)} = 0 \quad \text{при } y=1, \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (1.2)$$

где f — коэффициент сухого трения.

Перенос граничных условий в области контакта на первоначально невозмущенную плоскую поверхность требует ограничения параметра α малыми значениями ($\cos \alpha \sim 1$).

В состав многослойной плиты могут одновременно входить слои с различными свойствами контактных поверхностей. На плоских границах раздела слоистой среды $y = y_k$ ($y_k = h_1 + h_2 + \dots + h_k$, $k = 1 \div M-1$) при идеальном механическом контакте смежных слоев выполняются следующие условия:

$$\sigma_y^{(k)} = \sigma_y^{(k+1)}, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy}^{(k+1)}, \quad u^{(k)} = u^{(k+1)}, \quad v^{(k)} = v^{(k+1)} \quad (1.3)$$

Условия совместной работы k -го и $(k+1)$ -го слоев при их относительном проскальзывании задаем в виде

$$\sigma_y^{(k)} = \sigma_y^{(k+1)}, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = f_k^- \sigma_y^{(k)}, \quad \sigma_{xy}^{(k+1)} = f_{k+1}^+ \sigma_y^{(k+1)}, \quad v^{(k)} = v^{(k+1)} \quad (1.4)$$

(в дальнейшем индекс k , соответствующий порядковому номеру слоя, опускается).

При $t=0$ фиксируется нулевое начальное состояние, которое является началом эволюции ударно-волнового процесса в плите, инициированного нормальным поперечным ударом жесткого штампа.

Для определения напряжений и скоростей частиц в многослойной плите, которая выводится из состояния статического равновесия внезапно приложенной ударной нагрузкой в предположении, что механический контакт между ударником и преградой на интервале соударения не нарушается, следует проинтегрировать гиперболическую систему дифференциальных уравнений (1.1) при заданных граничных условиях (1.2)–(1.4) и нулевых начальных данных.

Отметим некоторые особенности сформулированной задачи. Ее решение в силу линейности определяющих уравнений пропорционально значению скорости удара v_0 . Нормальные напряжения σ_x , σ_y и скорость v симметричны ($\varphi(x) = \varphi(-x)$), а тангенциальное напряжение σ_{xy} и скорость u антисимметричны относительно оси y ($\varphi(x) = -\varphi(-x)$).

Для того чтобы можно было применить численный метод, необходимо ограничить область интегрирования в горизонтальном направлении и за-

даться некоторыми краевыми условиями на границе $x=l=\text{const}$. Формулы моделирования процесса прохождения волн через ограничительный контур $x=l$, вырезающий из бесконечной области представительную конечную часть, будут приведены после построения разностной схемы.

В соответствии с [5] образуем равномерную сетку, на которой ведется расчет, разбив область $0 < x < l$, $0 < y < 1$ двумя семействами параллельных и равноотстоящих прямых линий на прямоугольные ячейки со сторонами h_x и h_y вдоль координатных осей x и y . Разбиение выбирается таким образом, чтобы горизонтальные границы ячеек, примыкающих к поверхностям соединения, совпадали с плоскостями контакта разнородных материалов. Присвоим ячейке, образованной прямыми $x_i = ih_x$, $y_j = jh_y$, $x_{i-1} = (i-1)h_x$ и $y_{j-1} = (j-1)h_y$ ($i=1, 2, \dots, n, n+1$; $j=1, 2, \dots, p$), номер $(i-1/2, j-1/2)$. Каждой ячейке ставятся в соответствие параметры $\rho_{j-1/2}$, $a_{j-1/2}$, $b_{j-1/2}$, которые не зависят от индекса i . Функции напряжений и скоростей, описывающие динамическую реакцию (отклик) слоистой преграды на момент времени t , считаются постоянными в пределах каждой ячейки $x_{i-1} < x < x_i$, $y_{j-1} < y < y_j$, и этим постоянным присваивается номер соответствующей ячейки. Скорости и напряжения, определенные в точках границ ячеек, обозначаются через вспомогательные («большие») величины U , V , Σ_x , Σ_y , Σ_{xy} .

Отдельный цикл расчета, который ведется последовательно в порядке возрастания номеров временных слоев, заключается в том, что по известным на данный момент времени $t=t_0$ значениям вектора $W_{i-1/2, j-1/2} = (u, v, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})_{i-1/2, j-1/2}$ определяется вектор такой же размерности $W^{i-1/2, j-1/2}$ с постоянными компонентами в пределах каждой ячейки на момент времени $t=t_0+\tau$, где τ — шаг по времени (значениям функций на последующем временном слое присваиваются номера ячеек в виде верхних индексов).

Используя для аппроксимации первых производных по пространственным координатам центральные разности и разрешая затем разностные уравнения относительно составляющих вектора $W^{i-1/2, j-1/2}$, заменим дифференциальные уравнения (1.1) их конечно-разностными аналогами

$$\begin{aligned}
 u^{i-1/2, j-1/2} &= u_{i-1/2, j-1/2} + \frac{\tau}{\rho_{j-1/2}} \left[\frac{\Sigma_x^{i, j-1/2} - \Sigma_x^{i-1, j-1/2}}{h_x} + \frac{\Sigma_{xy}^{i-1/2, j} - \Sigma_{xy}^{i-1/2, j-1}}{h_y} \right] \\
 v^{i-1/2, j-1/2} &= v_{i-1/2, j-1/2} + \frac{\tau}{\rho_{j-1/2}} \left[\frac{\Sigma_{xy}^{i, j-1/2} - \Sigma_{xy}^{i-1, j-1/2}}{h_x} + \frac{\Sigma_y^{i-1/2, j} - \Sigma_y^{i-1/2, j-1}}{h_y} \right] \\
 \sigma_x^{i-1/2, j-1/2} &= \sigma_x^{i-1/2, j-1/2} + \tau \rho_{j-1/2} \left[a_{j-1/2}^2 \frac{U^{i, j-1/2} - U^{i-1, j-1/2}}{h_x} + \right. \\
 &\quad \left. + (a_{j-1/2}^2 - 2b_{j-1/2}^2) \frac{V^{i-1/2, j} - V^{i-1/2, j-1}}{h_y} \right] \\
 \sigma_y^{i-1/2, j-1/2} &= \sigma_y^{i-1/2, j-1/2} + \tau \rho_{j-1/2} \left[(a_{j-1/2}^2 - 2b_{j-1/2}^2) \frac{U^{i, j-1/2} - U^{i-1, j-1/2}}{h_x} + \right. \\
 &\quad \left. + a_{j-1/2}^2 \frac{V^{i-1/2, j} - V^{i-1/2, j-1}}{h_y} \right] \\
 \sigma_{xy}^{i-1/2, j-1/2} &= \sigma_{xy}^{i-1/2, j-1/2} + \tau \rho_{j-1/2} b_{j-1/2}^2 \left[\frac{V^{i, j-1/2} - V^{i-1, j-1/2}}{h_x} + \frac{U^{i-1/2, j} - U^{i-1/2, j-1}}{h_y} \right]
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для определения «больших» величин, входящих в соотношения (1.5), воспользуемся по аналогии с [5] покоординатным расщеплением определяющей системы уравнений (1.1). При выполнении условий жесткого сцеп-

ления разнородных слоев соответствующие расчетные формулы принимают вид

$$\begin{aligned}
 U^{i,j-1/2} &= \frac{1}{2} \left[u_{i+1/2, j-1/2} + u_{i-1/2, j-1/2} + \frac{\sigma_x t+1/2, j-1/2 - \sigma_x t-1/2, j-1/2}{\rho_{j-1/2} a_{j-1/2}} \right] \quad (1.6) \\
 \Sigma_x^{i,j-1/2} &= \frac{1}{2} \left[\sigma_x i+1/2, j-1/2 + \sigma_x i-1/2, j-1/2 + (u_{i+1/2, j-1/2} - u_{i-1/2, j-1/2}) \rho_{j-1/2} a_{j-1/2} \right] \\
 V^{i,j-1/2} &= \frac{1}{2} \left[v_{i+1/2, j-1/2} + v_{i-1/2, j-1/2} + \frac{\sigma_{xy} i+1/2, j-1/2 - \sigma_{xy} i-1/2, j-1/2}{\rho_{j-1/2} b_{j-1/2}} \right] \\
 \Sigma_{xy}^{i,j-1/2} &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{xy} i+1/2, j-1/2 + \sigma_{xy} i-1/2, j-1/2 + (v_{i+1/2, j-1/2} - v_{i-1/2, j-1/2}) \rho_{j-1/2} b_{j-1/2} \right] \\
 U^{i-1/2, j} &= u_{i-1/2, j+1/2} + \left[\frac{(u_{i-1/2, j-1/2} - u_{i-1/2, j+1/2}) \rho_{j-1/2} b_{j-1/2} + \sigma_{xy} i-1/2, j+1/2 - \sigma_{xy} i-1/2, j-1/2}{\rho_{j-1/2} b_{j-1/2} + \rho_{j+1/2} b_{j+1/2}} \right] \\
 \Sigma_{xy}^{i-1/2, j} &= \sigma_{xy} i-1/2, j+1/2 + \rho_{j+1/2} b_{j+1/2} (u_{i-1/2, j+1/2} - U^{i-1/2, j}) \\
 V^{i-1/2, j} &= v_{i-1/2, j+1/2} + \left[\frac{(v_{i-1/2, j-1/2} - v_{i-1/2, j+1/2}) \rho_{j-1/2} a_{j-1/2} + \sigma_y i-1/2, j+1/2 - \sigma_y i-1/2, j-1/2}{\rho_{j-1/2} a_{j-1/2} + \rho_{j+1/2} a_{j+1/2}} \right] \\
 \Sigma_y^{i-1/2, j} &= \sigma_y i-1/2, j+1/2 + \rho_{j+1/2} a_{j+1/2} (v_{i-1/2, j+1/2} - V^{i-1/2, j}) \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, p-1)
 \end{aligned}$$

Система равенств (1.5), (1.6) дополняется соотношениями для вычисления «больших» величин на границах расчетной области. Очевидно, что значения некоторых из этих величин могут быть получены непосредственно из граничных условий (1.2) или условий симметрии, а остальные — решением относительно римановых инвариантов. В итоге получаются следующие расчетные зависимости:

$$V^{i-1/2, 0} = v_0 \text{ при } x_i \leq v_1 t; \quad V^{i-1/2, 0} = \frac{v_0 (v_1 t - x_{i-1})}{h_x} \text{ при } x_{i-1} < v_1 t < x_i$$

при $x_{i-1} < v_1 t$:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_y^{i-1/2, 0} &= \sigma_y i-1/2, 1/2 + (v_{i-1/2, 1/2} - V^{i-1/2, 0}) \rho_{1/2} a_{1/2} \\
 \Sigma_{xy}^{i-1/2, 0} &= f \Sigma_y^{i-1/2, 0}
 \end{aligned}$$

$$U^{i-1/2, 0} = u_{i-1/2, 1/2} + \frac{\sigma_{xy} i-1/2, 1/2 - \Sigma_{xy}^{i-1/2, 0}}{\rho_{1/2} b_{1/2}} \quad (1.7)$$

при $x_{i-1} \geq v_1 t$;

$$\Sigma_y^{i-1/2, 0} = \Sigma_{xy}^{i-1/2, 0} = 0$$

$$U^{i-1/2, 0} = u_{i-1/2, 1/2} + \frac{\sigma_{xy} i-1/2, 1/2}{\rho_{1/2} b_{1/2}}$$

$$V^{i-1/2, 0} = v_{i-1/2, 1/2} + \frac{\sigma_y i-1/2, 1/2}{\rho_{1/2} a_{1/2}}$$

$$\Sigma_y^{i-1/2, p} = \Sigma_{xy}^{i-1/2, p}$$

$$U^{i-1/2, p} = u_{i-1/2, p-1/2} - \frac{\sigma_{xy} i-1/2, p-1/2}{\rho_{p-1/2} b_{p-1/2}}$$

$$V^{i-1/2,p} = U_{i-1/2,p-1/2} - \frac{\sigma_{y i-1/2,p-1/2}}{\rho_{p-1/2} a_{p-1/2}}$$

(i=1, 2, ..., n)

Если на границе $y=y_j$ ($j=1, \dots, p-1$) заданы условия скольжения слоев, то в точках этой границы σ_{xy} и u имеют место разрывы первого рода и для вычисления соответствующих «больших» величин $\Sigma_{xy\mp}$ и U_{\mp} используются соотношения:

$$\Sigma_{xy-}^{i-1/2,j} = f_j - \Sigma_y^{i-1/2,j}, \quad \Sigma_{xy+}^{i-1/2,j} = f_{j+1}^+ \Sigma_y^{i-1/2,j}$$

$$U_-^{i-1/2,j} = u_{i-1/2,j-1/2} + \frac{\Sigma_{xy-}^{i-1/2,j} - \sigma_{xy i-1/2,j-1/2}}{\rho_{j-1/2} b_{j-1/2}} \quad (1.8)$$

$$U_+^{i-1/2,j} = u_{i-1/2,j+1/2} + \frac{\sigma_{xy i-1/2,j+1/2} - \Sigma_{xy+}^{i-1/2,j}}{\rho_{j+1/2} b_{j+1/2}}$$

(i=1, 2, ..., n)

Если для расчета параметров волнового поля используется явная разностная схема, то решение в ячейках с номерами $[(n+1/2, j-1/2)/j=1, 2, \dots, p]$ можно определить исходя из следующих соображений.

Для нахождения вектора $W^{n+1/2}$ (индекс $j-1/2$ опускаем) в предположении, что значения $W^{i+1/2}$ ($i < n$) уже известны, представим его в виде линейной комбинации векторов с предыдущего временного слоя $t=t_0$:

$$W^{n+1/2} = \gamma_1 W_{n+1/2} + \gamma_2 W_{n-1/2} + \gamma_3 W_{n-3/2} + \xi^{n+1/2}$$

где $\xi^{n+1/2}$ — некоторая векторная поправка, а γ_i — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие равенству $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Используя для $W^{i+1/2}$ аналогичное представление

$$W^{i+1/2} = \gamma_1 W_{i+1/2} + \gamma_2 W_{i-1/2} + \gamma_3 W_{i-3/2} + \xi^{i+1/2}$$

вычислим соответствующие поправки $\xi^{i+1/2}$ при $i < n$. Тогда, определив неизвестную поправку $\xi^{n+1/2}$ экстраполяцией по уже найденным значениям $\xi^{i+1/2}$, получим искомый вектор-решение $W^{n+1/2}$. В частности, для определения $\xi^{n+1/2}$ можно воспользоваться равенством $\xi^{n+1/2} = \xi^{n-1/2}$.

Часто (см., например, [6]) для ограничения расчетной области используют так называемые условия полного поглощения ($W^{n+1/2} = W^{n-1/2}$) или другие виды экстраполяции решения вдоль направления, по которому тело имеет неограниченную протяженность. Однако, как показывают вычислительные эксперименты, при таком подходе в волновую картину вносятся существенные искажения после достижения фронтов возмущений ограничительного контура.

Двухслойная разностная схема (1.5)–(1.8), допускающая сквозной счет разрывных решений и обладающая весьма важным свойством монотонности, имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространственным переменным. Методом априорных оценок доказано, что для устойчивости схемы достаточно выполнение следующего ограничения на размеры шагов пространственно-временной сетки: $\tau(h_x + h_y)(h_x h_y)^{-1} \leq 1$. Полученное условие устойчивости является и необходимым.

Разработанная методика успешно апробирована на одномерной модельной задаче ($\alpha=0$), имеющей точное аналитическое решение. Сеточные решения двумерной задачи (1.1)–(1.4) сопоставлялись с численными данными метода Клифтона [7] и схемы, предложенной в [8, 9]. Приемлемая согласованность сопоставленных результатов, а также получение сходя-

щихся решений при уменьшении шага сетки свидетельствуют об их достоверности и близости к точному решению. Сравнительный анализ, однако, показал, что при сквозном счете разрывных решений лучшее представление для поверхностей разрывов дает неосциллирующая сеточно-характеристическая схема (1.5) — (1.8).

Численный алгоритм записан на языке ФОРТРАН-IV в виде универсальной программы, скорость счета по которой на ЭВМ ЕС 1022 составляет 284 расчетные точки в секунду, что вдвое превосходит аналогичный показатель для метода Клифтона. Исходя из возможностей современной вычислительной техники при численном моделировании рассматриваемого класса контактных задач целесообразно использовать до 4–5 тыс. узлов пространственной сетки, так как дальнейшее увеличение их числа не дает соответствующего затратам эффекта.

2. Численный анализ распространения волны в слоистой плите. Ниже численно исследованы волновые поля в двухслойной плите, одна из поверхностей которой с постоянной скоростью входит в контакт с жестким ударником в форме тупого двугранного угла.

Разработанная методика была реализована на двумерной сетке 50×101 для двухслойной композиции, выполненной из алюминия ($\rho_1^0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $a_1^0 = 6320$ м/с, $v_1^0 = 3100$ м/с, $h_1 = 0,5$) и железа ($\rho_2^0 = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³, $a_2^0 = 5624$ м/с, $b_2^0 = 3148$ м/с, $h_2 = 0,5$) при жестком сцеплении разнородных материалов. Исходные данные для расчетов принимались следующими: $h_x = h_y = 0,22$, $\tau = 0,01$, $l = 2$, $v_0 = 10^{-3}$, $f = 0$ (удар без трения); $v_1 = 1,5$ (сверхзвуковой режим расширения контактной зоны).

Оптимальные значения параметров γ_1 , γ_2 , γ_3 были определены в результате вычислительного эксперимента. При $\gamma_1 = 0,2$; $\gamma_2 = 0,75$, $\gamma_3 = 0,05$ максимальная относительная погрешность искомым функций в пределах точности метода в области $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < t \leq 4,0$ не превышает 1–2%.

Временная эволюция напряженного состояния композитной плиты 0,5 Al — 0,5 Fe на интервале времени $t \in]0; 4, 0[$ в шести фиксированных точках наблюдения: 1 — ($x = 0,01$, $y = 0,01$), 2 — ($x = 0,49$, $y = 0,01$), 3 — ($x = 0,01$, $y = 0,49$), 4 — ($x = 0,49$, $y = 0,49$), 5 — ($x = 0,01$, $y = 0,97$), 6 — ($x = 0,49$, $y = 0,97$) представлена кривыми на фиг. 2. Здесь и в дальнейшем принято, что ударник воздействует на поверхность того материала, который в названии композита указан первым.

Цифры 1–6 на фиг. 2 соответствуют порядковому номеру точки наблюдения в плите, причем сплошные линии относятся к нормальным напряжениям σ_y , штрихпунктирные — к σ_x , штриховые — к σ_{xy} . Светлыми точками отмечены нормальные напряжения, возникающие в однородной алюминиевой плите при том же режиме динамического нагружения. Все представленные ниже результаты нормируются относительно множителя 10^{-3} .

Анализ графика функции $\sigma_y(t)$ в точках 1 и 2 показывает, что на интервале времени $t \in]0; 1, 0[$ закон изменения нормального напряжения $\sigma_y(t)$ полностью совпадает с характером его зависимости от t для случая однородного алюминиевого слоя единичной толщины. Приход в точку 1 в момент времени $t = 1,0$ фронта продольной упругой волны, отраженной от границы соединения компонент, сопровождается резким увеличением амплитуды сжимающего напряжения $\sigma_y(t)$ до максимального значения, равного 2,3. Значительное уменьшение уровня нормального напряжения $\sigma_y(t)$ в момент $t = 2,0$ связано с приходом фронта волны растяжения, которая образуется в слоистой системе при взаимодействии преломленной в компоненту железа упругой волны со свободной тыльной поверхностью.

Перераспределение кинетической энергии нормального поперечного удара между компонентами, составляющими единую механическую си-

стему, приводит к заметному увеличению в точках 1 и 2 фазы сжатия нормального напряжения $\sigma_y(t)$.

Обусловленное прямыми и многократно отраженными от плоских границ упругими волнами нормальное напряжение $\sigma_x(t)$ в точках 1 и 2 на рассматриваемом интервале времени является сжимающим. Причем влияние горизонтальной границы соединения Al-Fe сводится к повышению амплитудных значений по сравнению со случаем однородной алюминиевой плиты.

Вариация σ_y и σ_x во времени в точках 3 и 4 формируется под влиянием прямых продольной и поперечной волн сжатия и волн, отражающиеся от поверхности раздела компонент, а также от свободной тыльной поверхности. Интерференция многократно отраженных и преломленных цилиндрических и конических волн приводит к высокой динамической концентрации сжимающих напряжений во внутренних точках 3 и 4, расположенных вблизи поверхности раздела Al-Fe. Уменьшение максимальной амплитуды напряжений в точках 3 и 4 с момента $t=1,6$ объясняется отражением волн напряжений от свободной наружной поверхности $y=1$. Скорость нарастания напряжений во времени в точках 3 и 4 значительно меньше соответствующих скоростей в точках 1 и 2. Трансформация нормальных напряжений из сжимающих в растягивающие может привести в точках 3 и 4 к образованию откольных повреждений — расслоению материалов композита. Экстремальные значения напряжений σ_y и σ_x в точках 3 и 4 примерно в 1,5 раза больше соответствующих значений в однородной алюминиевой плите.

Даже на ранней стадии эволюции ударно-волнового процесса нормальное напряжение σ_x в точках 5 и 6 растягивающее. Этот факт позволяет сделать заключение, что при поперечном (изгибном) ударе в окрестности свободной поверхности возможно появление трещин с вертикальной ориентацией.

Расчетные осциллограммы скорости частиц в тех же шести точках наблюдения представлены кривыми на фиг. 3, где сплошные линии означают поперечную составляющую вектора скорости $v(t)$, а горизонтальная составляющая $u(t)$ отмечена штрихпунктиром.

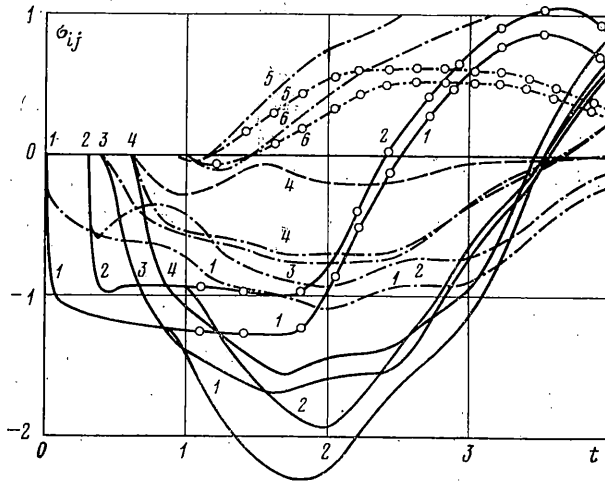
В точке 1, расположенной вблизи площадки контакта клиновидного ударника, изменение скорости $v(t)$ в значительной мере контролируется заданным граничным режимом. Обусловленное ударным граничным воздействием значение функции $v(t)$ изменяется на начальном этапе с большим ускорением, а затем стабилизируется на уровне граничного воздействия. Горизонтальная составляющая вектора скорости $u(t)$ в точках 1, 3, 5 пренебрежимо мала, так как в рассматриваемых точках, расположенных вблизи оси симметрии, соблюдаются условия квазиоднородного движения.

В точке 2, расположенной на расстоянии, равном полутолщине от линии $x=0$, эволюция вертикальной компоненты $v(t)$ с учетом запаздывания во времени аналогична истории изменения функции в точке 1. Определяющее влияние на формирование эволюции горизонтального движения оказывают процессы многократного отражения упругих волн от контактной поверхности Al-Fe и свободной границы $y=1$. Поэтому процесс развития скорости u во времени в точке 2 имеет ярко выраженный осциллирующий характер, причем период колебаний зависит от свойств металлического слоистого композита и его размеров. Максимальные амплитудные значения $u(t)$ в точке 2 более чем в три раза меньше наибольших значений вертикальной скорости.

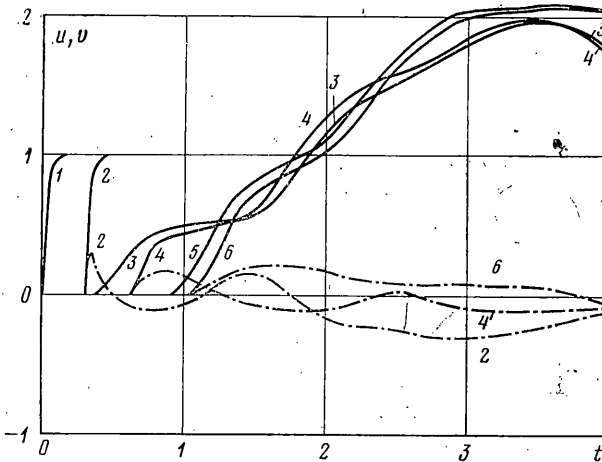
Многократное отражение упругих волн в биметаллическом соединении и связанное с ним перераспределение кинетической энергии удара обуславливает медленное нарастание вертикальной скорости $v(t)$ в точке 3 на

начальном этапе. Приход в точку 3 отраженных волн повышает амплитуду массовой скорости $v(t)$, причем в момент $t=3,5$ она составляет чуть меньше двух скоростей удара.

Вертикальное ускорение в точке 4 металлокомпозитной плиты одного порядка с таким же ускорением в точке 3; история изменения горизонтальной составляющей скорости $u(t)$ дает возможность проследить вклад всех



Фиг. 2



Фиг. 3

типов волн, переносящих в упругой системе кинетическую энергию движения и потенциальную энергию деформаций. Эпюры для $u(t)$ характеризуются наличием множества локальных экстремумов.

Анализ временной эволюции движения в точках 5 и 6, расположенных вблизи свободного торца биметаллического соединения, показывает, что вертикальные ускорения частиц в этих точках на начальном этапе движения меньше соответствующих ускорений в точках 3 и 4, что объясняется значительным ослаблением упругих волн, прошедших через границу раздела компонент, составляющих плиту. Временная структура кривых в точках наблюдения 5 и 6 обнаруживает выполнение закона удвоения верти-

кальной скорости частиц $v(t)$ при отражении упругой волны от тыльной поверхности плиты.

Сравнение кинематических параметров движения в шести точках однородной алюминиевой плиты с соответствующими значениями в биметаллическом композите со структурой 0,5 Al—0,5 Fe показывает, что влияние железной подложки с акустической жесткостью, втрое превышающей жесткость алюминия, незначительно сказывается на величине и характере изменения вектора скорости частиц во времени. Вместе с тем в силу меньших значений скоростей распространения упругих волн в железе наблюдается запаздывание в появлении удвоенных значений вертикальных скоростей в точках 5 и 6.

При ударно-волновом нагружении металлокомпозитной плиты удвоение наступает при $t=3,2$, в то время как для однородной алюминиевой плиты удвоение скорости происходит в момент времени $t=2,5$. В отличие от кинематики движения параметры напряженного состояния весьма чувствительны к влиянию подложки из акустически более жесткого материала.

Характер изменения составляющих напряженного состояния и вектора скорости частиц показывает, что быстро изменяющееся волновое поле в двухслойной плите, составленной из материалов с различными плотностями, вызывается совокупностью продольных и поперечных волн, которые распространяются в горизонтальном направлении, как в плоском волноводе, испытывая одновременно многократные отражения от его горизонтальных границ. Ударно-волновое воздействие на плиту в случае слоистости становится более плавным и наблюдается временная корреляция поля напряжений и скоростей. Эффект слоистости, в частности, заключается в более плавном воздействии на механическую систему, что связано с растяжением во времени ударного импульса при сохранении его суммарной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келли А. Высокопрочные материалы. М.: Мир, 1976. 341 с.
2. Benveniste Y., Aboodi J. A nonlinear mixture theory for the dynamic response of a laminated composite under large deformations.— *Z. angew. Math. und Phys.*, 1977, В. 28, Nr 6, S. 1067.
3. Aboodi J. The dynamic indentation of an elastic half-space by rigid punch.— *Internat. J. Solids and Structure*, 1977, v. 13, No. 10, p. 995.
4. Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Распространение упругих волн в полуплоскости, составленной из двух разнородных материалов.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. (К 60-летию акад. В. Н. Челомея). М.: ВИНТИ, 1974, с. 617.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
6. Григорян С. С., Чередниченко Р. А. Распространение в слоистом полупространстве упругих волн, вызванных поверхностной динамической нагрузкой.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1976, № 4, с. 114.
7. Clifton R. J. A difference method for plane problems in dynamic elasticity.— *Quart. Appl. Math.*, 1967, v. 25, No. 1, p. 97. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1967, № 1, с. 103).
8. Горский Н. М. О решении динамических задач теории упругости в напряжениях и скоростях смещений.— *Численные методы механики сплошной среды. Т. 3, № 3. Сб. статей.* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972, с. 32.
9. Горский Н. М., Коновалов А. Н. О разностных методах решения динамических задач теории упругости.— Тр. III Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. 1. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974, с. 68.

Кишинев, Одесса

Поступила в редакцию
16.X.1979