МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1981

УДК 539.3

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КРУГЛЫХ ШТАМПОВ

БАБЕШКО В. А., ПРЯХИНА О. Д.

В публикуемой работе для решения задачи о вибрации круглого в плане штампа на упругой среде применен метод статьи [1], весьма эффективный для этого класса задач. При использовании его для решения динамических контактных задач применимы все многочисленные методы решения статических задач [2, 3]. Изложенным методом можно пользоваться решая задачи со сцеплением и произвольной областью контакта.

1. Интегральные уравнения динамических смешанных задач о вибрации штампа, круглой в плане формы, на поверхности полуограниченных упругих тел типа пакета слоев или слоистого полупространства (трение в области контакта отсутствует) имеют вид

$$\int_0^a k(r,\rho)\,q(\rho)\,\rho d\rho=f(r)\qquad(0\leqslant r\leqslant a)$$

$$k(r,\rho)=\int_\sigma K(u)\,J_n(ur)\,J_n(u\rho)\,u du\tag{1.1}$$

Здесь $a$ — радиус штампа, $q(r)$ — комплексные амплитудные значения неизвестных контактных напряжений, $f(r)$ — заданные комплексные амплитуды смещений точек под штампом.

Функция $K(u)$ обладает свойствами, описанными в [4] и включающими в себя аналитичность, четность, вещественность при вещественных аргументах и представление указанной функции в виде отношения двух целых функций с сохранением поведения на бесконечности вида $c|u|^{-1}$, $|u|\to\infty$.

Контур $\sigma$ располагается в соответствии с правилами, указанными в [4, 5], и диктуется принципом предельного поглощения. Ниже приводятся теоремы единственности и аппроксимации, установленные в [6]. Первая теорема позволяет доказать разрешимость интегрального уравнения (1.1), а вторая дает возможность аппроксимировать ядра интегральных уравнений.

*Теорема 1.* Интегральное уравнение (1.1) однозначно разрешимо в $L_\alpha$, $1<\alpha<2$ при любой дважды непрерывно дифференцируемой правой части, при этом справедливо соотношение корректности

$$\|q(r)\sqrt{a^2-r^2}\|_C\leqslant M\|f\|_{C^2}$$

*Теорема 2.* Пусть ядра интегральных уравнений $Kq=f$ и $K_*q_*=f$ подчинены условию

$$|K(u)-K_*(u)|\,(1+u)^\alpha<\delta,\quad \delta>0,\quad \alpha>{}^3/_2\quad(0\leqslant u<\infty)$$

Тогда при достаточно малых $\delta$ справедливо неравенство

$$\|(q-q_*)\sqrt{a^2-r^2}\|_C<\varepsilon\|q\sqrt{a^2-r^2}\|_C$$

причем $\varepsilon\to0$ при $\delta\to0$.

На основании этой теоремы для построения приближенного решения интегрального уравнения (1.1) проводится аппроксимация функции $K(u)$ выражением

$$K(u)=K_0(u)H(u)c,\quad H(u)=\prod_{k=1}^{n}\frac{u^2-z_k^2}{u^2-p_k^2},\quad K_0(u)=\frac{1}{\sqrt{u^2+B^2}} \tag{1.2}$$

Параметр $B>0$ (о его выборе будет упомянуто ниже). Функция $H(u)$ допускает представления, которые в дальнейшем будут использоваться, вида

$$H(u)=1+H_1(u),\quad H^{-1}(u)=1+H_2(u)$$

$$H_1(u)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(u^2-p_i^2)^{-1},\quad H_2(u)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j(u^2-z_j^2)^{-1}$$

$$\alpha_i=\prod_{k=1}^{n}(p_i^2-z_k^2)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(p_i^2-p_k^2)^{-1},\quad \beta_j=\prod_{k=1}^{n}(z_j^2-p_k^2)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j^2-z_k^2)^{-1}$$

Для решения интегрального уравнения (1.1) с ядром (1.2) воспользуемся методом фиктивного поглощения [1], согласно которому решение ищется в форме

$$q(r)=q_0(r)+\varphi(r) \tag{1.3}$$

Неизвестная функция $\varphi(r)$ подбирается из условия равенства функционалов

$$\int_0^a q(r)J_n(p_kr)rdr\equiv\int_0^a\varphi(r)J_n(p_kr)rdr\quad (k=1,2,\ldots,n)$$

что равносильно тождеству

$$\int_0^a q_0(r)J_n(p_kr)rdr\equiv0\quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{1.4}$$

Здесь $p_k$ — полюса функции $H(u)$, такие, что $\operatorname{Im}p_k\geqslant0$.

После подстановки (1.3) в (1.1) и ряда преобразований приходим к интегральному уравнению вида

$$\int_0^a k_0(r,\rho)t(\rho)\rho d\rho=c^{-1}f(r)-\int_0^a k_0(r,\rho)\varphi(\rho)\rho d\rho-\int_0^a k_1(r,\rho)\varphi(\rho)\rho d\rho\quad (0\leqslant r\leqslant a)$$

$$k_0(r,\rho)=\int_0^\infty K_0(u)J_n(ur)J_n(u\rho)udu,\quad k_1(r,\rho)=\int_\sigma K_0(u)H_1(u)J_n(ur)J_n(u\rho)udu \tag{1.5}$$

$$t(r)=\int_\sigma T(u)J_n(ur)udu,\quad T(u)=H(u)Q_0(u) \tag{1.6}$$

Функция $q_0(r)$, введенная формулой (1.3), дается соотношением

$$q_0(r)=\int\limits_\sigma Q_0(u)J_n(ur)udu \tag{1.7}$$

Заметим, что условие (1.4) выполнено, так как

$$Q_0(p_k)=H^{-1}(p_k)T(p_k)\equiv 0 \quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

Рассмотрим случай, когда $f(r)=J_n(\eta r)$, $\eta>0$, $\operatorname{Im}\eta=0$. Если необходимо построить решение для произвольной части $f(r)$, то $f(r)$ нужно разложить в интегралы Бесселя и затем проинтегрировать полученное решение по параметру $\eta$, предварительно умножив на соответствующую трансформацию.

Применение метода работы [1] предполагает разложение функции $\varphi(r)$ по любой полной в $L_1$ линейно-независимой системе функций, в качестве которой возьмем дельта-функции Дирака с непересекающимися носителями в точках $r_k$, т. е.

$$\varphi(r)=\sum_{k=1}^n c_k\delta(r,r_k)\quad(0<r_k<a),\quad \delta(r,r_k)=\int\limits_0^\infty J_n(ur)J_n(ur_k)udu$$

где $c_k$ — подлежащие определению неизвестные постоянные, $r_k$ — точки, делящие интервал $(0,\,a)$ на равные отрезки.

Уравнение (1.5) принимает вид

$$\int\limits_0^a k_0(r,\rho)t(\rho)\rho d\rho=c^{-1}J_n(\eta r)-\sum_{k=1}^n c_kk_1(r,r_k)-\int\limits_0^a k_0(r,\rho)\varphi(\rho)\rho d\rho \tag{1.8}$$

Пусть $t_0(r,\,\eta)$ есть решение интегрального уравнения

$$\int\limits_0^a k_0(r,\rho)t_0(\rho,\eta)\rho d\rho=J_n(\eta r)\quad(0\leqslant r\leqslant a) \tag{1.9}$$

которое является типичным для статических задач [2, 3] и может быть решено любым из методов, указанных в этих работах.

Тогда решение уравнения (1.8) будет иметь вид

$$t(r)=c^{-1}t_0(r,\eta)-\sum_{k=1}^n c_k\delta(r,r_k)-\sum_{k=1}^n\int\limits_\sigma K_0(\eta)H_1(\eta)J_n(\eta r_k)t_0(r,\eta)\eta d\eta$$

и соответственно

$$T(u)=c^{-1}T_0(u,\eta)-\sum_{k=1}^n c_kJ_n(ur_k)-\sum_{k=1}^n c_k\int\limits_\sigma K_0(\eta)H_1(\eta)J_n(\eta r_k)T_0(u,\eta)\eta d\eta \tag{1.10}$$

На основании (1.6) неизвестные $c_k$ определяются из условия

$$T(z_l)=0\quad(l=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{1.11}$$

Здесь $z_l$ — нули функции $H(u)$, причем такие, что $\operatorname{Im} z_l\geqslant 0$.

Соотношения (1.11) представляют собой $n$ равенств относительно $n$ неизвестных $c_k$. Определив функцию $T(u)$ из (1.10) и коэффициенты $c_k$, найдем $q_0(r)$ по формулам (1.6), (1.7):

$$q_0(r)=t(r)+\int\limits_\sigma T(u)H_2(u)J_n(ur)udu$$

Теперь с учетом (1.3) нетрудно получить контактные напряжения под штампом

$$q(r)=c^{-1}t_0(r,\eta)+c^{-1}\int\limits_\sigma H_2(u)J_n(ur)T_0(u,\eta)udu-$$

$$-\sum_{k=1}^{n} c_k\left\{\int\limits_\sigma L(u,r_k)J_n(ur)udu+\right.$$

$$\left.+\int\limits_\sigma H_2(u)J_n(ur)J_n(ur_k)udu+\int\limits_\sigma L(u,r_k)H_2(u)J_n(ur)udu\right\} \qquad (1.12)$$

$$L(u,r_k)=\int\limits_\sigma K_0(\eta)H_1(\eta)T_0(u,\eta)\eta J_n(\eta r_k)d\eta$$

2. Построим решение $q(r)$ вдали от края штампа. Решение интегрального уравнения (1.9) $t_0(r,\eta)$ ищем в виде

$$t_0(r,\eta)=a_1J_n(\eta r) \qquad (2.1)$$

После подстановки (2.1) в (1.9) и ряда несложных преобразований получаем $a_1=K_0^{-1}(\eta)$.

Преобразованием Бесселя функции $t_0(r,\eta)$ является

$$T_0(u,\eta)=K_0^{-1}(\eta)\int\limits_0 J_n(\eta r)J_n(ur)rdr$$

Подставляя последнее соотношение в (1.10), согласно (1.11) при помощи теории вычетов получаем систему для определения коэффициентов $c_k$:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\sum_{i=1}^{n}\alpha_iJ_n(p_ir_k)\int\limits_0^a J_n(z_l\rho)H_n^{(1)}(p_i\rho)\rho d\rho=$$

$$=2[\pi icK_0(\eta)]^{-1}\int\limits_0^a J_n(\eta\rho)J_n(z_l\rho)\rho d\rho \quad (l=1,2,\ldots,n) \qquad (2.2)$$

В силу (1.12) неизвестные контактные напряжения будут определяться по формуле

$$q(r)=J_n(\eta r)K^{-1}(\eta)+\pi i[2cK_0(\eta)]^{-1}\sum_{j=1}^{n}\beta_jJ_n(z_jr)\int\limits_0^a J_n(\eta\rho)H_n^{(1)}(z_j\rho)\rho d\rho+$$

$$+\frac{1}{4}\pi^2\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{j=1}^{n}\beta_jJ_n(z_jr)\sum_{i=1}^{n}\alpha_iJ_n(p_ir_k)\int\limits_0^a H_n^{(1)}(z_j\rho)H_n^{(1)}(p_i\rho)\rho d\rho \qquad (2.3)$$

Интегралы в системе (2.2) и решении (2.3) легко берутся в явном виде.

**3.** Вычисление $q(r)$ вблизи края штампа. Будем искать решение уравнения (1.9) в форме

$$t_0(r,\eta)=\frac{a_2}{\sqrt{a^2-r^2}}\quad (a-\varepsilon\leqslant r\leqslant a) \tag{3.1}$$

Коэффициент $a_2$ определим, зная поведение решения вблизи края штампа плоской задачи для полубесконечного штампа. Для этого в уравнении (1.9) сделаем замену $r=a-x$, $\rho=a-y$ и $a\to\infty$. В этом случае круговая область $0\leqslant r\leqslant a$ перейдет в полуплоскость $x\geqslant 0$.

Воспользовавшись асимптотикой функций Бесселя, приходим к уравнению плоской задачи следующего вида:

$$\int_0^\infty k_0(x-\xi)t_1(\xi,\eta)\,d\xi=2\pi f(x)\quad (0\leqslant x\leqslant\infty)$$

$$k_0(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iux}}{\sqrt{u^2+B^2}}du,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\cos\left[(a-x)\eta-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi n}{2}\right]$$

$$t_1(x,\eta)=\sqrt{a-x}\,t_0(a-x,\eta)\equiv\sqrt{r}\,t_0(r,\eta) \tag{3.2}$$

Поведение решения этой задачи для правой части $f(x)=e^{-i\eta(a-x)}$, $\operatorname{Im}\eta\geqslant 0$ вблизи края полубесконечного штампа описывается формулой

$$t_2(x,\eta)=a_3/\sqrt{x},\quad a_3=e^{-ia\eta}\sqrt{(B-i\eta)/\pi}$$

Очевидно, что $t_1(x,\eta)$ и $t_2(x,\eta)$ связаны соотношением

$$t_1(x,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}}[(1-i)(-i)^n t_2(x,-\eta)+(1+i)i^n t_2(x,\eta)]$$

По формуле (3.2) находим $t_0(r,\eta)$ и, следовательно, получаем коэффициент

$$a_2=\sqrt{\frac{a}{2\pi}}[H_n^{(1)}(\eta a)\sqrt{B+i\eta}+H_n^{(2)}(\eta a)\sqrt{B-i\eta}]$$

Заметим, что $a_2$ принимает действительные значения при действительном $\eta$ и $a_2=(2aB\pi^{-1})^{1/2}$ при $\eta=0$.

Преобразование Бесселя $T_0(u,\eta)$ решения $t_0(r,\eta)$ определяется следующим образом:

$$T_0(u,\eta)=\int_{a-\varepsilon}^{a}t_0(r,\eta)J_n(ur)r\,dr\approx\sqrt{2a\varepsilon}\,J_n(ua) \tag{3.3}$$

Соотношение (3.3) получено при помощи замены переменных и разложения подынтегральной функции при $\varepsilon\to 0$.

Система (1.11) для определения неизвестных постоянных $c_k$ преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\left[J_n(z_l r_k)+ia\sqrt{\pi\varepsilon}\,J_n(z_l a)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i J_n(p_i r_k)H_n^{(1)}(p_i a)(B-ip_i)^{-1/2}\right]=$$

$$=c^{-1}\sqrt{2a\varepsilon}\,a_2 J_n(z_l a) \tag{3.4}$$

Подставляя найденные выражения для $t_0(r, \eta)$, $T_0(u, \eta)$ в (1.12) и применяя теорию вычетов, получим решение, описывающее поведение контактных напряжений вблизи края штампа

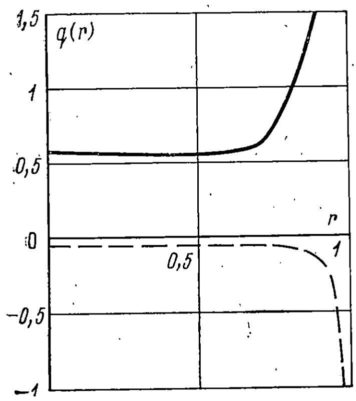
$$q(r)=\frac{a_2}{c\sqrt{a^2-r^2}}+\frac{\pi i}{c}\sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}}a_2\sum_{j=1}^{n}\beta_j H_n^{(1)}(z_ja)J_n(z_jr)-$$

$$-\pi i\sqrt{\frac{a}{2\pi(a^2-r^2)}}\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{i=1}^{n}\alpha_i H_n^{(1)}(p_ia)J_n(p_ir_k)(B-ip_i)^{-1/2}+$$

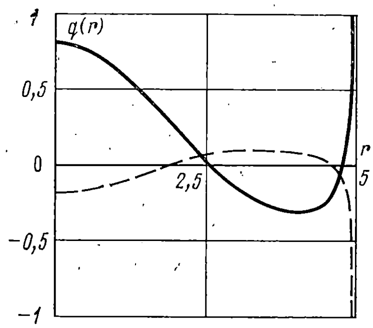
$$+\frac{\pi^2 a}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{j=1}^{n}\beta_j H_n^{(1)}(z_ja)J_n(z_jr)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i J_n(p_ir_k)H_n^{(1)}(p_ia)(B-ip_i)^{-1/2}-$$

$$-\frac{\pi i}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{j=1}^{n}\beta_j\begin{cases}H_n^{(1)}(z_jr)J_n(z_jr_k) & (r\geqslant r_k)\\ H_n^{(1)}(z_jr_k)J_n(z_jr) & (r<r_k)\end{cases}\qquad(3.5)$$

4. В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу о вибрации круглого в плане штампа радиуса $a$, лежащего без трения на упругом слое толщины $h$,




Фиг. 1




Фиг. 2

жестко сцепленным с недеформируемым основанием. Задача приводится к интегральному уравнению вида (1.1).

В случае, когда на поверхности слоя в области $0\leqslant r\leqslant a$ заданы вертикальные перемещения штампа, изменяющиеся по гармоническому закону, ядро $K(u)$ имеет вид

$$K(u)={}^1/_4\varkappa_2^2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2\operatorname{sh}h\sigma_1\operatorname{ch}h\sigma_2-u^2\operatorname{ch}h\sigma_1\operatorname{sh}h\sigma_2)\{(2u^4-u^2\varkappa_2^2)\sigma_1\sigma_2-$$
$$-(2u^4-u^2\varkappa_2^2+{}^1/_4\varkappa_2^4)\sigma_1\sigma_2\operatorname{ch}\sigma_1h\operatorname{ch}h\sigma_2+u^2[2u^4-u^2(\varkappa_1^2+2\varkappa_2^2)+$$
$$+{}^1/_4\varkappa_2^4+\varkappa_1^2\varkappa_2^2]\operatorname{sh}h\sigma_1\operatorname{sh}h\sigma_2\}^{-1}$$

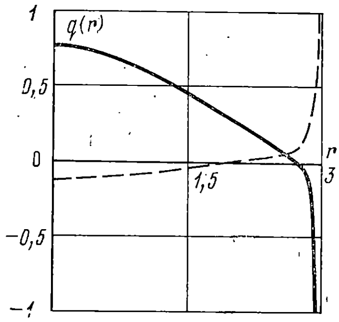
$$\sigma_k=\sqrt{u^2-\varkappa_k^2},\quad \operatorname{Re}\sigma_k\geqslant 0,\quad \operatorname{Im}\sigma_k\leqslant 0\quad(k=1,2),\quad \varkappa_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$$

$$\varkappa_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu},\quad \varkappa_1^2=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\varkappa_2^2,\quad K(u)\to c|u|^{-1},\quad |u|\to\infty,\quad c=1-\nu$$

($\lambda$, $\mu$ – коэффициенты Ламе, $\nu$, $\rho$, $\omega$ – соответственно коэффициент Пуассона, плотность материала и частота колебаний штампа).

Функция $K(u)$ обладает перечисленными свойствами и аппроксимируется функцией (1.2).

Для построения аппроксимации (1.2) при помощи ЭЦВМ строятся и детально исследуются кривые вещественных нулей и полюсов в зависимости от параметра $\varkappa_2$. Затем при помощи полиномов Бернштейна или Лагранжа производится приближение $K(u)$ рациональной функцией (1.2), при этом достигается любая наперед заданная точность. Построение аппроксимации также осуществляется при помощи ЭЦВМ.




Фиг. 3

Параметр $B$ выбирается наибольшим, однако чрезмерное его увеличение ведет к возрастанию погрешности аппроксимации или резкому повышению порядка аппроксимирующих полиномов. При численных расчетах полагали $B=10$.

По формулам (2.3), (3.5) составлен пакет программ на ЭЦВМ БЭСМ-6 для расчета амплитудных значений контактных напряжений $q(r)$ и определения постоянных $c_k$ из линейных алгебраических систем (2.2), (3.4). Изучено изменение напряжений с ростом приведенной частоты $\varkappa_2$ для поставленной выше краевой задачи. На фиг. 1–3 приводятся графики действительной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей $q(r)$ для $\varkappa_2=2{,}6$, $\eta=1$ и $a=1, 3, 5$.

При решении задач для относительно узких штампов (безразмерный параметр $\lambda=a/h\ll 1$) метод, используемый в публикуемой работе, также полностью применим. При этом в качестве решения $t_0(r, \eta)$ (2.1), (3.1), можно воспользоваться решением, представленным в [2, § 42, (42.5)].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Бабешко В. А.* Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 1, с. 62.
2. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.
4. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач.— Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4, с. 777.
5. *Бабешко В. А.* Об условиях излучения для упругого слоя.— Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3, с. 547.
6. *Бабешко В. А.* К теории динамических контактных задач.— Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3, с. 556.


Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 2.XI.1979