УДК 531/538

О МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПРОВОДЯЩЕГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ХОДЖАЕВ К. Ш., ШАТАЛОВ С. Д.

Приводятся осредненные уравнения движения системы, включающей проводящее твердое тело, помещенное в высокочастотное магнитное поле. Используется метод осреднения [1, 2], более простой, чем общий метод разделения движений систем со многими быстрыми переменными [3, 4]. Это позволило получить выражения для диссипативных или «раскачивающих» сил во втором приближении в форме, отличной от [5], и проанализировать зависимость сил от частоты и проводимости тела. В частности, установлено, что средние электромагнитные силы во втором приближении диссипативные, если частота поля меньше первого собственного числа задачи о затухании собственного поля тела. Показано, что тело, которое может вращаться вокруг неподвижной точки, обязательно имеет устойчивое положение равновесия.

Рассмотрен также случай сверхпроводящего тела, где показано, что в первом приближении средние электромагнитные силы потенциальные при любом числе движущихся твердых сверхпроводящих тел и токов, создающих внешнее поле.

1. Уравнения медленных движений. Пусть дана механическая система, характеризуемая вектором-столбцом q обобщенных координат $q_1, \ldots, q_m$, одним из элементов которой является проводящее твердое тело, помещенное в переменное во времени магнитное поле. Предполагается, что силы электромагнитного происхождения действуют только на это тело, но не на остальные элементы системы. Будем использовать дискретное описание токов Фуко в теле [6]. Введем бесконечномерный вектор-столбец i токов $i_1, i_2, \ldots$, являющихся коэффициентами в разложении плотности тока $\mathbf{j}$ в теле

$$\mathbf{j}(t,x,y,z)=\sum_{r=1}^{\infty} i_r(t)\mathbf{S}_r(x,y,z) \tag{1.1}$$

по некоторой полной системе соленоидальных векторных функций $\mathbf{S}_r$, постоянных в системе координат (x, y, z), связанной с телом.

Тогда уравнения рассматриваемой электромеханической системы можно записать в любой форме уравнений механики, используя в качестве кинетической энергии величину $T+W$, где выражение энергии поля W имеет вид

$$W={}^1/_2 i^T L i + J L_e^T i \tag{1.2}$$

Здесь L — бесконечномерная квадратная матрица коэффициентов само- и взаимоиндукции контуров токов i, J — ток, создающий поле, L_e — бесконечномерный вектор-столбец коэффициентов взаимоиндукции между контурами токов i и J; i^T, L_e^T — транспонированные векторы i, L_e (векторы-строки). Ток $J(t)$ предполагается заданным, т. е. не учитывается ЭДС, индуцируемая в контуре тока J токами; это возможно, если самоиндукция или сопротивление контура с током J достаточно велики и этот контур подключен к мощному источнику заданной ЭДС. Предполагая, что магнитная проницаемость во всем пространстве равна проницаемости тела, получим, что $L=\text{const}$, а $L_e=L_e(q)$.

Для удобства последующего осреднения уравнения системы лучше записать в виде уравнений первого порядка. Возьмем эти уравнения в виде комбинации уравнений Гамильтона с обобщенными силами и уравнений Лагранжа — Максвелла

$$q^{\cdot}=A^{-1}(q)p \tag{1.3}$$

$$p^{\cdot}=-\frac{1}{2}p^T\frac{\partial A^{-1}}{\partial q}p+J\left(\frac{\partial L_e}{\partial q}\right)^T i+Q(q,p)$$

$$Li^{\cdot}+Ri+(JL_e)^{\cdot}=0$$

Здесь $A(q)$ — матрица инерционных коэффициентов, p — вектор-столбец обобщенных импульсов, Q — механические обобщенные силы, $R=\mathrm{const}$ — матрица сопротивлений и взаимных сопротивлений [6] контуров токов i; символы $p^T(\partial A^{-1}/\partial q)p$, $J(\partial L_e/\partial q)^T i$ означают m-мерные векторы-столбцы, k-е компоненты которых соответственно равны $p^T(\partial A^{-1}/\partial q_k)p$ и $J(\partial L_e/\partial q_k)^T i$.

Ограничимся случаем, когда J — периодическая или квазипериодическая функция

$$J=\sum_{k=1}^{n'}(I_k\cos\nu_k t+J_k\sin\nu_k t) \tag{1.4}$$

считая, что разности частот $\nu_i-\nu_j$ имеют примерно ту же величину, что и наименьшая из частот ν_1. При этом силы $F_e=J(\partial L_e/\partial q)^T i$ будут содержать составляющие с частотами порядка ν_1 и выше. Эти составляющие вызовут механические колебания с амплитудами изменения координат порядка $[F_{er}]/(\nu_1^2[A_{rr}])$, $r=1,\ldots,n$, где квадратные скобки означают характерные значения соответствующих величин. В случае высокочастотного тока J эти амплитуды будут малыми по сравнению с характерной величиной $[q_r]$ изменения координаты q_r.

Введем малый параметр ε соотношением $\varepsilon^2\sim[F_{er}]/(\nu_1^2[A_{rr}][q_r])$. В задаче о медленных движениях предполагается, что значения импульсов имеют порядок ε по сравнению с величиной $\nu_1[A_{rr}][q_r]$. В соответствии с этим обобщенные силы Q нужно считать малыми $[Q_r]=\varepsilon^2\nu_1^2\times\times[A_{rr}][q_r]$ того же порядка, что и силы $[F_{er}]$.

Введем в этих предположениях безразмерное время, равное произведению размерного времени на ν_1, безразмерные координаты и токи как отношения размерных величин к их характерным значениям и безразмерные импульсы, равные отношению размерных импульсов к $\varepsilon\nu_1[A_{rr}][q_r]$.

Сохраняя за безразмерными переменными прежние обозначения соответствующих размерных величин, придем к уравнениям

$$q^{\bullet}=\varepsilon A^{-1}p,\qquad p^{\bullet}=\varepsilon\left(-\frac{1}{2}p^T\frac{\partial A^{-1}}{\partial q}p+J\left(\frac{\partial L_e}{\partial q}\right)^T i+Q\right)$$

$$Li^{\bullet}+Ri+(JL_e)^{\bullet}=0 \tag{1.5}$$

Уравнения (1.5) можно интерпретировать так же, как исходные размерные уравнения с условным малым параметром [5].

Сделанные предположения и уравнения (1.5) соответствуют ряду технических приложений: ориентирование деталей магнитным полем [7], подвеска твердого тела при бестигельной плавке [8], некоторым магнитным подвесам и т. д. Другой тип задач о движении твердого тела в магнитном поле — быстрые вращения — изучен в [9]. В этом случае в уравнения, аналогичные (1.5), малый параметр входит только перед электромагнитными силами.

Дискретное описание токов Фуко и электромагнитных сил неудобно для их конкретного вычисления. Для такого вычисления, возможного лишь для тел простой формы, лучше использовать уравнения в частных производных, например [9], для вектора **H**. Равным образом в случае, когда рассматривается «изолированное» твердое тело (а не более сложная система, как выше), удобнее использовать уравнения Эйлера. Однако принятая форма записи более удобна для выяснения структуры осредненных уравнений, что является целью последующего изложения.

В соответствии с [1, 2], но в отличие от [5], ищем решение уравнений (1.5) в виде

$$q=\xi+\varepsilon u_1(\xi,\ \eta,\ t)+\ldots,\quad p=\eta+\varepsilon v_1(\xi,\ \eta,\ t)+\ldots$$
$$i=i_0(\xi,\ t)+\varepsilon i_1(\xi,\ \eta,\ t)+\ldots \tag{1.6}$$

Функции u_1, v_1 будем выбирать с нулевым средним значением

$$\langle u_1\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}u_1(\xi,\ \eta,\ t)\,dt=0$$

что обеспечивает единственность вторых приближений в осредненных уравнениях. Для ξ, η будем строить уравнения вида

$$\xi^{\cdot}=\varepsilon\Xi_1(\xi,\ \eta)+\varepsilon^2\Xi_2(\xi,\ \eta)+\ldots \tag{1.7}$$
$$\eta^{\cdot}=\varepsilon \mathrm{H}_1(\xi,\ \eta)+\varepsilon^2\mathrm{H}_2(\xi,\ \eta)+\ldots$$

ограничиваясь членами порядка $O(\varepsilon^2)$. При этом достаточно найти i_0, i_1, которые удовлетворяют уравнениям

$$Li_0^{\cdot}+Ri_0+L_eJ^{\cdot}=0 \tag{1.8}$$
$$Li_1^{\cdot}+Ri_1+L\frac{\partial i_0}{\partial\xi}A^{-1}\eta+J\frac{\partial L_e}{\partial\xi}A^{-1}\eta=0$$

Здесь считается ξ, $\eta=\mathrm{const}$ и уже учтено, что $\Xi_1=A^{-1}\eta$. Чтобы получить (1.7), достаточно определить только периодические или квазипериодические решения уравнений (1.8)

$$i_0=\sum_{k=1}^{n}(I_{0k}\cos\nu_kt+J_{0k}\sin\nu_kt) \tag{1.9}$$

$$i_1=\sum_{k=1}^{n}(I_{1k}\cos\nu_kt+J_{1k}\sin\nu_kt)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получим

$$-\nu_kLI_{0k}+RJ_{0k}=\nu_kL_eI_k,\quad \nu_kLJ_{0k}+RI_{0k}=-\nu_kL_eJ_k \tag{1.10}$$
$$-\nu_kLI_{1k}+RJ_{1k}+L\frac{\partial J_{0k}}{\partial\xi}A^{-1}\eta+J_k\frac{\partial L_e}{\partial\xi}A^{-1}\eta=0$$
$$\nu_kLJ_{1k}+RI_{1k}+L\frac{\partial I_{0k}}{\partial\xi}A^{-1}\eta+I_k\frac{\partial L_e}{\partial\xi}A^{-1}\eta=0$$

$$I_{0k}=-\nu_k^2I_kU_kL_e-\nu_kJ_kV_kL_e,\quad J_{0k}=-\nu_k^2J_kU_kL_e+\nu_kI_kV_kL_e \tag{1.11}$$
$$I_{1k}=\left(\nu_kU_kL\frac{\partial J_{0k}}{\partial\xi}+\nu_kJ_kU_k\frac{\partial L_e}{\partial\xi}-V_kL\frac{\partial I_{0k}}{\partial\xi}-I_kV_k\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)A^{-1}\eta$$
$$J_{1k}=-\left(\nu_kU_kL\frac{\partial I_{0k}}{\partial\xi}+\nu_kI_kU_k\frac{\partial L_e}{\partial\xi}+V_kL\frac{\partial J_{0k}}{\partial\xi}+J_kV_k\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)A^{-1}\eta$$

Здесь симметричные и положительно-определенные матрицы U_k, V_k определены соотношениями

$$U_k=(\nu_k^2L+RL^{-1}R)^{-1},\quad V_k=(R+\nu_k^2LR^{-1}L)^{-1} \tag{1.12}$$
$$LV_k=RU_k,\quad V_kL=U_kR$$

Осредненные уравнения второго приближения будут

$$\xi^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}(\xi)\eta \tag{1.13}$$

$$\eta^{\cdot}=\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\eta^{T}\frac{\partial A^{-1}}{\partial\xi}\eta+\left\langle J\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}i_0\right\rangle+\langle Q_1\rangle\right)+$$
$$+\varepsilon^2\left(\left\langle J\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}i_1\right\rangle+\langle Q_2\rangle\right)$$

Уравнения (1.13) представляют собой уравнения движения исходной механической системы под действием сил вида

$$\varepsilon\langle Q_1\rangle+\varepsilon^2\langle Q_2\rangle,\quad \varepsilon\langle J(\partial L_e/\partial\xi)^T i_0\rangle+\varepsilon^2\langle J(\partial L_e/\partial\xi)^T i_1\rangle$$

Укажем свойства последних сил. Учитывая (1.10), (1.12), после преобразований получим

$$P_1(\xi)=\left\langle J\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}i_0\right\rangle=\frac{1}{2}\sum_k I_k\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}I_{0k}+\frac{1}{2}\sum_k J_k\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}J_{0k}=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_k\left\{\left(\frac{\partial I_{0k}}{\partial\xi}\right)^{T}LI_{0k}+\left(\frac{\partial J_{0k}}{\partial\xi}\right)^{T}LJ_{0k}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_k\frac{1}{\nu_k}\left\{\left(\frac{\partial J_{0k}}{\partial\xi}\right)^{T}RI_{0k}-\left(\frac{\partial I_{0k}}{\partial\xi}\right)^{T}RJ_{0k}\right\} \tag{1.14}$$

Вторая сумма в (1.14) равна нулю; это следует из (1.11). Теперь $P_1(\xi)$ можно представить в виде

$$P_1^{T}(\xi)=-\frac{\partial}{\partial\xi}\langle W_0\rangle,\qquad W_0=\frac{1}{2}i_0^{T}Li_0 \tag{1.15}$$

В результате получено другое доказательство известного [5] факта, что средние электромагнитные силы, вычисленные в первом приближении, потенциальные и потенциалом служит среднее значение энергии магнитного поля токов Фуко в теле, найденное в том же приближении.

Вторые приближения к выражениям для средних электромагнитных сил при помощи (1.11) преобразуются к виду

$$P_2(\xi,\eta)=\left\langle J\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}i_1\right\rangle=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_k I_k\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}I_{1k}+\frac{1}{2}\sum_k J_k\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}J_{1k}=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_k(I_k^2+J_k^2)\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}(V_k-2\nu_k^2U_kRU_k)\frac{\partial L_e}{\partial\xi}A^{-1}\eta \tag{1.16}$$

Учитывая, что $\varepsilon A^{-1}\eta=\xi^{\cdot}$, а матрицы

$$\Phi_k=\frac{1}{2}(I_k^2+J_k^2)\left(\frac{\partial L_e}{\partial\xi}\right)^{T}(V_k-2\nu_k^2U_kRU_k)\frac{\partial L_e}{\partial\xi} \tag{1.17}$$

симметричны, выражение $\varepsilon^2P_2(\xi,\xi^{\cdot})$ можно представить в виде

$$\varepsilon^2P_2^{T}(\xi,\xi^{\cdot})=-\frac{\partial}{\partial\xi^{\cdot}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\xi^{\cdot T}\sum_k\Phi_k\xi^{\cdot}\right)=-\frac{\partial\Psi}{\partial\xi^{\cdot}} \tag{1.18}$$

Отсюда следует известный [5] факт, что вторые приближения к средним электромагнитным силам описывают «формально диссипативные» силы, но в отличие от [5] получено явное выражение для формальной диссипативной функции Ψ через L_e. Это выражение можно представить также в виде квадратичной формы скоростей изменения коэффициентов индукции

$$\Psi=\frac{\varepsilon}{2}L_e^{\cdot T}ML_e^{\cdot},\qquad M=\frac{1}{2}\sum_k(I_k^2+J_k^2)(V_k-2\nu_k^2U_kRU_k) \tag{1.19}$$

Отметим, что выводы о потенциальности и диссипативности сил в первых двух приближениях справедливы только для системы, содержащей одно твердое проводящее тело, и одного заданного тока, создающего поле.

В наиболее интересном случае, когда силы $\varepsilon\langle Q_1\rangle$ потенциальные, например моменты сил тяжести, первое приближение в осредненных уравнениях (1.13) описывает консервативную систему, движения которой могут быть качественно изменены силами следующего порядка малости. Поэтому вторые приближения необходимы, чтобы иметь осредненные уравнения, описывающие качественно определенные движения — затухающие или нарастающие колебания. При этом колебания затухают до малых амплитуд на интервале $t\sim T/\varepsilon^2$.

Однако из общих теорем метода осреднения [3, 4] следует только что выражения $q=\xi+\varepsilon u_1$, $p=\eta+\varepsilon v_1$ аппроксимируют решения исходной системы (1.5) с ошибкой $O(\varepsilon^2)$ на интервале $t\sim T/\varepsilon$. Поэтому таких теорем недостаточно для качественного анализа движений рассматриваемой системы, например, они не позволяют утверждать, что система стремится к квазистационарным движениям, когда силы $\varepsilon^2(P_2+\langle Q_2\rangle)$ диссипативные. Но при помощи довольно простых рассуждений все же можно показать, что качественное соответствие между точными и приближенными решениями второго приближения сохраняется. Иначе говоря, затухающим или нарастающим решениям системы (1.13) отвечают аналогичные решения системы (1.5), «дополненные» лишь малыми вибрациями [10].

2. Уравнения медленных движений сверхпроводящих тел. В случае сверхпроводимости потенциальность средних электромагнитных сил в первом приближении можно доказать даже для системы, содержащей несколько твердых сверхпроводящих тел, и любого числа независимых заданных токов, создающих поле. Вместо (1.5) в этом случае получим

$$\dot q=\varepsilon A^{-1}(q)p,\qquad \dot p=\varepsilon\left(-\frac{1}{2}p^T\frac{\partial A^{-1}}{\partial q}p+\right.$$
$$\left.+\sum_s J_s\left(\frac{\partial L_{es}}{\partial q}\right)^T i+\frac{1}{2}i^T\frac{\partial L}{\partial q}i+Q\right)\qquad (Li)^{\cdot}+\left(\sum_s J_sL_{es}\right)^{\cdot}=0 \tag{2.1}$$

Здесь i — бесконечномерный вектор-столбец, составленный любым образом из векторов токов Фуко отдельных тел; $L(q)$ — соответствующая матрица коэффициентов индукции, зависящая в случае нескольких взаимодействующих тел от их координат; индексом s отмечены заданные токи, создающие поле.

Рассмотрим для простоты случай, когда внешнее поле включается после перехода тел в сверхпроводящее состояние. Тогда потоки индукции через условные контуры в телах равны нулю, и система (2.1) имеет счетное множество интегралов, аналогичных циклическим

$$Li+\sum_s J_sL_{es}=0 \tag{2.2}$$

Исключая при помощи (2.2) токи

$$i=-\sum_s L^{-1}L_{es}J_s \tag{2.3}$$

из уравнений движения в (2.1), придем к системе в стандартной форме. После осреднения этой системы получим выражение для средней электромагнитной силы в первом приближении

$$\begin{aligned} P_1(\xi)&=\left\langle \frac{1}{2} i^T \frac{\partial L}{\partial \xi} i+\sum_s J_s \left(\frac{\partial L_{es}}{\partial \xi}\right)^T i\right\rangle = \\ &=\left\langle \frac{1}{2} i^T \frac{\partial L}{\partial \xi} i - i^T \frac{\partial L}{\partial \xi} i - \left(\frac{\partial i}{\partial \xi}\right)^T Li\right\rangle = \\ &=-\left\langle \frac{1}{2} i^T \frac{\partial L}{\partial \xi} i + \left(\frac{\partial i}{\partial \xi}\right)^T Li\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \xi}\langle W_0\rangle \end{aligned} \tag{2.4}$$

что доказывает потенциальность средних электромагнитных сил в первом приближении; потенциалом, как и ранее, служит среднее значение энергии поля токов Фуко (протекающих в данном случае только по поверхности тел).

3. Об устойчивости равновесия твердого проводящего тела, имеющего неподвижную точку в быстропеременном магнитном поле. Вывод о потенциальности средних электромагнитных сил в первом приближении позволяет, в частности, упростить исследование вопроса о существовании и устойчивости квазистатических движений. В первом приближении таким движениям отвечают значения ξ, удовлетворяющие уравнениям $P_1(\xi)+\langle Q_1\rangle=0$.

Рассмотрим случай, когда система состоит только из твердого тела, имеющего неподвижную точку, а силы Q складываются из силы тяжести (или иных потенциальных сил) и сил трения. В общем случае потенциал $\langle W_0\rangle$ зависит от всех трех обобщенных координат (углов). Как $\langle W_0\rangle$, так и потенциал, отвечающий «потенциальной составляющей» $\langle Q_1\rangle$, являются периодическими функциями обобщенных координат. Поэтому суммарный потенциал непременно имеет минимум, т. е. твердое тело в быстропеременном магнитном поле, вообще говоря, обязательно имеет устойчивое в первом приближении по ε положение квазиравновесия. Исключение составляют тела с разными видами симметрии, когда $\langle W_0\rangle$ зависит не от всех обобщенных координат.

4. О диссипативных силах во втором приближении. Если силы трения, входящие в $\langle Q_1\rangle$, достаточно велики и им можно приписать порядок ε, то для анализа устойчивости квазиравновесия и исследования других движений достаточно первого приближения. Но в ряде приложений наблюдаются [7, 8] нарастающие колебания твердого тела, которые могут быть объяснены только неустойчивостью за счет «раскачивающего характера» сил ε^2P_2. Силам внешнего трения в таких случаях естественно приписывать порядок ε^2 и выше. В результате вследствие потенциальности сил в первом приближении движение системы оказывается существенно зависящим от сил следующего порядка малости, в том числе от ε^2P_2. Рассмотрим в связи с этим зависимость сил ε^2P_2 от частоты поля и величины электрических сопротивлений. Предположим, что ток $J(t)$ — гармонический, т. е. $J(t)=I\cos\nu t+J\sin\nu t$; этот случай чаще всего встречается в приложениях.

Существует ортогональное преобразование вектора i, приводящее матрицу L к единичной, а K — к диагональной $R=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, где $\lambda_1<$

$<\lambda_2<\lambda_3\ldots$. Матрицы U и V также станут диагональными, а выражающаяся через них матрица M примет вид

$$M=\operatorname{diag}\left[\frac{(\lambda_1^2-\nu^2)\lambda_1}{(\lambda_1^2+\nu^2)^2},\ldots\right] \qquad (4.1)$$

Отсюда видно, что при $\nu<\lambda_1$ матрица M будет положительно-определенной, т. е. если частота поля меньше первого собственного числа задачи о затухании электромагнитных процессов в теле, то средние электромагнитные силы во втором приближении будут диссипативными. При этом диссипация будет полной, когда коэффициенты взаимной индукции L_e невырожденным образом зависят от всех обобщенных координат.

Когда же $\nu>\lambda_1$, то силы ε^2P_2 могут оказаться «раскачивающими». Поскольку эти силы зависят от координат, то при одних их значениях силы могут быть диссипативными, а при других — раскачивающими. Это указывает на возможность автоколебаний. За счет малого внешнего трения автоколебания возможны и в случае, когда ε^2P_2 — раскачивающие при всех значениях координат.

Из (4.1) следует также, что устранить раскачивающий эффект сил ε^2P_2 можно уменьшая проводимость тела. Действительно, при уменьшении проводимости растут коэффициенты матрицы R и модули собственных чисел $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$, ... аналогично тому, как растут собственные частоты при увеличении жесткости. Отсюда следует, что в ряде случаев нагревание тела позволяет устранить неустойчивость рассматриваемого типа.

После приведения матриц R и L к диагональному виду выражение для сил εP_1 примет вид

$$\begin{aligned} P_1^T(\xi)&=-\frac{\partial}{\partial\xi}[\nu_1^2(I^2+J^2)L_e^T(\nu^2ULU+VLV)L_e]= \\ &=-(I^2+J^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[L_e^T\operatorname{diag}\left(\frac{\nu^2}{\lambda_1^2+\nu^2},\ldots\right)L_e\right]=-(I^2+J^2)\frac{\partial}{\partial\xi}(L_e^TNL_e) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Сравнивая (4.1) и (4.2), можно в некоторых случаях указать способ устранения неустойчивости, вызванной силами ε^2P_2, сохраняя устойчивость равновесия по первому (потенциальному) приближению. Для тел типа кольца, плоской пластины и ряда других [7, 11] зависимость сил εP_1 и ε^2P_2 от частоты качественно такая же, как и в случае, когда в матрицах N и M, приведенных к диагональному виду, отличен от нуля только один первый член. В этом случае первый член N_{11} диагональной матрицы N — монотонно возрастающая, а M_{11} — монотонно убывающая функции ν.

Пусть при требуемом для подвески тела, плавки и т. п. значении ν равновесие в потенциальном приближении устойчиво, но неустойчиво за счет сил ε^2P_2. Пусть имеется возможность создать в контуре, генерирующем поле, кроме основного тока частоты ν дополнительный ток меньшей частоты ν_1. Дополнительная сила $\varepsilon\Delta P_1(\nu_1)$ будет существенно меньше основной силы $\varepsilon P_1(\nu)$ и при подходящем выборе ν_1 сохранится близкое к исходному устойчивое в первом приближении положение равновесия. Дополнительная диссипация при этом будет больше исходной, может иметь другой знак и стабилизировать тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Реймерс Н. А., Ходжаев К. Ш.* Усреднение квазилинейных систем со многими быстрыми переменными.— Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 8, с. 1388.
2. *Миркина А. С., Ходжаев К. Ш.* Аппроксимация нестационарных процессов на бесконечном интервале времени при экспоненциальной устойчивости медленных движений.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 219.

3. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 6, с. 3.
4. *Волосов* В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
5. *Ветюков М. М., Ходжаев К. Ш.* Уравнения медленных движений систем с квазициклическими координатами и электромеханических систем.— Динамика систем. Сб. статей. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1976, вып. 9, с. 92.
6. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
7. *Сермонс Г. Я.* Динамика твердых тел в электромагнитном поле. Рига: Зинатне, 1974. 247 с.
8. *Метлин В. Б.* Магнитные и магнитогидродинамические опоры. М.: Энергия, 1968. 191 с.
9. *Мартыненко Ю. Г.* Движение проводящего твердого тела около неподвижной точки в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4, с. 36.
10. *Ходжаев К. Ш. Шаталов С. Д.* О качественном исследовании движений с помощью асимптотических методов нелинейной механики.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 802.
11. *Иоффе Б. А., Калнинь Р. К.* Ориентирование деталей электромагнитным полем. Рига: Зинатне, 1972. 300 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
15.X.1979