

УДК 531.8

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ МНОГОЗВЕННЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫЕ С УДАРНЫМИ ЯВЛЕНИЯМИ. I

РУБАНОВИЧ Е. М., ФОРМАЛЬСКИЙ А. М.

Рассматриваются плоские задачи о движении систем, состоящих из звеньев. Связи, накладываемые на систему, предполагаются односторонними. Помимо существующей односторонней связи на систему в результате абсолютно неупругого удара накладывается еще одна связь. Изучается поведение системы после удара. Подобная ситуация возникает при движении как двуногих [1—4], так и многоногих [5, 6] шагающих механизмов.

Рассматривается двузвенный механизм (циркуль) с двумя жестко скрепленными или шарнирно-соединенными звеньями, колесо с «торчащими» наружу стержнями и двуногий механизм, содержащий произвольное число звеньев. Способы решения этих задач, представляющих самостоятельный теоретико-механический интерес, могут быть использованы при изучении фазы двойной опоры шагающих аппаратов. Общие подходы к исследованию систем с односторонними связями содержатся, например, в [7].

Изучение качения колеса со стержнями приводит к объяснению одной из возможных причин возникновения силы трения качения.

1. Рассмотрим твердое тело BOD , состоящее из двух жестко скрепленных в точке O одинаковых стержней OB и OD длиной l и массой m (фиг. 1). Угол раствора BOD обозначим 2α ; он постоянен и удовлетворяет условию $0 < \alpha < \pi/2$. Тело BOD похоже на циркуль. Стержни OB и OD назовем ногами. Движение циркуля рассмотрим в вертикальной плоскости.

Допустим, что при $t < 0$ тело двигалось так, что точка B была неподвижной. Другими словами, нога OB циркуля при $t < 0$ стояла на горизонтальной поверхности, точнее на прямой AX (фиг. 1). Пусть в момент $t = 0$ конец D ноги OD касается этой прямой (фиг. 2). Ось AU системы координат XAU направим вертикально вверх, положение начала отсчета A не конкретизируем. Пусть к телу в момент касания не прикладываются никакие силы, кроме сил реакции опорной поверхности и, разумеется, силы тяжести. Предположим, что касание происходит с ненулевой скоростью. Тогда в момент касания возникает удар. Пусть он является абсолютно неупругим, т. е. скорость точки D после удара обращается в нуль.

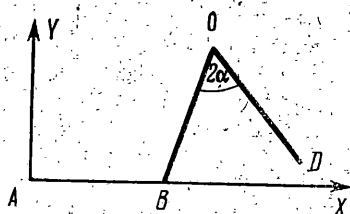
$$x_1^*(+0) = y_1^*(+0) = 0 \quad (x_1 = x_D, y_1 = y_D) \quad (1.1)$$

После удара точка B может либо остаться на поверхности, либо покинуть ее, поскольку связь, накладываемая на точку B , является неудерживающей (односторонней). Определим условия, при которых точка B останется на поверхности (на связи), а также условия, при которых она уйдет с поверхности вверх.

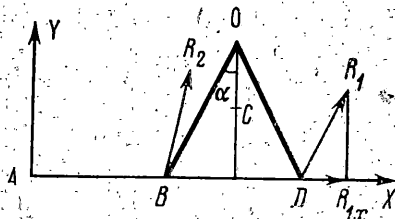
Уравнения плоского движения твердого тела BOD , обладающего всеми тремя степенями свободы, записываются в виде

$$2mx_c'' = X, \quad 2my_c'' = Y - 2mg, \quad I\psi'' = M \quad (1.2)$$

В этих уравнениях x_c, y_c — координаты центра масс C тела ($OC = \frac{1}{2}l \cos \alpha$), ψ — угол поворота тела вокруг центра масс, отсчитываемый от



Фиг. 1



Фиг. 2

какого-либо направления против часовой стрелки, $I = \frac{1}{2}ml^2 (\sin^2 \alpha + \frac{1}{3})$ — момент инерции тела относительно центра масс, X и Y — проекции на оси Ax и Ay силы, приложенной к телу (кроме силы тяжести), M — момент относительно точки C всех сил, приложенных к телу.

Уравнения (1.2) для момента удара $t=0$ переписываются в виде

$$2m[x_c^*] = E_x, \quad 2m[y_c^*] = E_y, \quad I[\psi^*] = E_M \quad (1.3)$$

В левых частях стоят выражения для скачков скоростей

$$[x_c^*] = x_c^*(+0) - x_c^*(-0) \quad (1.4)$$

$$[y_c^*] = y_c^*(+0) - y_c^*(-0), \quad [\psi^*] = \psi^*(+0) - \psi^*(-0)$$

В момент $t=0$ к телу BOD в виде импульсных воздействий прикладываются только силы реакции опоры (связи), поэтому

$$E_x = E_{R_{1x}} + E_{R_{2x}}, \quad E_y = E_{R_{1y}} + E_{R_{2y}} \quad (1.5)$$

$$E_M = \frac{1}{2}(E_{R_{1x}} + E_{R_{2x}})l \cos \alpha + (E_{R_{1y}} - E_{R_{2y}})l \sin \alpha$$

Здесь $E_{R_{1x}}$, $E_{R_{1y}}$ и $E_{R_{2x}}$, $E_{R_{2y}}$ — импульсы горизонтальной и вертикальной составляющих реакций R_1 и R_2 , прикладываемых к точкам D и B соответственно (фиг. 2).

Если касание поверхности происходит с ненулевой скоростью, то

$$\psi^*(-0) < 0 \quad (1.6)$$

Пользуясь тем, что при $t < 0$ точка B неподвижна, а при $t > 0$ становится неподвижной точка D , легко получить выражения

$$[x_c^*] = -\frac{1}{2}[\psi^*]l \cos \alpha, \quad [y_c^*] = -(\psi^*(-0) + \psi^*(+0))l \sin \alpha \quad (1.7)$$

Учитывая соотношения (1.5), (1.7), перепишем уравнения (1.3) в виде

$$-ml[\psi^*] \cos \alpha = E_{R_{1x}} + E_{R_{2x}} \quad (1.8)$$

$$-2ml(\psi^*(-0) + \psi^*(+0)) \sin \alpha = E_{R_{1y}} + E_{R_{2y}} \quad (1.9)$$

$$ml[\psi^*] (\sin^2 \alpha + \frac{1}{3}) = (E_{R_{1x}} + E_{R_{2x}}) \cos \alpha + 2(E_{R_{1y}} - E_{R_{2y}}) \sin \alpha \quad (1.10)$$

Если точка B после удара остается на месте, то

$$\psi^*(+0) = 0 \quad (1.11)$$

При этом из уравнений (1.8)–(1.10) получаем

$$E_{R_{1y}} = -\frac{ml\psi^*(-0)}{3 \sin \alpha} (1 + 3 \sin^2 \alpha) \quad (1.12)$$

$$E_{R_{2y}} = \frac{ml\psi^*(-0)}{3 \sin \alpha} (1 - 3 \sin^2 \alpha) \quad (1.13)$$

Если точка B покидает поверхность, то

$$\psi^*(+0) < 0, \quad E_{R_{2x}} = E_{R_{2y}} = 0 \quad (1.14)$$

В этом случае из уравнений (1.8)–(1.10) получаем

$$E_{R_{1y}} = -ml\psi^*(-0) \frac{4 \sin \alpha}{1+3 \sin^2 \alpha} \quad (1.15)$$

$$\psi^*(+0) = \psi^*(-0) \frac{1-3 \sin^2 \alpha}{1+3 \sin^2 \alpha} \quad (1.16)$$

Связи, накладываемые на тело в точках B и D , предполагаются односторонними, поэтому решение системы (1.8)–(1.10) должно удовлетворять условиям

$$E_{R_{1y}} \geq 0, \quad E_{R_{2y}} \geq 0, \quad \psi^*(+0) \leq 0 \quad (1.17)$$

Из выражений (1.12), (1.15) видно, что при условии (1.16) первое неравенство (1.17) всегда выполняется. Из формулы (1.16) следует, что при

$$0 < \alpha < \alpha_0, \quad \alpha_0 = \arcsin(1/\sqrt{3}) \approx 35^\circ 16' \quad (1.18)$$

выполняется первое неравенство (1.14), а значит, и неравенство $\psi^*(+0) \leq 0$. Величина (1.13) в этом случае отрицательна. При

$$\alpha_0 \leq \alpha < \pi/2 \quad (1.19)$$

величины (1.13), (1.16) неотрицательны (выполняется неравенство $E_{R_{2y}} \geq 0$), при $\alpha = \alpha_0$ они обращаются в нуль.

Таким образом, число α_0 , которое можно назвать критическим ($2\alpha_0$ – критический угол раствора циркуля), делит интервал $(0, \pi/2)$ на два: (1.18) – нога OB уходит с поверхности вверх при любой, сколь угодно малой скорости наступания на поверхность ногой OD и (1.19) – нога OB остается на поверхности при любой скорости наступания.

Из полученных результатов следует, что если приложить удар произвольной силы к концу D циркуля, угол раствора которого равен $2\alpha_0$, то вертикальная составляющая ударной реакции в точке B будет всегда равна нулю. Это говорит об аналогии рассматриваемой задачи с задачей о центре удара физического маятника.

Эти выводы не зависят от абсолютной величины скорости $\psi^*(-0)$, а также от длины l и массы m ног, кроме того, они никак не связаны с полем сил тяжести и остаются справедливыми, например, в случае, когда прямая AX не является горизонтальной¹.

Из формулы (1.16) следует, что

$$|\psi^*(+0)| \leq |\psi^*(-0)| \quad (1.20)$$

Поэтому кинетическая энергия T тела BOD после удара меньше, чем до него. Потенциальная энергия V при ударе, очевидно, не меняется, следовательно, полная энергия $T+V$ скачком уменьшается. При выполнении неравенства (1.18) циркуль после удара будет вращаться вокруг неподвижной точки D . При этом вращении полная энергия тела, если в безудар-

¹ «Экспериментируя» с циркулем или измерителем из готовальни, нетрудно убедиться в том, что при больших углах раствора обе ноги двузвенника после удара остаются на поверхности, а при малых углах одна нога отрывается от поверхности.

ном движении считать систему консервативной, не меняется. Если величина $|\dot{\psi}^*(+0)|$ меньше некоторого значения, то точка B в течение какого-то времени будет подниматься над поверхностью, а затем возвратится назад (под действием силы тяжести). Полная энергия при этом движении остается той же, какой она была в момент отрыва точки B от поверхности.

Потенциальная, а значит, и кинетическая энергия в момент касания ногой OB поверхности будет такой же, как в момент отрыва этой ноги от поверхности. Поэтому угловая скорость $\dot{\psi}$ в момент касания точкой B поверхности будет равна по абсолютной величине угловой скорости $\dot{\psi}^*$ в момент отрыва. При соприкосновении точки B с поверхностью опять возникает удар и полная энергия снова скачком уменьшается. После этого тело вращается вокруг неподвижной точки B так, что точка D сначала поднимается над поверхностью, затем опускается, снова касается ее и т. д. Описанное движение — перекашивание с ноги на ногу — затухает. Можно показать, что процесс затухания длится конечное время.

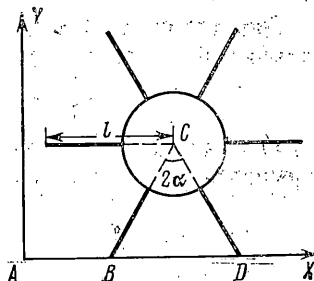


Рис. 3

2. Рассмотрим плоский диск (C — его центр); к краю диска прикреплены весомые стержни (фиг. 3), концы которых («внешние») располагаются равномерно на окружности радиуса l с центром в точке C ($CB=CD=l$; см. фиг. 3). Эти стержни будем также называть ногами. Через 2α обозначим угол между двумя соседними ногами, т. е. $\angle BCD=2\alpha$ (см. фиг. 3). Пусть центр масс всего тела лежит в центре диска C . Массу тела, так же как и массу циркуля, обозначим через $2m$, а момент инерции относительно точки C — через I . Описанное тело напоминает штурвал. Проведенное ниже исследование справедливо также для тел, подобных шестерням.

Допустим, что при $t < 0$ тело двигалось так, что точка B была неподвижной. Пусть в момент $t=0$ точка D с ударом (абсолютно неупругим; см. равенства (1.4)) касается поверхности. Определим поведение точки B после удара.

Уравнения для момента удара имеют вид (1.3). Обозначения в этих уравнениях имеют тот же смысл, что и в задаче о циркуле. Третье соотношение в (1.5) и первое соотношение в (1.7) меняются очевидным образом (нужно «убрать» дробь $1/2$). Поэтому вместо соотношений (1.8) и (1.10) в рассматриваемой задаче имеем

$$-2ml[\dot{\psi}^*] \cos \alpha = E_{R_{1x}} + E_{R_{2x}} \quad (2.1)$$

$$I[\dot{\psi}^*] = (E_{R_{1x}} + E_{R_{2x}})l \cos \alpha + (E_{R_{1y}} - E_{R_{2y}})l \sin \alpha \quad (2.2)$$

Если после удара точка B остается на месте (см. (1.11)), то из уравнений (2.1), (1.9), (2.2) получаем

$$E_{R_{1y}} = -\frac{ml\dot{\psi}^*(-0)}{\sin \alpha} (I^* + 1) \quad \left(I^* = \frac{I}{2ml^2}; \quad 0 \leq I^* \leq 1 \right) \quad (2.3)$$

$$E_{R_{2y}} = \frac{ml\dot{\psi}^*(-0)}{\sin \alpha} (I^* + \cos 2\alpha) \quad (2.4)$$

Если точка B покидает поверхность, то

$$E_{R_{1y}} = -4ml \sin \alpha \dot{\psi}^*(-0) \frac{I^* + \cos^2 \alpha}{I^* + 1} \quad (2.5)$$

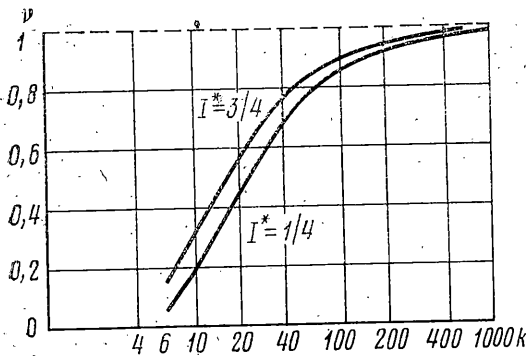
$$\psi^{\cdot} (+0) = \psi^{\cdot} (-0) \frac{I^* + \cos 2\alpha}{I^* + 1} \quad (2.6)$$

$$E_{R_{ix}} = 2ml\psi^{\cdot} (-0) \frac{\sin \alpha \sin 2\alpha}{I^* + 1} \quad (2.7)$$

При условии (1.6) величины (2.3), (2.5) положительны. Если угол α удовлетворяет неравенству (1.18), где

$$\alpha_0 = \pi/2 - 1/2 \arccos I^* \quad (\pi/4 \leq \alpha_0 \leq \pi/2) \quad (2.8)$$

то, как следует из формул (2.4), (2.6), точка B после удара покидает поверхность (независимо от величины $\psi^{\cdot} (-0)$). Если угол α удовлетворяет неравенству (1.19), то точка B остается на поверхности.



Фиг. 4

Если k — число ног у рассматриваемого тела, то $\alpha = \pi/k$. В случае $k \geq 5$ точка B отрывается от поверхности при любом распределении масс рассматриваемого тела (любом I^*).

Полученные выше результаты (формулы) справедливы для любого предмета на двух «жестких» ногах, масса которого равна $2m$, момент инерции I , а расстояния от центра масс до концов ног равны l .

Предполагая выполненным условие (1.18), рассмотрим процесс качения «колеса с ногами» по горизонтальной поверхности.

Пусть скорость $|\psi^{\cdot} (-0)|$ настолько велика, что рассматриваемое тело перевалится через точку D и коснется (с ударом) поверхности следующей ногой, затем следующей и т. д. Между ударами полная энергия $T+V$ остается постоянной вследствие консервативности системы. При этом угловая скорость ψ^{\cdot} в момент касания поверхности каждой следующей ногой равна угловой скорости ψ^{\cdot} в момент отрыва от поверхности предыдущей ноги. С каждым ударом кинетическая, а значит, и полная энергия скачком уменьшается. Следовательно, наступит момент, когда тело перестанет катиться. После этого оно будет некоторое время переваливаться с ноги на ногу («топаться на месте»), как рассмотренный выше циркуль.

Во время качения колеса с k ногами за один полный оборот вокруг центра масс C скорость ψ^{\cdot} изменится в v раз. Из формулы (2.6) следует, что

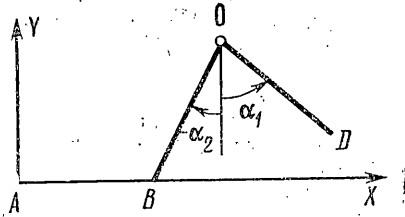
$$v = \{ [I^* + \cos(2\pi/k)] / (I^* + 1) \}^k \quad (2.9)$$

При $k < \infty$ величина $v < 1$. Нетрудно убедиться в том, что $dv/dk > 0$ при $k > 3$ независимо от значения I^* . Следовательно, с ростом k декремент затухания скорости v строго монотонно возрастает. На фиг. 4 показаны графики зависимости (2.9) при I^* , равном $1/4$ и $3/4$. Величина k откладывается на фиг. 4 в логарифмическом масштабе. Таким образом, из двух колес с одним и тем же приведенным моментом инерции, имеющих одинаковую начальную скорость, дальше укатится то, которое имеет большее количество ног.

При $k \rightarrow \infty$ (независимо от значения I^*) $v \rightarrow 1$. Предельный переход к бесконечному числу ног можно трактовать как переход к обычному ко-

лесу. Таким образом, обычное колесо будет катиться дальше, чем колесо с ногами (например, шестерня), имеющее ту же начальную скорость.

Из вышеизложенного следует, что колесо с бесконечным числом ног (обычное колесо) может катиться с постоянной скоростью. Однако скорость обычного круглого колеса, как известно, падает, что объясняется наличием силы трения качения. Пользуясь результатами решения задачи о качении колеса с ногами, можно объяснить это «несоответствие» и предложить объяснение одной из возможных причин, вызывающих наряду с другими причинами (например, деформация соприкасающихся тел) возникновение силы трения качения. Обод круглого колеса, а также поверхность имеют множества неровностей — мелких выступов. Поэтому обычное круглое колесо можно рассматривать как колесо со множеством маленьких «ножек». Во время качения такого колеса происходит множество абсолютно неупругих ударов и скорость колеса, как показано выше, падает. При каждом ударе возникает импульсная реакция, горизонтальная составляющая которой отрицательна (см. (2.7)).



Фиг. 5

Отвлекаясь от механизма взаимодействия такого колеса с поверхностью, совокупность импульсных воздействий можно заменить «интегральной» характеристикой — силой трения качения F . Декремент затухания (2.9) от скорости качения не зависит. Если $F=c\dot{\varphi}^2$ ($c=\text{const}$), то уравнение движения $2ml\ddot{\varphi} = -F$ «дает» постоянный декремент затухания. Таким образом, получается, что сила трения F должна зависеть от скорости качения квадратично. При такой зависимости силы трения от скорости качения получается, однако, что обычное колесо может укатиться бесконечно далеко, а это противоречит действительности. Поэтому при малой скорости качения нужно возвратиться от непрерывной модели круглого колеса с силой трения к «дискретной» модели колеса с «ножками». А у такого колеса, если скорость становится меньше некоторого предела, качение прекращается и начинается переваливание с ноги на ногу.

Производная $dv/dI^* > 0$ при любых значениях I^* и k (см. фиг. 4). Поэтому из двух тел с одним и тем же числом ног и имеющих одинаковые начальные угловые скорости дальше укатится то, у которого приведенный момент инерции I^* больше. Максимальное значение $I^*=1$ достигается при $I=2ml^2$, т. е. когда вся масса тела сосредоточена в концах ног.

3. Рассмотрим двузвенный механизм BOD , отличающийся от изученного в п. 1 только наличием в точке O плоского шарнира. Задачу будем ставить так же, как в п. 1.

Рассматриваемый двузвенник имеет на одну степень свободы больше, поэтому уравнениями (1.3), (1.4) для описания удара воспользоваться нельзя. Если в качестве обобщенных координат выбрать координаты x, y точки O и два угла α_1 и α_2 , образованных звеньями OD и OB с вертикалью Y (фиг. 5), то уравнения удара записываются в виде

$$G'[z'] = LE \tag{3.1}$$

$$G' = \frac{m}{2} \begin{vmatrix} 4 & 0 & l \cos \alpha & l \cos \alpha \\ 0 & 4 & l \sin \alpha & -l \sin \alpha \\ l \cos \alpha & l \sin \alpha & 2/3 l^2 & 0 \\ l \cos \alpha & -l \sin \alpha & 0 & 2/3 l^2 \end{vmatrix}, \quad [z'] = \begin{vmatrix} [x'] \\ [y'] \\ [\alpha_1'] \\ [\alpha_2'] \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ l \cos \alpha & l \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \cos \alpha & -l \sin \alpha \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} E_{R1x} \\ E_{R1y} \\ E_{R2x} \\ E_{R2y} \end{vmatrix}$$

$$[x'] = x^*(+0) - x^*(-0), \quad [y'] = y^*(+0) - y^*(-0) \\ [\alpha_1'] = \alpha_1^*(+0) - \alpha_1^*(-0), \quad [\alpha_2'] = \alpha_2^*(+0) - \alpha_2^*(-0)$$

В момент удара $\alpha_1 = -\alpha_2$. Угол BOD в этот момент обозначен через 2α ($\alpha = \alpha_1$). Все обозначения в матрицах G' , L и E аналогичны обозначениям в п. 1.

Уравнения удара (3.1) получаются из уравнений Лагранжа второго рода [8]. Матрица G' является матрицей кинетической энергии, которую имеет двузвенная система с четырьмя степенями свободы при $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$.

Координаты x , y , α_1 , α_2 связаны с координатами точек $D(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= x + l \sin \alpha_1, & y_1 &= y - l \cos \alpha_1 \\ x_2 &= x + l \sin \alpha_2, & y_2 &= y - l \cos \alpha_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$ якобиан преобразования (3.2) равен $\det L$, причем $\det L \neq 0$. Используя преобразование (3.2), уравнение (3.1) можно заменить таким:

$$G[z^*] = E, \quad [z^*] = (L^{-1})^* [z''], \quad G = L^{-1} G' (L^{-1})^* \quad (3.3)$$

Здесь звездочка означает транспонирование. Из выражения (3.3) следует, что

$$G = \frac{m}{2} \begin{vmatrix} \frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha} & -\frac{1}{\sin 2\alpha} & \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{3 \cos^2 \alpha} & \operatorname{ctg} 2\alpha \\ -\frac{1}{\sin 2\alpha} & \frac{3 \sin^2 \alpha + 1}{3 \sin^2 \alpha} & -\operatorname{ctg} 2\alpha & \frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{3 \sin^2 \alpha} \\ \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{3 \cos^2 \alpha} & -\operatorname{ctg} 2\alpha & \frac{3 \cos^2 \alpha + 1}{3 \cos^2 \alpha} & \frac{1}{\sin 2\alpha} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha & \frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{3 \sin^2 \alpha} & \frac{1}{\sin 2\alpha} & \frac{3 \sin^2 \alpha + 1}{3 \sin^2 \alpha} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

$$[z^*]^* = \|[x_1^*], [y_1^*], [x_2^*], [y_2^*]\|$$

$$[x_1^*] = x_1^*(+0) - x_1^*(-0), \quad [y_1^*] = y_1^*(+0) - y_1^*(-0) \quad (3.5)$$

$$[x_2^*] = x_2^*(+0) - x_2^*(-0), \quad [y_2^*] = y_2^*(+0) - y_2^*(-0)$$

Матрица (3.4) характеризует кинетическую энергию системы в координатах x_1, y_1, x_2, y_2 . Уравнения (3.3) для решения поставленной задачи удобнее уравнений (3.4). Запишем уравнения (3.3) в блочном виде

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} [z_1^*] \\ [z_2^*] \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix} \\ [z_i^*] = \begin{vmatrix} [x_i^*] \\ [y_i^*] \end{vmatrix}, \quad E_i = \begin{vmatrix} E_{R_{ix}} \\ E_{R_{iy}} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2) & \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = G \end{aligned} \quad (3.6)$$

В соответствии с постановкой задачи

$$z_2^*(-0) = 0, \quad z_1^*(+0) = 0 \quad (3.7)$$

Если после удара ногой OD о поверхность нога OB остается на поверхности без движения, то

$$z_2^*(+0) = 0 \quad (3.8)$$

Если нога OB покидает поверхность, то

$$E_2 = 0 \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) имеет также место, если на точку B не наложено никакой связи.

При условии (3.8) из уравнений (3.6) и соотношений (3.7) имеем

$$E_1 = -G_{11}z_1^{\cdot}(-0) \quad (3.10)$$

$$E_2 = -G_{21}z_1^{\cdot}(-0) \quad (3.11)$$

При условии (3.9) имеем

$$E_1 = -(G_{11} - G_{12}G_{22}^{-1}G_{21})z_1^{\cdot}(-0) \quad (3.12)$$

$$z_2^{\cdot}(+0) = G_{22}^{-1}G_{21}z_1^{\cdot}(-0) \quad (3.13)$$

Так как скорости $z_1^{\cdot}(-0)$ в выражениях (3.10)–(3.13) входят линейно, то знак величин в левых частях этих выражений зависит только от направления вектора $z_1^{\cdot}(-0)$ и не зависит от его абсолютной величины.

При помощи соотношений (3.5)–(3.13) можно получить следующие выражения, описывающие изменение кинетической энергии двузвенника при ударе:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T(-0) - T(+0) = \frac{1}{2}z^{\cdot*}(-0)Gz^{\cdot}(-0) - \\ &\quad - \frac{1}{2}z^{\cdot*}(+0)Gz^{\cdot}(+0) = \frac{1}{2}z_1^{\cdot*}(-0)G_{11}z_1^{\cdot}(-0) - \\ &\quad - \frac{1}{2}z_2^{\cdot*}(+0)G_{22}z_2^{\cdot}(+0) = \frac{1}{2}[z^{\cdot*}]G[z^{\cdot}] = \frac{1}{2}[z^{\cdot*}]E_1 = \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} z_1^{\cdot*}(-0)G_{11}z_1^{\cdot}(-0) & \text{при } z_2^{\cdot}(+0) = 0 \\ z_1^{\cdot*}(-0)(G_{11} - G_{12}G_{22}^{-1}G_{21})z_1^{\cdot}(-0) & \text{при } E_2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из положительной определенности матрицы (3.4) вытекает положительность величины ΔT . Таким образом, при абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия, а вместе с ней и полная энергия системы скачком уменьшается.

Вектор скачков скоростей $[z^{\cdot}]$ представляет собой также вектор потерь энергии. Поэтому равенства (3.14) описывают, в частности, теорему Карно [7, 8] и показывают, что изменение кинетической энергии при ударе равно работе силы реакции R_1 . Отсюда заключаем, что вектор скорости точки D до удара составляет тупой угол с вектором силы реакции, прикладываемой в точке D в момент удара.

Скалярное произведение векторов (3.11) и (3.13) отрицательно. Поэтому вектор скорости, которую приобретает точка B после удара в отсутствие какой-либо связи на звено OB , и вектор силы ударной реакции, прикладываемой к звену OB в случае, когда связь не позволяет точке B уйти с поверхности, всегда составляют тупой угол.

Представим теперь такую гипотетическую ситуацию, когда поверхность, на которой находилось при $t < 0$ звено OB , при $t > 0$ становится около точки B абсолютно гладкой. При этом следует положить $E_{R_{2x}} = 0$. Если после удара точка B остается на поверхности, то $[y_2^{\cdot}] = 0$. Если при этом $[x_2^{\cdot}] \neq 0$, то после удара точка B скользит по поверхности. Из уравнений (3.6) имеем

$$G_{21}[z_1^{\cdot}] + G_{22} \begin{Bmatrix} [x_2^{\cdot}] \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ E_{R_{2y}} \end{Bmatrix}$$

Отсюда находим

$$E_{R_{2y}} = \frac{1}{g_{33}} \{ (g_{41}g_{33} - g_{31}g_{43})[x_1^{\cdot}] + (g_{42}g_{33} - g_{32}g_{43})[y_1^{\cdot}] \} \quad (3.15)$$

$$x_2^{\cdot}(+0) = -\frac{1}{g_{33}} (g_{31}[x_1^{\cdot}] + g_{32}[y_1^{\cdot}]) \quad (3.16)$$

Здесь g_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4$) — элементы матрицы G .

Из выражения (3.13), справедливого при свободном движении звена OB , получаем

$$y_2^*(+0) = -\frac{1}{\det G_{22}} \{ (g_{41}g_{33} - g_{31}g_{43}) [x_1^*] + (g_{42}g_{33} - g_{32}g_{43}) [y_1^*] \} \quad (3.17)$$

Из выражения (3.11), справедливого в случае, когда точка B остается на поверхности, имеем

$$E_{\text{Рзх}} = g_{31} [x_1^*] + g_{32} [y_1^*] \quad (3.18)$$

Величины (3.15) и (3.17) имеют разные знаки. Поэтому вертикальная составляющая скорости свободного движения точки B и сила ударной реакции, возникающей при скольжении точки B по абсолютно гладкой поверхности, направлены в противоположные стороны от поверхности.

Величины (3.16) и (3.18) имеют разные знаки. Поэтому скорость скольжения точки B по абсолютно гладкой поверхности (после удара) и горизонтальная составляющая силы реакции, возникающей, когда точка B остается неподвижной, направлены в разные стороны.

Сформулированные выше утверждения относительно скачка кинетической энергии и взаимного расположения векторов реакций и скоростей связаны только с положительной определенностью матрицы (3.4). Во второй части статьи эти утверждения распространяются на многозвенный двуногий механизм. В ней же исследуется вопрос о возможном движении точки B после удара.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Формальский А. М.* Движение антропоморфного механизма при импульсном управлении. — Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики. Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 27.
2. *Васенин В. А., Велерштейн Р. А., Формальский А. М.* Передвижение антропоморфных механизмов при импульсных воздействиях. — В кн.: Динамика управляемых систем. Новосибирск: Наука, 1979, с. 53.
3. *Велерштейн Р. А., Формальский А. М.* Передвижение антропоморфного механизма (со стопами) при импульсных воздействиях. Одноопорная фаза. I. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 24.
4. *Велерштейн Р. А., Формальский А. М.* Передвижение антропоморфного механизма (со стопами) при импульсных воздействиях. Двухопорная фаза. II. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 41.
5. *Алексеева Л. А., Голубев Ю. Ф.* Модель динамики шагающего аппарата. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1975, № 3, с. 72.
6. *Алексеева Л. А., Голубев Ю. Ф.* Адаптивный алгоритм стабилизации движения автоматического шагающего аппарата. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, № 5, с. 56.
7. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
8. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.X.1979