

УДК 539.3.01

**К РЕШЕНИЮ СМЕШАННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

ЛАЗАРЕВ М. И., ПЕРЛИН П. И.

Простота численной реализации метода потенциала для первой (на границе заданы смещения) и второй (на границе заданы напряжения) основных задач теории упругости [1] дает возможность применить этот метод в случае смешанных краевых условий (на части границы заданы смещения, на остальной части — напряжения). Встречающиеся трудности состоят в том, что непосредственное применение метода потенциала — представление решения в виде потенциала простого слоя — приводит к некорректной задаче, что проявляется в неустойчивости численного решения.

В работе указывается и реализуется численно метод решения, основанный на переходе к близкой корректной задаче¹.

1. Пусть тело D ограничено замкнутой односвязной Ляпунова поверхностью S , являющейся объединением своих непересекающихся частей S_1 и S_2 . Ищется приближенное решение краевой задачи

$$L(u)x=0, \quad x \in D, \quad u(x)=f(x), \quad x \in S_1, \quad T_n(x)=0, \quad x \in S_2 \quad (1.1)$$

$$L=(\lambda+\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} + \mu \Delta$$

Здесь приняты следующие обозначения: L — дифференциальный оператор теории упругости, $u(x)$ — вектор смещений упругой среды, T_n — оператор напряжений, переводящий смещения в напряжения на площадке с нормалью n .

Равенство нулю напряжений на S_2 не является принципиальным ограничением, поскольку в противном случае можно перейти к (1.1), решая вторую основную задачу.

Рассмотрим вспомогательную задачу ($\alpha > 0$):

$$Lu(x)=0 \quad x \in D, \quad \alpha T_n u + u = f \quad x \in S_1, \quad T_n u = 0 \quad x \in S_2 \quad (1.2)$$

Пусть $A = \{u: Lu=0 \quad x \in D, \quad T_n u=0 \quad x \in S_2\}$.

Задачу (1.2) для $u \in A$ можно записать в виде

$$\alpha T_n u + \delta u = f \quad (1.3)$$

где δ — оператор, сопоставляющий функции из A ее след на S_1 .

Задача (1.1) входит в класс краевых задач, изученных в [2], где показано, что эти задачи принадлежат к фредгольмовому типу. В частности, из единственности следует существование решения для любых f .

Пусть H_1, H_2 — пространства функций ($\delta: H_1 \rightarrow H_2$), в которых разрешимо уравнение (1.3) при $\alpha=0$. Для этого в силу предыдущего достаточно, чтобы оно было однозначно разрешимо. Для близости решений задач (1.1) и (1.2) при малых α достаточно теперь, чтобы оператор T_n был ограничен².

¹ См. Лазарев М. И., Перлин П. И. Метод последовательных приближений для решения пространственных задач теории упругости. Регуляризирующие алгоритмы решения смешанных задач. Информация о семинарах механико-математического факультета МГУ.— Изв. АН СССР. МГТ, 1977, № 5, с. 189.

² Изучению пространств корректной разрешимости смешанных задач посвящена работа [3], где также указаны условия ограниченности оператора T_n .

Представим решение (1.2) в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_S \Gamma(x, y) \varphi(y) d_y S$$

Здесь $\Gamma(x, y)$ — тензор Кельвина, $\varphi(y)$ — вектор, заданный на S .
Условия на S дают уравнение ($\alpha \neq 0$):

$$\varphi(x) + \int_S [T_n \Gamma(x, y) + \beta(x) \Gamma(x, y)] \varphi(y) d_y S = F(x) \quad (1.4)$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 0 & x \in S_2 \\ 1/\alpha & x \in S_1 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \in S_2 \\ f(x)/\alpha & x \in S_1 \end{cases}$$

Покажем, что произведенная замена неизвестного является эквивалентной. Заметим, что такая замена для задачи (1.1) не эквивалентна, поскольку получаемое интегральное уравнение, как легко показать, не будет корректно разрешимым в естественных пространствах.

Уравнение (1.4) нормально разрешимо, поскольку оно нормально разрешимо при $\beta(x) = 0$ [4], а свойство нормальной разрешимости не утрачивается при добавлении вполне непрерывного оператора, каким является оператор

$$\Gamma_\beta \varphi = \int_S \beta(x) \Gamma(x, y) \varphi(y) d_y S$$

Для доказательства корректной разрешимости (1.4) достаточно теперь показать его однозначную разрешимость. Из формул Бетти (см. [4]) имеем

$$\int_S u_i T_n u_i dS = \int_D E(u, u) dx$$

где i означает, что берутся значения, предельные изнутри тела D . Граничные значения однородной задачи [4] приводят к соотношению

$$\frac{1}{\alpha} \int_S u_i u_i dS + \int_D E(u, u) dx = 0$$

Следовательно, поскольку $\alpha > 0$, и в силу положительной определенности $E(u, u)$ смещение $u = 0$ на S_1 , из формулы Грина получаем, что $u(x) = 0$ при $x \in D \cup S$.

Таким образом, решение однородного уравнения (1.4) дает нулевое решение задачи (1.2), откуда уже легко следует, что и решение однородного уравнения (1.4) может быть только нулем.

Суммируя изложенное, утверждаем, что приближенное решение задачи (1.1) можно находить посредством решения уравнения (1.4). Прежде чем перейти к решению (1.4), заметим следующее. Численное решение (1.4) приводит к уравнению с возмущенным оператором. Пусть $R_\alpha \varphi_\alpha = F$ — система (1.4), записанная в операторной форме. Для обоснования возможности численного решения (1.4) и получения устойчивого приближенного решения задачи (1.1) достаточно провести следующие рассуждения.

Пусть $R_{\alpha h}$ таково, что $\|R_\alpha - R_{\alpha h}\| = O(h)$. Тогда в силу устойчивости свойства корректной разрешимости найдется такая функция $h_0(\alpha)$, что при всех $\alpha \neq 0$ уравнение $R_{\alpha h} \varphi_{\alpha h} = f_h$ корректно разрешимо, как только $h \leq h_0(\alpha)$.

Пусть $\alpha \neq 0$ и $h \leq h_0(\alpha)$, тогда

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha h}\| = \|R_\alpha^{-1} f - R_{\alpha h}^{-1} f_h\| \leq \|R_\alpha^{-1} f - R_{\alpha h}^{-1} f\| + \|R_{\alpha h}^{-1} (f - f_h)\| = O(h)$$

Итак, при выбранном соответствующим образом $h_0(\alpha)$ решение задачи (1.2)–(1.4) дает близкое порядка $O(h)+O(\alpha)$ решение задачи (1.1).

2. Укажем один из возможных конкретных методов решения задачи (1.2)–(1.4). Отметим сразу, что выбор этого метода обусловлен простотой реализации процедуры решения сингулярных интегральных уравнений для второй основной задачи (см. [1]).

Далее будут использованы следующие обозначения:

$$T: \varphi \rightarrow \int_S T_{nx} \Gamma(x, y) \varphi(y) d_y S$$

T^* — оператор, сопряженный в $L_2(S)$ к оператору T , $R(I+T)$, $N(I+T)$ — соответственно область значений и подпространство нулей оператора $I+T$. Обозначим шесть линейно-независимых векторов жесткого смещения S через ψ_i ($i=1, 2, \dots, 6$). Как известно (см. [4]):

$$N^+(I+T^*) = R(I+T) = \{\varphi \in L_2(S), (\varphi, \psi_i) = 0\}$$

Представим в (1.2) f в виде суммы

$$f = f^1 + f^2 = \left\{ f - \sum_{i=1}^6 (f, \psi_i)_1 \psi_i \right\} + \sum_{i=1}^6 (f, \psi_i)_1 \psi_i$$

где единица в нижнем индексе означает скалярное умножение в $L_2(S_1)$. Производа замену

$$u = u_1 + u_2, \quad u_2 = \sum_{i=1}^6 (f, \psi_i)_1 \Psi_i(x), \quad \Psi_i(x)|_S = \psi_i(x)$$

где $\Psi_i(x)$ — жесткое смещение D , приходим к задаче (1.2), где f ортогонально в $L_2(S)$ к жесткому смещению. Будем считать, что это условие выполнено.

Пусть $N = \{\varphi \in L_2(S_1) : (\varphi, \psi_i)_1 = 0, i=1, 2, \dots, 6\}$, $\{\Phi_k\}$ — система функций полная в N и $M = \{\varphi \in R(I+T) \subset L_2(S) : (I+T)\varphi = 0, x \in S_2\}$.

Пусть далее $F_k(x) = \Phi_k(x)$ $x \in S_1$, $F_k(x) = 0$ $x \in S_2$; тогда система

$$H_k = (I+T)^{-1} F_k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} T^n F_k \in R(I+T)$$

полна в M (здесь под $(I+T)^{-1}$ подразумевается резольвента сужения T на $R(I+T)$).

Приближенное решение (1.4) будем искать в виде $\varphi_n = \sum \alpha_k^{(n)} H_k$ ($k=0, 1, \dots, n$). При этом задача сведется к поиску минимума функционала

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \left\{ \alpha_k^{(n)} \int_S \Gamma(x, y) H_k(y) d_y S - \alpha F_k(x) \right\} \right\| \quad (2.1)$$

по $\alpha_k^{(n)}$. Для обоснования достаточно показать, что если φ — решение (1.4) при $F \in R(I+T)$, то $\varphi \in R(I+T)$.

Покажем вначале, что для

$$g(x) = \left[\int_S \Gamma(x, y) \varphi(y) d_y S \right]_{x \in S_1}$$

n	$a_1 \cdot 10^{-2}$	$a_2 \cdot 10^{-2}$	$a_3 \cdot 10^{-2}$	$a_4 \cdot 10^{-2}$	$a_5 \cdot 10^{-2}$	$a_6 \cdot 10^{-2}$	$a_7 \cdot 10^{-2}$	$a_8 \cdot 10^{-2}$	$a_9 \cdot 10^{-2}$	$a_{10} \cdot 10^{-2}$	$10^{-3} \cdot \sigma_T$	$10^{-3} \cdot \sigma_{ZT}$
2	346	5632									-53,5	950
	336	5456									-51,6	920
4	4187	7295	4507	-213							523	1247
	1069	6791	3980	-446							447	1180
6	1784	8700	6101	1752	3066	1336					187	1057
	1271	7130	4493	81	1339	261					289	1114
8	2214	9592	6683	2687	3778	2413	1711	97			441	860
	1282	7182	4505	80	1336	283	113	207			308	1134
10	2441	9009	6908	2093	3947	3011	1988	2060	351	1796	400	800
	1268	7196	4485	83	1325	284	76	311	827	241	315	1139

имеем $(g, \psi)_i = 0, i=1, 2, \dots, 6$. Пусть $g(x) = g_1 + \psi, g_1(x) : (g_1, \psi)_i = 0, \psi = \sum c_i \psi_i$. Умножая (1.4) на ψ и учитывая, что $(f, \psi)_i = 0$, получим $\psi = 0$.

Пусть φ° — решение (1.4). Тогда φ° можно представить в виде

$$\varphi^\circ = \sum_{k=0}^{\infty} (-T)^k G, \quad G = F - \Gamma_B \varphi^\circ.$$

Из единственности решения и из того, что $G \in R(I+T)$, получаем $\varphi^\circ \in R(I+T)$.

Итак, φ° представимо в виде ряда $\varphi^\circ = \sum a_k^{(n)} H_k$ ($k=0, 1, \dots, n$).

Пусть еще $\{\Phi_k\}$ сильно минимальна в N . Тогда в силу корректной разрешимости уравнения $H_k + TH_k = F_k$ в $R(I+T)$ система $\{H_k\}$ сильно минимальна в M , и из корректной разрешимости (1.4) следует сильная минимальность $\{(I+T+\Gamma_B)H_k\}$ в M . Последнее обеспечивает устойчивость решения задачи о поиске минимума функционала (2.1) [5], что означает хорошую обусловленность соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Для точного решения φ и приближенного $\varphi_n = \sum a_k^{(n)} H_k$ имеем, очевидно:

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \left\| R_\alpha^{-1} f - \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} H_k \right\| \leq \|R_\alpha^{-1}\| \|f - \sum a_k^{(n)} R_\alpha H_k\| \rightarrow 0$$

Следует отметить, что при подстановке $\varphi = \sum a_k^{(n)} H_k$ в (1.4) получаем следующее уравнение:

$$\alpha \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} H_k + \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \Gamma H_k = f$$

(второе уравнение удовлетворяется тождественно) и, таким образом, нет необходимости вычислять сингулярные интегралы, появившиеся в результате перехода от задачи (1.1) к задаче (1.2).

Итак, алгоритм нахождения приближенного решения φ_n заключается в выполнении следующих действий.

1. Решение второй основной задачи (n раз). Отметим, что при численной реализации существенную экономию машинных ресурсов дает одновременное вычисление приближений для краевых задач: на i -м шаге вычисляются для всех $k=1, 2, \dots, n$: $H_k^i = TH_k^{i-1} + F_k$.

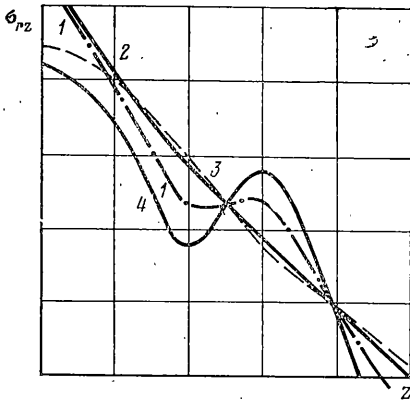
2. Вычисление регулярных интегралов

$$\int_S \Gamma(x, y) H_k(y) d_y S$$

3. Решение линейной алгебраической системы n -го порядка относительно $a_k^{(n)}$.

3. Приведем результаты численной реализации метода. Решалась задача для цилиндра с отношением высоты к радиусу 1 : 5. Краевые условия: торцы свободны от напряжений, на образующей $u_r=0$, $u_z=z$ (ось z перпендикулярна торцам, начало координат расположено в центре симметрии цилиндра).

На поверхности S_1 (боковая поверхность цилиндра) зададим полную систему $\Phi_k = T_k(z) (z^2 - 0,25)^{-0,31}$, где $T_k(z)$ — полиномы Чебышева на отрезке $(-0,5; 0,5)$. Множитель $(z^2 - 0,25)^{-0,31}$ взят для учета особенности в напряжениях в окрестности особой линии контура (см. [6]), при этом константа 0,31 является решением соответствующего трансцендентного уравнения при $\sigma = 0,38$.



В таблице приведены значения коэффициентов a_k и напряжений σ_{rz} ($z = 0,4$), σ_r ($z = 0$), при этом для каждой первой строки — коэффициенты, полученные из решения системы при $\alpha = 0$, вторая — при $\alpha = 10^{-8}$. Коэффициенты устанавливаются быстрее при $\alpha = 10^{-8}$, то же происходит и со значениями контактных напряжений.

На фигуре приведены контактные напряжения (σ_{rz}) на боковой поверхности. Решения при $\alpha = 10^{-8}$, $n = 8$, $n = 10$ в пределах сетки совпадают (кривая 2), в то время как те же решения при $\alpha = 0$ значительно отличаются (соответственно кривые 3 и 4). Это обстоятельство, так же как и поведение коэффициентов разложения контактных напряжений, объясняется устойчивостью вариационного метода при $\alpha \neq 0$ (задача корректна) и неустойчивостью при $\alpha = 0$ (некорректная задача). На фигуре приведена также эпюра σ_{rz} , полученная при $\alpha = 10^{-9}$, $n = 10$ (кривая 1). Невязки смещений на боковой поверхности для приведенных решений были порядка $10^{-4} - 10^{-5}$.

Поскольку задача в конечном счете сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений, то устойчивость связана с обусловленностью матрицы коэффициентов этой системы.

Если вычисления ведутся с десятичными знаками, то параметр α должен выбираться таким образом, чтобы, с одной стороны, имела место близость решений задач (1.1) и (1.2) (α мало), а с другой стороны, члены, содержащие α , должны изменять соответствующие элементы матрицы в m -м знаке $m < k$.

Очевидно, разность $k - m$ зависит от размерности матрицы, что связано с потерей значащих цифр при обращении.

Изложенный метод с некоторыми упрощениями применим для смешанной задачи уравнения Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перлин П. И. Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений основных пространственных задач теории упругости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 109.
2. Вишик М. И. О краевых задачах для систем эллиптических дифференциальных уравнений и об устойчивости их решений. — Докл. АН СССР, 1952, т. 86, вып. 4, с. 645.

3. Вишик М. И., Эскин Г. И. Пространства Соболева — Слободецкого переменного порядка с весовыми нормами и их приложения к смешанным краевым задачам.— Сибирск. матем. ж., 1968, т. 9, № 5, с. 973.
4. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 740 с.
5. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
6. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Mech. 1952, v. 19, No. 4, p. 526.

Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1979