**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1981**

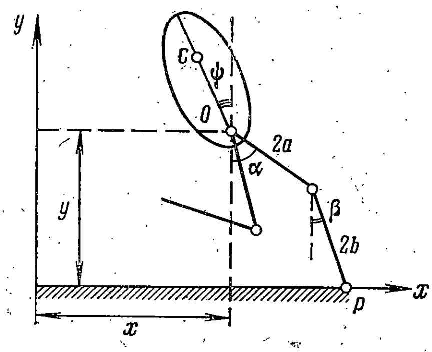
УДК 531.8

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

БЕЛЕЦКИЙ В. В., ЛАВРОВСКИЙ Э. К.

Рассматривается задача построения походок двуногого шагающего аппарата с невесомыми ногами. Решение строится на основе принципа «комфортабельности» [1]. Как в линейном, так и в нелинейном случае исследуются свойства периодических решений уравнения, описывающего компенсирующие колебания корпуса. В нелинейной постановке изучены некоторые динамические особенности периодических решений, рассмотрена зависимость энергетики этих решений от ряда кинематических и конструктивных параметров. При движении корпуса в режиме «головой вниз» обнаружен эффект резкого возрастания потребной энергетики и ряда других динамических характеристик.

1. В работе [1] рассмотрена модель двуногой ходьбы. Аппарат представляет собой пятизвенный механизм, управляемый с помощью активных моментов q, u в точках «тазобедренного» и «коленного» суставов (фиг. 1). Предположим, что ходьба носит плоский, одноопорный характер, движение происходит в плоскости xy, поверхность опоры горизонтальна.



Фиг. 1

Для простоты будем считать, что ноги аппарата обладают нулевой массой. Таким образом, весь вес аппарата сосредоточен в «корпусе» массы M_0 (т. C — его центр масс) и в «платформе» массы m, расположенной в точке O тазобедренного сустава (точке крепления ног к корпусу). Суммарная масса аппарата равна $M=M_0+m$.

Координатами, определяющими положение рассматриваемой динамической системы, являются (фиг. 1): x, y — координаты точки O; α, β — углы с вертикалью «бедра» и «голени» опорной ноги; ψ — угол отклонения корпуса. В [1] получены уравнения, описывающие поведение такой системы

$$\begin{gathered}
Mx^{\cdot\cdot}-k_r(\psi^{\cdot\cdot}\cos\psi-\psi^{\cdot 2}\sin\psi)=R_x\\
My^{\cdot\cdot}-k_r(\psi^{\cdot\cdot}\sin\psi+\psi^{\cdot 2}\cos\psi)=R_y-Mg\\
I\psi^{\cdot\cdot}-k_r(x^{\cdot\cdot}\cos\psi+y^{\cdot\cdot}\sin\psi)-k_rg\sin\psi=q\\
-u-q+2a(R_x\cos\alpha+R_y\sin\alpha)=0,\quad u+2b(R_x\cos\beta+R_y\sin\beta)=0\\
x=x_p-2(a\sin\alpha+b\sin\beta),\quad y=y_p+2(a\cos\alpha+b\cos\beta)
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь приняты следующие обозначения: I — момент инерции корпуса относительно точек O; $k_r=Mr_*$, где r_* — расстояние от точки O до центра масс корпуса с платформой; $2a$, $2b$ — размеры бедра и голени; g — ускорение свободного падения; (x_p, y_p) — координаты точки опоры P; R_x, R_y —

проекции силы реакции опоры; управляющие моменты q и u в опорной ноге считаются положительными, если они «распирают», соответствующие межзвенные углы. Поскольку переносная нога невесома, управляющие моменты в ней равны нулю. Постановку ноги на поверхность и сход с нее будем считать безударным.

Поясним физический смысл системы (1.1). Первые три уравнения выражают теорему о движении центра масс системы и теорему об изменении кинетического момента в осях Кёнига с началом в точке O. Следующие два уравнения являются условиями равновесия бедра и голени опорной ноги. Последние два соотношения — геометрические и связывают координаты точки опоры и таза.

Походку аппарата будем строить при помощи полуобратного метода [1, 2], при котором движение частично задается в виде явных функций времени, частично определяется из некоторых уравнений. Воспользуемся принципом комфортабельности движения таза [1], согласно которому на каждом шаге аппарата выполняются условия

$$x_p-x=\sigma-Vt, \quad y-y_p=h \tag{1.2}$$

где V, σ, h — скорость движения, опорный отрезок и высота походки; t — текущее время. Предполагая, что походка регулярная, сведем исследование к рассмотрению временного отрезка $[0, T]$, отвечающего одноопорному циклу. Производя подстановку одних из уравнений системы (1.1) в другие, нетрудно получить следующее уравнение [1], описывающее компенсирующие колебания корпуса при выбранном комфортабельном законе движения

$$\begin{gathered}\{I+k_rh\cos\psi-k_r(Vt-\sigma)\sin\psi\}\psi^{\cdot\cdot}-\\ -k_r\psi^{\cdot 2}\{(Vt-\sigma)\cos\psi+h\sin\psi\}-k_rg\sin\psi=-Mg(Vt-\sigma)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Будем изучать периодические движения. Периодичность перемещения ног является следствием регулярности походки. Необходимо обеспечить лишь периодическое изменение угла ψ. Задача построения периодического движения, таким образом, сводится к нахождению начальных значений ψ_0, $\psi_0^{\cdot}$ угла ψ и угловой скорости $\psi^{\cdot}$, для которых в силу (1.3) выполняется условие

$$\psi(t=T)=\psi_0, \quad \psi^{\cdot}(t=T)=\psi_0^{\cdot} \tag{1.4}$$

Исследуем краевую задачу (1.3), (1.4).

2. Полученная краевая задача, хотя и имеет второй порядок, но является нелинейной, неавтономной и потому вряд ли может быть решена во всей области изменения динамических и конструктивных параметров. Одним из приближенных методов ее исследования является линеаризация.

Рассмотрим периодические решения линеаризованного уравнения (1.3) в окрестности положений $\psi=0$ и $\psi=\pi$, отвечающих режимам движения «головой вверх» и «головой вниз». Судя по численному анализу, эти решения имеют в нелинейной задаче важное значение.

1. *Режим движения головой вверх.* Полагая величины ψ и $\psi^{\cdot}$ малыми, заменяя $\sin\psi\sim\psi$ и $\cos\psi\sim1$, из уравнения (1.3) получим

$$\psi^{\cdot\cdot}-[k_rg/(I+k_rh)]\psi=-Mg(Vt-\sigma)/(I+k_rh) \tag{2.1}$$

Периодическое решение уравнения (2.1), удовлетворяющее краевым условиям (1.4), рассматривалось в [1]. Оно имеет вид

$$\psi(t)=\frac{ML}{2k_r}\left[\operatorname{ch}\omega t-\frac{1+\operatorname{ch}\omega T}{\operatorname{sh}\omega T}\operatorname{sh}\omega t\right]+\frac{M(Vt-\sigma)}{k_r} \tag{2.2}$$

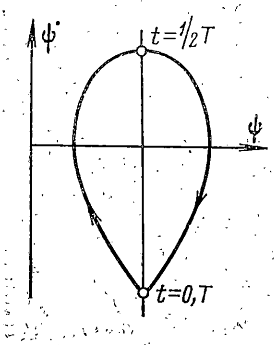
а начальные значения угла и угловой скорости равны

$$\psi_0=M\frac{L/2-\sigma}{k_r},\quad \psi_0^{\cdot}=-\frac{MV}{k_r}\left[1-\frac{T\omega}{2}\operatorname{cth}\frac{\omega T}{2}\right] \tag{2.3}$$

Здесь $L=VT$ – длина шага походки, $\omega^2=k_rg/(I+k_rh)$. Таким образом, начальное значение угловой скорости неположительно.

Исследуя выражение второй производной $\psi^{\cdot\cdot}(t)$ периодического процесса, полученное из (2.2), нетрудно показать, что угловая скорость имеет единственную точку экстремума при $t\in[0, T]$. Этот экстремум (локальный максимум) достигается при $t={}^1/_2T$, причем

$$\psi^{\cdot}\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{MV}{k_r}\left[1-\omega T\frac{e^{{}^1/_2\omega T}}{e^{\omega T}-1}\right]\geqslant 0 \tag{2.4}$$



Фиг. 2

Из формул (2.3) и (2.4) легко показать, что $|\psi_0^{\cdot}|\geqslant\psi^{\cdot}({}^1/_2T)$. Угловая координата $\psi(t)$ достигает локального минимума на отрезке $t\in[0, T/2]$ и локального максимума при $t\in[T/2]$. Непосредственно из (2.2) можно установить следующее свойство симметрии периодических решений относительно момента времени $T/2$:

$$\psi^{\cdot}(t)=\psi^{\cdot}(T-t),\quad \psi(t)-\psi_0=-[\psi(T-t)-\psi_0] \tag{2.5}$$

Типичный фазовый портрет периодического решения изображен на фиг. 2.

Рассмотрим симметричную походку ($\sigma=L/2$). При $V\to\infty$ ($L=$const), а также при $V\to 0$ ($T=$const) периодическое решение, согласно (2.2)–(2.4) равномерно по t, близко к нулю. Следовательно, можно ожидать, что при малых и больших значениях скорости V решения линеаризованной задачи сколь угодно точно аппроксимируют периодические решения исходного уравнения (1.3), которые могут быть использованы в качестве высокоточного первого приближения при численном исследовании нелинейной задачи.

2. *Режим движения головой вниз.* Вводя в рассмотрение новую переменную δ, имеем $\psi=\pi+\delta$; полагая δ и $\delta^{\cdot}$ достаточно малыми, получим из (1.3):

$$\delta^{\cdot\cdot}+[k_rg/(I-k_rh)]\delta=-Mg(Vt-\sigma)/(I-k_rh) \tag{2.6}$$

При $I<k_rh$ исследование по существу повторяет все, относящееся к периодическим режимам головой вверх. Единственное отличие состоит в том, что правые части уравнений (2.1) и (2.6) имеют разные знаки при одних и тех же параметрах походки. В случае $\sigma>L/2$, например, фазовый портрет периодического решения уравнения (2.1) смещен в область отрицательных значений ψ, а фазовый портрет уравнения (2.6) – в область положительных δ. Однако в физическом смысле оба решения идентичны, поскольку отвечают случаю преимущественного смещения корпуса вперед по ходу движения.

Пусть $I>k_rh$. Тогда периодическое решение уравнения (2.6) имеет вид

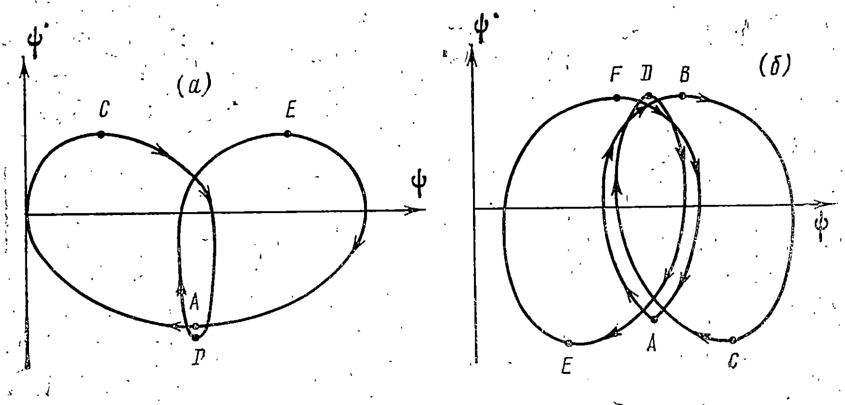
$$\delta(t)=\frac{ML}{2k_r}\left[-\cos\omega t+\frac{\sin\omega T}{1-\cos\omega T}\sin\omega t\right]-\frac{M}{k_r}(Vt-\sigma) \tag{2.7}$$

начальные значения угла δ и угловой скорости $\delta^{\cdot}$ равны

$$\delta_0 = M\frac{(\sigma - L/2)}{k_r},\qquad \delta_0^{\cdot} = \frac{MV}{k_r}\left[\frac{\omega T/2}{\operatorname{tg}\omega T/2} - 1\right] \tag{2.8}$$

$$\omega^2 = k_r g/(I - k_r h)$$

Конечное периодическое решение (2.7) существует лишь в случае $\omega T \neq 2n\pi$ (n — целое), причем это решение симметрично, т. е. удовлетво-



Фиг. 3

ряет условию (2.5). Из формулы (2.8) вытекает, что $\delta_0^{\cdot}$ неположительно при $\omega T/2 \leqslant \operatorname{tg}\omega T/2$ и неотрицательно при $\omega T/2 > \operatorname{tg}\omega T/2$.

Оба случая аналогичны. Рассмотрим первый.

Дважды дифференцируя выражение (2.7) и анализируя получившееся, нетрудно показать, что локальный экстремум угловой скорости $\delta^{\cdot}$ достигается в моменты времени

$$t = \pi n/\omega + T/2 \quad (n - \text{целое}) \tag{2.9}$$

если, разумеется, они заключены в пределах отрезка $[0, T]$.

Пусть сначала $T\omega/2 < \pi$. Условие (2.9) дает единственное на отрезке $[0, T]$ решение $t = T/2$, при котором функция $\delta^{\cdot}$ достигает максимальной величины. Минимум ее достигается при $t = 0, T$. Фазовый портрет качественно имеет вид фиг. 2.

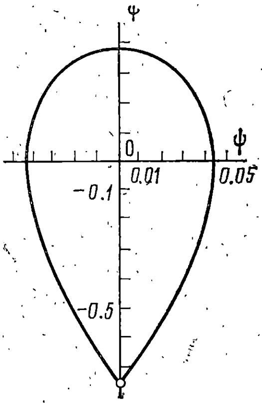
При $\pi(2k-1) < \omega T/2 < 2\pi k$ (k — положительное, целое) угловая скорость достигает локального максимума в точках $t = T/2 \pm (2m-1)\pi/\omega$ (m — целое) и локального минимума при $t = T/2 \pm 2m\pi/\omega$ (m — целое).

Наоборот, при $2k\pi < \omega T/2 < (2k+1)\pi$ (k — положительное, целое) точки первого типа отвечают локальным минимумам функции $\delta^{\cdot}(t)$, а второго типа — локальным максимумам той же функции. Значения угловой скорости в точках локального экстремума равны

$$\begin{aligned}
\delta^{\cdot}\left(\frac{T}{2} \pm \frac{(2m-1)\pi}{\omega}\right) &= MV\left[\frac{\omega T/2}{\sin(\omega T/2)} - 1\right] \Big/ k_r \\
\delta^{\cdot}\left(\frac{T}{2} \pm \frac{2m\pi}{\omega}\right) &= -MV\left[\frac{\omega T/2}{\sin(\omega T/2)} + 1\right] \Big/ k_r
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Сравнивая формулы (2.8) и (2.10), можно убедиться, что значения функции $\delta^{\cdot}(t)$ в точках локального экстремума являются и абсолютно экстремальными, причем $\max_{t\in[0,T]}\delta^{\cdot}(t) \leqslant |\min_{t\in\{0,T\}}\delta^{\cdot}(t)|$. Фазовые портреты периодических решений, отвечающие случаям $k=1$ и $k=2$, изображены на фиг. 3*а* и *б*. Точки $A-F$ на фиг. 3 соответствуют моментам времени $0(T)$, $T/2-2\pi/\omega$, $T/2-\pi/\omega$, $T/2$, $T/2+\pi/\omega$, $T/2+2\pi/\omega$.

3. Нелинейная задача исследовалась численным методом. Дадим обзор некоторых полученных результатов. В большинстве случаев при расчетах были приняты следующие значения параметров: $M=70$ кг, $I=9{,}63$ кгм^2, $k_r=17$ кгм, $a=b=0{,}225$ *м*. Эти параметры отвечают аппарату антропоморфной конструкции с корпусом, выполненным в виде равномерного стержня длиной $\approx 0{,}85$ м и весом 40 кг, с платформой весом в 30 кг; общий рост аппарата $\approx 1{,}75$ м. При решении задачи на ЭВМ в качестве первого приближения использовались решения линеаризованной задачи.



Фиг. 4

Будем исследовать режим движения типа головой вверх. Фазовый портрет типичного периодического решения представлен на фиг. 4 (в рад и рад/с). Расчеты производились для симметричного случая походки с параметрами $L=0{,}5$ м, $h=0{,}8$ м, $V=0{,}8$ м/с. Корпус совершает одно колебание в направлении вперед — назад — вперед с амплитудой по углу ψ порядка 2,5°. Характер фазового портрета очень напоминает соответствующие графики линейной задачи.

В других вариантах счета с антропоморфными параметрами L, h, V амплитуды колебаний корпуса в случае симметричных походок колебались в пределах от 0° до 20°. Все найденные периодические решения носили симметричный характер, несимметричные решения при $\sigma=L/2$ не обнаружены. Судя по всему, они могут иметь место в каких-то исключительных случаях. Следующие наводящие соображения говорят в пользу этого: краевая задача (1.3), (1.4) наряду с периодическим решением $\psi(t)$ имеет еще одно — $\psi(T-t)$. Для того чтобы эти решения совпадали $\psi(t)\equiv-\psi(T-t)$ и, следовательно, общее решение было бы симметричным, необходимо, чтобы $\psi_0=0$ или $\psi_0=\pi$. В линейной постановке последнее выполняется только при $\sigma=L/2$.

На фиг. 5, *а*, *б* (время дано в с) представлены графики опорных реакций R_x, R_y (в Н) и управляющих моментов q, u (в Нм), отвечающих тому же случаю движения. График $R_x=R_x(t)$ симметричный, почти прямолинейный с характерным переходом величин реакций из отрицательной области в положительную. График вертикальной реакции $R_y=R_y(t)$ имеет два «горба», расположенных симметрично относительно значения $t=T/2$.

Из анализа всей совокупности расчетов можно сделать вывод, что амплитуды колебаний функций R_x и R_y растут при увеличении шага L и уменьшении высоты h. Зависимость этих величин от параметра V несколько иная: амплитуда горизонтальной силы реакции возрастает при уменьшении скорости, а амплитуда колебаний R_y от V практически не зависит.

График функции $q(t)$ также почти прямолинейный. Из его рассмотрения видно, что в начале опорной фазы управляющий момент q толкает корпус в направлении назад, а на конечной фазе — в направлении вперед, выполняя, таким образом, попеременно то демпфирующую, то ускоряющую роль. Управляющий момент u постоянно положительный, т. е. управление в колене во все фазы работает на разгиб. Как правило, амплитуда коленного момента заметно больше амплитуды тазобедренного момента (в 1,5—4 раза). При росте L и уменьшении h обе амплитуды растут. Зависимость их от V выражена крайне слабо.

Определенный интерес представляет исследование энергетики ходьбы.

Рассмотрим ряд функционалов, которые представляются достаточно разумными как с биологической, так и с конструктивной точки зрения. Под «основным» функционалом энергетики будем понимать

$$E=\int_0^T\left|\frac{dA}{dt}\right|dt=\int_0^T\{|q||\psi^{\cdot}-\alpha^{\cdot}|+|u||\alpha^{\cdot}-\beta^{\cdot}|\}dt$$

Функционал E представляет собой интеграл от модуля производной механической работы A, затрачиваемой на поддержание аппаратом заданного режима ходьбы. Легко видеть, что при всех прочих фиксированных параметрах энергетика E является функцией параметров походки $E=E(V,L,h,\sigma)$.

Расчеты на ЭВМ позволяют выявить зависимость E от указанных параметров. На фиг. 6, 7 (E в Дж, V в м/с; L, h, σ в м) для одного из случаев движения представлена зависимость E при поочередной вариации каждого из четырех параметров, входящих в правую часть (3.2), в окрестности состояния $L=0{,}5$ м, $\sigma=L/2$, $h=0{,}79$ м, $V=1$ м/с. Зависимость E от σ показана на фиг. 6, *а*. Функционал E сильно зависит от σ [3]. Оптимум E достигается при значении σ, чуть большем $L/2$ на величину порядка 10% от длины шага. Таким образом, в оптимальном случае опорный отрезок чуть больше половины длины шага $L/2$.

Полагая походку симметричной, рассмотрим зависимость $E=E(h)$ на фиг. 6, *б*. Характерным является уменьшение E при росте h до самой границы допустимых высот. Ограничение на высоту походки является кинематическим, величина предельной высоты определяется длиной ног и длиной шага.

Зависимость $E=E(L)$ показана на фиг. 6, *в* сплошной линией. С уменьшением длины шага $L\to 0$ функционал E убывает до нуля, что естественно, поскольку вместе с L стремится к нулю и период T. Штриховой линией на той же фигуре показано поведение величины $E_1=E/L$. Точка минимума E_1 определяет величину шага, при котором обеспечивается энергетически оптимальная ходьба на заданное расстояние. На графике функция $E_1(L)$ не имеет точек абсолютного, или хотя бы относительного минимума, т. е. $L_{min}=0$. Этот факт может быть доказан и чисто аналитически.

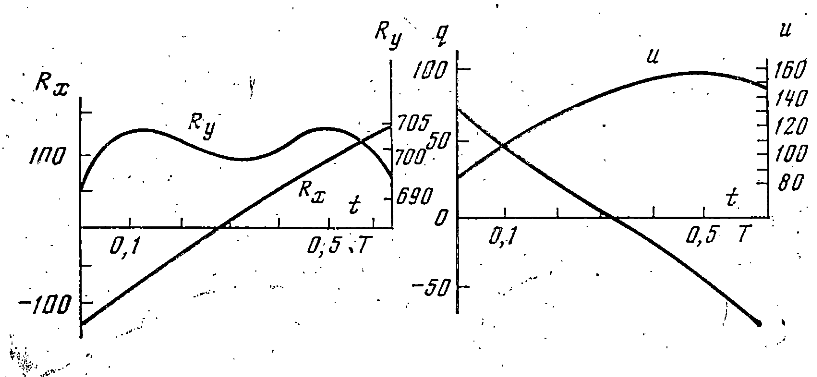
Зависимость $E=E(V)$ представлена на фиг. 7, *а*. Расчеты показывают, что функционал E относительно велик для малых скоростей V, при «средних» скоростях достигает минимума и выходит на «плато», несколько поднимающееся вверх при $V\to\infty$. На участке плато, достаточно широком в смысле диапазона скоростей, энергетика изменяется достаточно мало. В других вариантах расчетов оптимальные значения скорости V_{min} лежат в диапазоне 0,55—3,5 м/с, причем они растут вместе с увеличением h и L.

На фиг. 7, *б* представлена зависимость $E_1(V)$, где

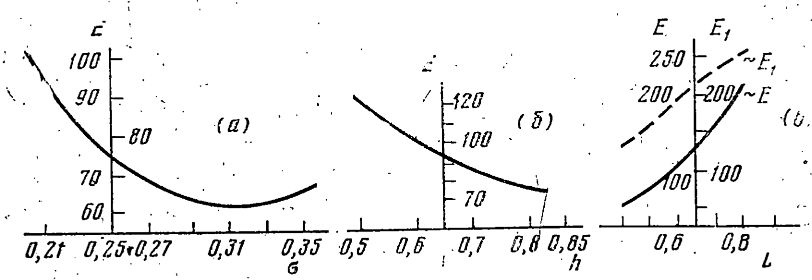
$$E_1=\int_0^T\left\{\left|q+k\frac{(\psi^{\cdot}-\alpha^{\cdot})^3}{|\psi^{\cdot}-\alpha^{\cdot}|}\right|\left|\psi^{\cdot}-\alpha^{\cdot}\right|+\left|u+k\frac{(\beta^{\cdot}-\alpha^{\cdot})^3}{|\beta^{\cdot}-\alpha^{\cdot}|}\right|\left|\beta^{\cdot}-\alpha^{\cdot}\right|\right\}dt$$

Функционал E_1 в отличие от E учитывает потери энергии в системе управления на вязкое трение в суставах. Члены $q+k[(\psi^{\cdot}-\alpha^{\cdot})^3/|\psi^{\cdot}-\alpha^{\cdot}|]$, $u+k[(\beta^{\cdot}-\alpha^{\cdot})^3/|\beta^{\cdot}-\alpha^{\cdot}|]$ характеризуют значения управляющих моментов в суставах, необходимые для реализации периодического решения. Величина коэффициента трения выбиралась близкой к антропоморфной[1] и равной $k=10$ Нмс. Из рассмотрения фиг. 7, *б* следует, что оба функционала

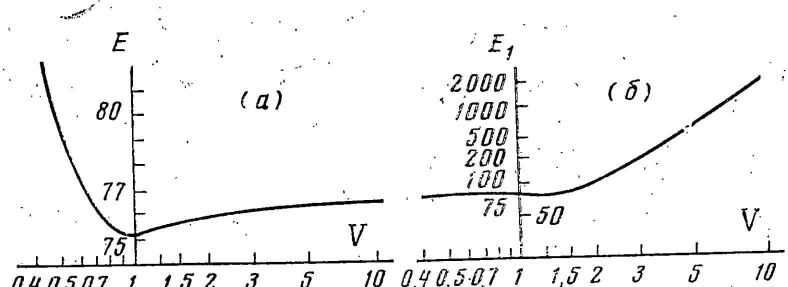
[1] *Васенин В. А.* Управление движением антропоморфной ноги на фазе переноса: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук, М.: МГУ, 1978, 134 с.



Фиг. 5



Фиг. 6



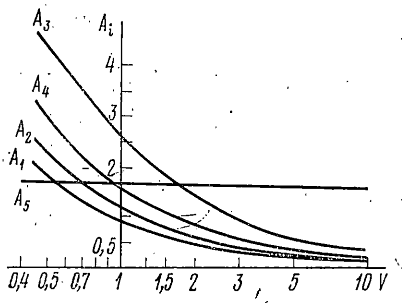
Фиг. 7

ведут себя сходным образом при малых и средних скоростях движения (до $V\approx1{,}5$ м/с). Однако при больших значениях V функционал E_1 уже не имеет участка плато, характерного для графика на фиг. 7, *а*.

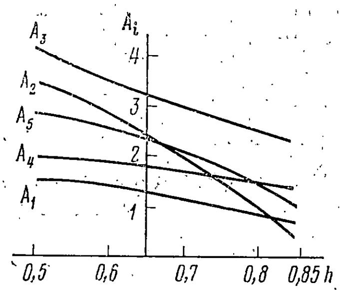
В целом потребная энергетика в случае невесомых ног и нулевого трения меньше, чем в соответствующих случаях энергетики ходьбы с ногами, имеющими массу. Для подтверждения сошлемся на следующие данные, полученные по результатам публикуемого исследования и работы [5]:

L (м)	0,4	0,5	0,6	0,7
A (Дж)	46,0	72,7	108,0	154,3
E (Дж)	42,6	59,0	76,9	117,9

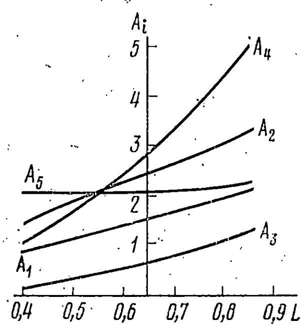
Здесь A — оптимальная энергетика ходьбы с ногами, имеющими массу [5] при заданной длине шага L, которая получена для аппарата с теми же основными динамическими и кинематическими параметрами; E — оптимальная энергетика в случае невесомых ног. Оптимум E в отличие от A достигается при больших скоростях движения V и больших высотах h.



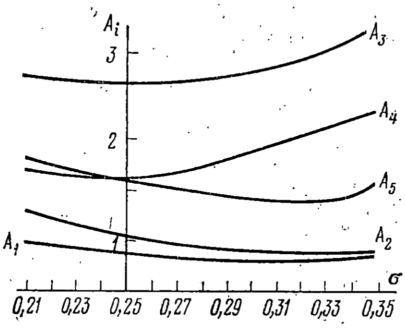
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

Приводим обзор результатов оптимизации других энергетических функционалов, в качестве которых были рассмотрены

$$A_1=\int_0^T(|u|+|q|)\,dt,\qquad A_2=\int_0^T(u^2+q^2)\,dt$$

$$A_3=\int_0^T[R_x^2+(R_y-M_g)^2]\,dt,\qquad A_4=\int_0^T\{|R_x|+|R_y-M_g|\}\,dt$$

$$A_5=\max_{t\in[0,T]}(\max\{|q|,|u|\})$$

Графики зависимостей A_i ($i=1,\ldots,5$) от V, h, L и σ (размерности последних те же) представлены на фиг. 8—11. Кривая *1* соответствует функционалу $A_1\cdot10^{-2}$ (в Нмс), кривая *2* — функционалу $A_2\cdot10^{-4}$ (в Н^{2}м^{2}с), кривая *3* — функционалу $A_3\cdot10^{-3}$ (в Н^{2}с)[2], кривая *4* — функционалу $^1/_2A_4\cdot10^{-1}$ (в Нс) и кривая *5* — функционалу $A_5\cdot10^{-2}$ (в Нм). В качестве опорной точки при варьировании параметров V, L, h, σ принята та же точка, что и при рассмотрении функционала E.

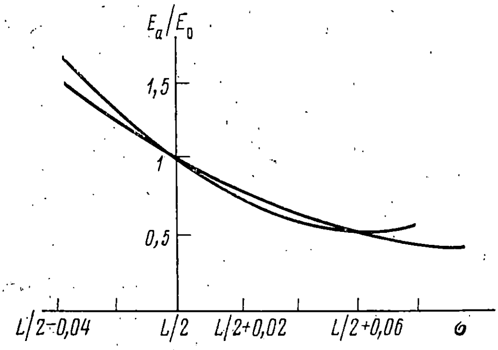
Зависимости $A_i(V)$ ($i=1,\ldots,4$) приближенно пропорциональны V^{-1}, т. е. периоду шага T; функционал A_5 от V практически не зависит, поскольку, как отмечалось выше, величины реакций опоры R_x, R_y и управляющих моментов мало изменяются при варьировании параметра V.

Графики $A_i=A_i(h)$ ($i=1,\ldots,5$) имеют в целом тот же характер, что и зависимость $E(h)$. Обращает на себя внимание более сильная зависимость от h квадратичных критериев A_2, A_3 и критерия A_5. Функции $A_i(\sigma)$

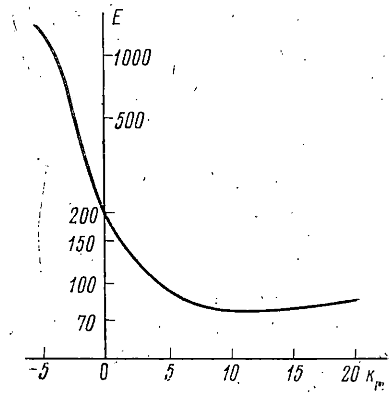
[2] На фиг. 10 масштаб функционала A_3 равен $A_3\cdot10^{-4}$.

слабее зависят от σ в сравнении с идентичной зависимостью $E(\sigma)$. В особенности это касается функционалов, зависящих от управляющих моментов. Минимум A_1, A_2 и A_5 достигается примерно там же, где и у $E(\sigma)$. Функции $A_3(\sigma)$, $A_4(\sigma)$, более зависимые от σ, достигают минимума при $\sigma={}^1/_2L$.

Функции $A_i(L)$ $(i=1,\ldots,4)$ стремятся к нулю при $L\to0$. Наиболее круто убывают функционалы A_3 и A_4, зависящие от сил реакции опоры. Функции A_1 и A_2 почти линейно зависят от L. В силу этого значение $L_{\min}$



Фиг. 12



Фиг. 13

по данным функционалам отсутствует. Основное значение L для функционалов A_3 и A_4 равно нулю. Наконец, функционал A_5 фактически не зависит от L.

В целом поведение функционалов $A_i(V, L, \sigma, h)$ $(i=1,\ldots,5)$ в большинстве случаев идентично поведению основного функционала (3.1).

4. Остановимся на некоторых динамических эффектах, наблюдаемых при сравнении антропоморфной и орнитоморфной типов комфортабельных походок. Походка птицы отличается от походки человеческого типа прежде всего низким положением центра масс корпуса по отношению к точке подвеса ног, а также своеобразной кинематикой ноги, которая перемещается «коленкой назад» (т. е. $\alpha\leqslant\beta$).

1. *Ходьба коленкой назад.* На фиг. 12 (σ в м) показано в функции параметра σ отношение E_a — энергетики ходьбы в режиме головой вверх, коленками вперед (т. е. $\alpha\geqslant\beta$) и E_0 — соответствующей энергетики ходьбы коленками назад. Рассмотрены два динамически различных варианта движения. Согласно этому графику, ходьба коленками вперед энергетически выгоднее при $\sigma>L/2$. Наоборот, при $\sigma<L/2$ выгоднее ходьба коленками назад. Если $\sigma=L/2$, то данные энергетики равны. Этот факт можно доказать и аналитически.

Ряд расчетов, выполненных для режимов движения головой вниз, дает основание судить о том, что отмеченное свойство с некоторыми оговорками имеет место и в этом случае.

2. *Ходьба при низком положении центра масс корпуса.* Исследуем зависимость энергетики от r — высоты крепления корпуса на оси OC (фиг. 1). Поскольку $k_r=M_0r=Mr_*$, то в качестве определяющего может быть выбран параметр k_r. При $k_r>0$ точка подвеса ног расположена ниже центра масс аппарата, при $k_r<0$ — выше. Таким образом, периодические режимы с $\psi\sim0$ отвечают в первом случае движению головой вверх, а во втором — головой вниз. Именно такие режимы и были получены в результате численного исследования задачи. При изменении r соответствующим образом

пересчитывается момент инерции I, входящий как параметр в уравнение (1.3) $I=I_C+M_0r^2$, где I_C — центральный момент инерции корпуса.

Зависимость $E=E(k_r)$ в одном из случаев движения представлена на фиг. 13 (E в Дж, k_r в кгм). Здесь $L=0,4$ м, $V=0,5$ м/с, $h=0,5$ м, $\sigma=L/2$ — конструктивные параметры I_C, M_0, M, a и т. д. те же, что и в п. 1—3. Из графика $E(k_r)$ видно, что существует область значений k_r ($0,2$ м$\leqslant r\leqslant 0,4$ м), для которой энергетика ходьбы практически эквивалентна и вместе с тем минимальна. За пределами этого плато при увеличении k_r энергетика несколько возрастает. Неожиданным с первого взгляда является резкое возрастание энергии при уменьшении k_r, в особенности в области отрицательных k_r, отвечающих режимам движения головой вниз. При отрицательных k_r резко возрастает не только энергетика ходьбы, но и (в десятки, сотни раз) целый ряд динамических характеристик процесса: амплитуды угла ψ, угловой скорости $\psi^\bullet$, сил реакции R_x, R_y, управляющих моментов q и u. Отмеченный эффект назовем внутриударным, поскольку он, в частности, сопровождается резким возрастанием сил реакции опоры.

Механизм ударного эффекта связан с особенностью структуры уравнения (1.3), с возможностью вырождения его в том случае, когда коэффициент $I+k_r[h\cos\psi+(\sigma-Vt)\sin\psi]$ при старшей производной $\psi^{\bullet\bullet}$ в этом уравнении обращается в нуль. Из аналитического исследования решений уравнения (1.3) вытекает, что в окрестности вырождения у решений действительно неограниченно растут угловые скорости, угловые ускорения и, как следствие этого, силы реакции опоры и энергетика [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* Динамика двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 3; № 4, с. 3.
2. *Vukobratovic M., Frank A. A., Juricic D.* On the stability of biped locomotion.— IEEE Trans. Bio-Med. Engng, 1970, vol. 17, No. 1, p. 25. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1972, № 1, с. 29.)
3. *Белецкий В. В., Кирсанова Т. С., Чудинов П. С.* Управление ходьбой и динамика двуногих систем. Тр. IV Междунар. конф. по искусственному интеллекту. Т. 9. М.: ВИНИТИ, 1975, с. 9.21.
4. *Белецкий В. В., Чудинов П. С.* Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 25.
5. *Лавровский Э. К.* Ударные явления в задачах управления двуногой ходьбой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 41.

Москва

Поступила в редакцию 30.V.1979