

УДК 531.36

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ МАЯТНИКОМ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

АКУЛЕНКО Л. Д., ЗАРЕМБА А. Т.

Рассматривается задача синтеза оптимального по быстродействию перемещения линейной колебательной системы с медленно изменяющимися параметрами на заданное расстояние с гашением колебаний в конце процесса управления. В качестве модели взят математический маятник переменной длины. Асимптотическая методика решения таких задач, основанная на сочетании метода усреднения [1—3] и принципа максимума [4], была развита в [5].

Результаты исследования задач оптимального управления колебательными системами содержатся в ряде работ (см., например, [6—8]) и могут быть использованы на практике, в частности при управлении грузоподъемными машинами.

1. Рассматривается механическая модель плоского маятника, точка подвеса которого может перемещаться с ограниченной скоростью вдоль горизонтальной направляющей (фиг. 1). В линейном приближении движение колебательной системы описывается уравнениями

$$z'' + gl^{-1}(z-x) = 0, \quad x' = v \quad (1.1)$$

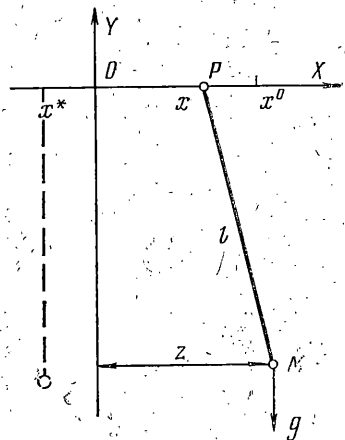
Здесь z , $z' = dz/dt$ — абсолютные координата и скорость массы M , x — абсолютная координата точки подвеса P , v — регулируемая относительно малая скорость ее перемещения, l — медленно изменяющаяся длина маятника, $l = l(t) \geq l_0 > 0$, g — ускорение силы тяжести. Отметим, что уравнения (1.1) от массы M не зависят. В указанных координатах уравнения движения с точностью до малого члена более высокого порядка l'' совпадают по виду с аналогичными уравнениями для случая $l = \text{const}$ [6]. Далее предположения малости конкретизируются.

Рассмотрим управляемую систему (1.1) в предположении, что на функцию $v(t)$ наложены ограничения

$$v_1 \leq v \leq v_2, \quad v_{1,2} = \text{const}, \quad v_2 > v_1 \quad (1.2)$$

Для определенности будем считать, что $v_1 < 0$, т. е. система может перемещаться в отрицательном направлении оси OX . В этом случае для правого ограничения рассматриваются две возможности: $v_2 > 0$ (чаще $v_2 = -v_1$) и $v_2 = 0$. Первая возможность отвечает перемещению точки подвеса P в обоих направлениях оси OX , а вторая — только в отрицательном направлении и остановке. Далее естественно предположить, что ограничения (1.2) допускают перемещения в нужных направлениях.

Для управляемой системы (1.1), (1.2) ставится следующая задача оптимального быстродействия. За минимальное время T выбором кусочно-



Фиг. 1

непрерывной функции $v(t)$ из (1.2) при заданном законе изменения длины маятника $l(t)$ перевести систему (1.1) из произвольного начального состояния на заданное расстояние с гашением колебаний в конце процесса управления. Граничные условия и функционал поставленной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} z(t_0) &= z^0, \quad z'(t_0) = z'^0, \quad x(t_0) = x^0 \\ z(T) &= x(T) = x^*, \quad z'(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_v, \quad v \in [v_1, v_2] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Приведем соотношения двухточечной задачи управления (1.1)–(1.3) к безразмерным переменным и выделим малый параметр. При помощи подстановок $\xi = zd^{-1}$, $\zeta = xd^{-1}$, $\sigma = ll_*^{-1}$, $\theta = v_*t$, $u = vv_*^{-1}$, где d , l_* – характерные интервалы длины, $v_* = g^{1/2}l_*^{-1/2}$ – характерная частота, $v_* = \max |v_{1,2}|$, получим уравнения движения и граничные условия

$$\begin{aligned} \xi'' + \sigma^{-1}(\xi - \zeta) &= 0, \quad \zeta' = \varepsilon u, \quad \sigma' = \varepsilon f(\sigma) \\ \xi^0 &= z^0 d^{-1}, \quad \xi^{10} = z'^0 (v_* d)^{-1}, \quad \zeta^0 = x^0 d^{-1}, \quad \sigma^0 = l^0 l_*^{-1} \\ \xi(\theta_T) &= \zeta(\theta_T) = \zeta^*, \quad \xi'(\theta_T) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерному времени $\theta \in [\theta_0, \theta_T]$; $\theta_0 = v_* t_0$, $\theta_T = v_* T \rightarrow \min_u$; $u \in [u_1, u_2]$ – новое управление, $u_{1,2} = v_{1,2} v_*^{-1}$, $\varepsilon = v_* (v_* d)^{-1}$ – малый числовой параметр. Малость параметра ε означает, что за время перемещения маятника на расстояние порядка d с максимальной скоростью v_* происходит много (практически несколько) колебаний. Предполагается, что относительная длина маятника σ также медленно в указанном смысле изменяется согласно автономному уравнению (1.4), причем заданная функция f строго знакопостоянна и обладает ограниченной производной по σ ; в этом случае $\sigma' \sim \varepsilon^2$.

Отметим, что соотношения (1.4) в ряде случаев описывают основную операцию грузоподъемных машин по перемещению качающегося груза на заданное расстояние с гашением колебаний в конце процесса, совмещенную с изменением длины подвеса. Время достижения регулируемой скоростью x заданной величины v из интервала (1.2) составляет 1 с (оно обычно много меньше периода колебаний, средняя величина которого 10 с). Это обстоятельство позволяет считать, что изменение управления происходит практически мгновенно. Исследуемая модель учитывает основные характеристики движения в вертикальной плоскости XOY таких систем. Поэтому построение синтеза управления для произвольных начальных условий представляет определенный прикладной интерес. Заметим, что в реальных условиях скорость изменения длины подвеса l может быть разрывной, в частности кусочной знакопостоянной с заданными точками разрыва по t или по l . В этом случае с некоторыми осложнениями также применима развиваемая ниже методика приближенного решения задачи синтеза оптимального по быстродействию управления (1.1)–(1.4).

2. Приведем уравнения движения (1.4) к стандартной форме с вращающейся фазой [1, 2, 5]. Для этого введем амплитуду a и фазу ψ относительных колебаний при помощи формул [6]:

$$\xi = \zeta + a \sin \psi, \quad \xi' = a \sigma^{-1/2} \cos \psi, \quad \zeta = \zeta, \quad \sigma = \sigma \quad (2.1)$$

Дифференцируя замену (2.1) в силу возмущенной системы (1.4), получим уравнения

$$\begin{aligned} a' &= -\xi u \sin \psi + 1/2 \varepsilon a \sigma^{-1} f(\sigma) \cos^2 \psi \\ \psi' &= \sigma^{-1/2} - \varepsilon u a^{-1} \cos \psi - 1/4 \varepsilon \sigma^{-1} f(\sigma) \sin 2\psi \\ \zeta' &= \varepsilon u, \quad \sigma' = \varepsilon f(\sigma) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Начальные и граничные условия для новых переменных a, ψ имеют вид

$$a(\theta_0) = a^0 > 0, \quad \psi(\theta_0) = \psi^0, \quad a(\theta_T) = 0 \quad (2.3)$$

Значение $\psi(\theta_T)$ произвольно, т. е. не фиксируется. Постоянные a^0 и ψ^0 вычисляются согласно (2.1): $a^0 = [(\xi^0 - \zeta^0)^2 + (\xi'^0)^2 \sigma^0]^{1/2}$, $\sin \psi^0 = (\xi^0 - \zeta^0) / a^0$, $\cos \psi^0 = \xi'^0 \sqrt{\sigma^0} / a^0$.

Система уравнений (2.2) квазилинейная управляемая с вращающейся фазой, для ее исследования применима приближенная методика, основанная на сочетании принципа максимума [4] и метода усреднения [1–3]. Этот подход был развит в [5] и использован в [6] для решения аналогичной задачи с $l = \text{const} > 0$.

Пусть p, q, r, s — переменные, сопряженные соответственно a, ψ, ζ, σ . Выпишем функцию Гамильтона H системы (2.2) [4–6]:

$$H = \varepsilon p (-u \sin \psi + 1/2 a \sigma^{-1} f \cos^2 \psi) + \\ + q (\sigma^{-1/2} - \varepsilon u a^{-1} \cos \psi - 1/4 \varepsilon \sigma^{-1} f \sin 2\psi) + \varepsilon (ru + sf). \quad (2.4)$$

Из необходимого условия оптимальности управления $u^*(\theta)$: $H|_{u^*} = \max_u H$ при $u \in [u_1, u_2]$ находим искомую переменную u как функцию фазовых и сопряженных переменных

$$u^* = 1/2 (u_1 + u_2) + 1/2 (u_2 - u_1) \text{sign} (-p \sin \psi - qa^{-1} \cos \psi + r) \quad (2.5)$$

Подставим функцию u^* из (2.5) в гамильтониан (2.4) и продифференцируем по сопряженным и фазовым переменным [5, 6]. Получим стандартную систему с вращающейся фазой ψ и медленными переменными $a, \zeta, \sigma, p, q, r, s$. Сразу отметим, что $r = \text{const}$ для всех θ , так как ζ — циклическая координата. Усредним, согласно методике [5], полученную систему по фазе ψ и используем условие трансверсальности для переменной q , сопряженной ψ . Так как $q(\theta_T) = 0$ и средняя по ψ скорость ее изменения $\langle \dot{q} \rangle = 0$, то отсюда следует, что $q = O(\varepsilon)$ для всех $\theta \in [\theta_0, \theta_T]$, $\theta_T = \Theta \varepsilon^{-1}$, $\Theta = \text{const}$. Сохраняя за усредненными переменными прежние обозначения, получим в первом приближении усредненную краевую задачу принципа максимума.

В зависимости от величины k^2 ($k = r p^{-1}$) возможны два случая. Пусть $k^2 \geq 1$, тогда усредненная система дифференциальных уравнений первого приближения в медленном времени $\tau = \varepsilon \theta \in [\tau_0, \Theta]$ имеет вид

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{a}{4} \frac{f(\sigma)}{\sigma}, \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \text{sign } r \\ \frac{dp}{d\tau} = -\frac{p}{4} \frac{f(\sigma)}{\sigma}, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = f(\sigma), \quad r = \text{const} \quad (2.6)$$

Система (2.6) допускает полное интегрирование. В результате для a, p, σ получаем выражения

$$a = a^0 \left(\frac{\sigma}{\sigma^0} \right)^{1/4}, \quad p = p^0 \left(\frac{\sigma^0}{\sigma} \right)^{1/4}, \quad \tau - \tau_0 = \int_{\sigma^0}^{\sigma} \frac{d\alpha}{f(\alpha)} \quad (2.7)$$

Усредненная фаза ψ получается простой квадратурой по σ . Величина k как функция относительной длины l/l^0 изменяется аналогично переменной a (по закону «длина в степени одна четверть» [2, 3]). Переменная σ согласно (2.6) есть монотонная функция τ . Поэтому монотонно зависят от τ функции a, p, k (2.7). Отметим, что в зависимости от знака величины $r \neq 0$ точка подвеса P , т. е. значение переменной ζ , будет изменяться

с экстремальной скоростью u_2 (при $r > 0$) и u_1 (при $r < 0$)

$$\xi = \xi^\circ + {}^{1/2}[u_1 + u_2 + (u_2 - u_1) \text{sign } r](\tau - \tau_0), \quad \text{sign } r = \text{sign}(\xi^* - \xi^\circ) \quad (2.8)$$

Таким образом, случай $k^2 \geq 1$ соответствует перемещению маятника без активного гашения колебаний. Такой режим будет оптимальным, в частности, если начальные колебания отсутствуют, т.е. $a^\circ = 0$. Тогда в первом приближении по ϵ [5] решение задачи оптимального управления имеет вид (2.7), (2.8), а программное управление u^* и время быстрогодействия Θ определяются формулами

$$u^* = {}^{1/2}(u_1 + u_2) + {}^{1/2}(u_2 - u_1) \text{sign } r, \quad \Theta = \tau_0 + (\xi^* - \xi^\circ)/u^* \quad (2.9)$$

Построение синтеза содержится в п.3. Отметим, что в других более общих ситуациях приведенный режим управляемого движения может представлять часть оптимальной траектории и закона управления. Характер изменения амплитуды колебаний согласно (2.7) определяется переменной σ .

Пусть теперь $0 \leq k^2 \leq 1$; тогда оптимальный закон управления в первом приближении по ϵ получается из (2.5) при $q = 0$

$$u^* = {}^{1/2}(u_1 + u_2) + {}^{1/2}(u_2 - u_1) \text{sign } p \text{sign} (k - \sin \psi) \quad (2.10)$$

Усредненная система первого приближения для переменных a и ξ имеет более сложный вид

$$\begin{aligned} da/d\tau &= (u_2 - u_1) \pi^{-1} \sqrt{1 - k^2} \text{sign } p + {}^{1/4} a \sigma^{-1} f(\sigma) \\ d\xi/d\tau &= (u_2 - u_1) \pi^{-1} \arcsin |k| \text{sign } r + {}^{1/2}(u_2 + u_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнения для p и σ совпадают с (2.6); их решения представлены формулами (2.7). Система (2.11) также интегрируется в квадратурах. Из уравнений (2.11) и условий (1.4), (2.3) следует, что $\text{sign } p = -1$, $\text{sign } r = \text{sign}(\xi^* - \xi^\circ)$. Подставляя эти выражения в (2.11) и учитывая уравнение (2.6) для σ , а также указанные выше граничные условия, получим соотношения для неизвестных параметров σ^* и γ

$$\begin{aligned} a^\circ &= \frac{u_2 - u_1}{\pi} \int_{\sigma^\circ}^{\sigma^*} \frac{(1 - \gamma^2 \sqrt{y})^{1/2}}{f(y) \sqrt{y}} dy \\ \xi^* - \xi^\circ &= -\frac{u_2 - u_1}{\pi} \int_{\sigma^\circ}^{\sigma^*} \frac{\arcsin(\gamma \sqrt{y})}{f(y)} dy + \frac{u_1 + u_2}{2} \int_{\sigma^\circ}^{\sigma^*} \frac{dy}{f(y)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь σ^* — неизвестное конечное значение относительной длины маятника, которое в реальных условиях подвергается ограничениям вида $\infty > \sigma_{\max} \geq \sigma^* \geq \sigma_{\min} > 0$. Параметр γ определяется как отношение $\gamma = r/(p \sqrt{\sigma^\circ})$; его знак, очевидно, определяется разностью $\xi^* - \xi^\circ$. Определяя корни системы (2.12) и подставляя найденные значения σ^* , γ в (2.7), (2.10), (2.11), получаем решение задачи оптимального управления.

Отметим, что вследствие ограничений, налагаемых на σ^* , система (2.12) не всегда имеет решение. Например, если скорость изменения величины σ , т.е. функция $f(\sigma)$ велика, то правая часть уравнений (2.12) в случае убывающей длины подвеса становится малой независимо от γ . Таким образом, при достаточно больших $f(\sigma)$, $\sigma \in (0, \sigma^*]$ равенство становится невозможным. И, наоборот, при условии относительно медленного изменения σ система (2.12) разрешима. Аналогичные рассуждения справедливы и

при увеличении длины маятника. В предельном случае, когда $\sigma = \text{const}$ ($f=0$), такое решение построено в [6]. Для произвольной ситуации требуется дополнительное исследование уравнений (2.12). На практике обычно предусматривается возможность управления скоростью подъема и опускания качающегося груза. В ряде случаев операции перемещения, гашения колебаний и подъема или опускания разделяются во времени. Совмещение этих операций представляет дополнительную возможность увеличения быстродействия всей системы в целом. Поэтому исследование поставленной в п. 1 задачи управления с монотонно изменяющейся длиной может представить интерес как часть более общей задачи для модели с управляемой скоростью изменения длины подвеса.

Рассмотрим режимы движения, полученные в результате применения метода усреднения. При этом возможны следующие случаи.

1. Как отмечалось, управление с $k^2 \geq 1$ соответствует перемещению маятника с экстремальной скоростью (u_2 или u_1) без активного гашения колебаний. При этом может происходить монотонное уменьшение или увеличение их амплитуды вследствие изменения длины подвеса согласно (2.7). Для $a^\circ = 0$ имеем $a = 0$, т. е. такое движение в первом приближении по ϵ оптимально.

2. Возможен оптимальный режим движения, когда в процессе управления $0 < k^2 \leq 1$. Он имеет место в случае разрешимости системы (2.12).

3. Аналогично первому случаю допускается возможность режима управления с $k^2 = 0$, который отвечает гашению колебаний; при этом происходит «снос» точки подвеса P со скоростью $1/2(u_1 + u_2)$. Для симметричного ограничения $u_1 = -u_2$ эта скорость равна нулю. Первый и третий режимы, очевидно, являются неполными, так как отвечают специальным начальным условиям.

4. Возможен режим управления, когда $k^2 \geq 1$ на начальном участке движения, а затем из-за уменьшения σ становится меньше единицы: $k^2 = k_0^2 \sqrt{\sigma}$, $k_0 = r / (p^\circ \sqrt{\sigma^\circ})$. На втором участке происходит одновременное перемещение и гашение колебаний.

5. Возможна и обратная ситуация, когда на начальном участке $k^2 \leq 1$, что отвечает одновременному перемещению и гашению колебаний (до нулевого значения амплитуды a), а затем перемещению с экстремальной скоростью (при $k^2 \geq 1$).

Для построения синтеза управления и определения движения системы в области $k^2 \leq 1$ необходимо построить решение системы конечных уравнений (2.12) при произвольных допустимых значениях параметров задачи.

3. В общем случае возможно численное решение уравнений (2.12) для конкретного вида функции $f(\sigma)$. Рассмотрим важный для приложений случай $f(\sigma) = \alpha = \text{const}$, т. е. длина маятника изменяется (возрастает при $\alpha > 0$ или убывает при $\alpha < 0$) с постоянной скоростью. Тогда зависимость σ от τ согласно (2.6) или (2.7) оказывается линейной: $\sigma = \sigma^\circ + \alpha(\tau - \tau_0)$, а формулы (2.7) — (2.9) дают решение задачи управления в явном виде (для $k^2 \geq 1$). Чтобы не загромождать изложение, предположим, что ограничения (1.2) симметричны: $u_1 = -u_2 = -1(v_1 = -v_2)$. Случай несимметричных ограничений рассматривается аналогично.

Исследуем теперь второй режим управления, отвечающий $0 < k^2 < 1$. Систему (2.12) трансцендентных уравнений относительно преобразованных неизвестных параметров $\mu = \gamma \sqrt{\sigma^\circ} = r/p^\circ$, $\delta = \sigma^*/\sigma^\circ$ запишем в виде

$$\beta = \frac{2}{\pi} \int_1^{\delta} (1 - \mu^2 \sqrt{y})^{1/2} \frac{dy}{\sqrt{y}}, \quad \beta = \frac{a^\circ}{\sigma^\circ} \alpha, \quad -\infty < \beta < \infty$$

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int_1^{\delta} \arcsin(\mu \sqrt{y}) dy, \quad \lambda = \frac{\xi^{\circ} - \xi^{*}}{\sigma^{\circ}}, \quad -\infty < \lambda < \infty \quad (3.1)$$

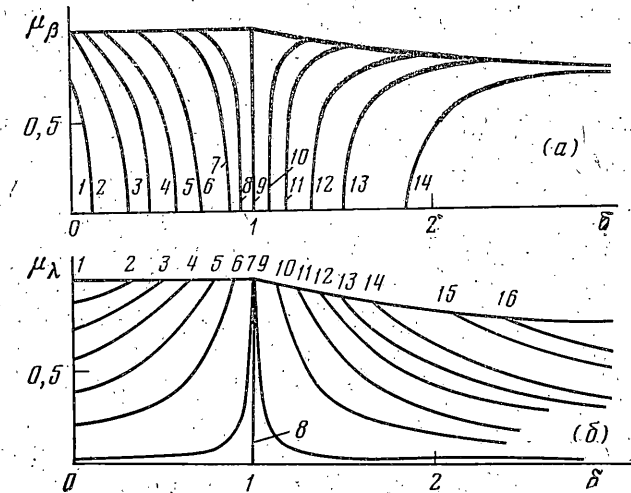
Требуется для заданных (измеренных) значений a° , ξ° , σ° , определяющих величины β , λ , найти неизвестные δ , μ как функции фазовых переменных. Заметим, что квадратуры в (3.1) можно найти в трансцендентных функциях [9]. В отличие от случая $\sigma = \text{const}$ [6] разрешить систему (3.1) аналитически не удается. Построим искомое решение численно. Для этого найдем из первого и второго уравнений (3.1) соответствующие однопараметрические семейства кривых $\mu_{\beta} = \pm \varphi_1(\delta, \beta)$ и $\mu_{\lambda} = \varphi_2(\delta, \lambda)$. Здесь δ — аргумент ($0 \leq \delta < \infty$), а β, λ — задаваемые параметры семейств, которые могут изменяться в неограниченных пределах. Семейства кривых μ_{β} и μ_{λ} представлены на фиг. 2, а, б соответственно. На фиг. 2, а цифрами от 1 до 14 отмечены кривые семейства μ_{β} , отвечающие значениям параметра $\beta = -\frac{8}{3\pi}; -0,7; -0,5; -0,4; -0,3; -0,2; -0,1; -0,05; 0; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5$. Аналогично на фиг. 2, б цифрами от 1 до 16 отмечены кривые семейства μ_{λ} , отвечающие значениям параметра $\lambda = -\frac{5}{8}; -0,5; -0,4; -0,3; -0,2; -0,1; -0,01; 0; 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,8; 1,0$. Отметим, что на фиг. 2, а представлена половина семейства кривых, отвечающая знаку плюс (положительным μ_{β}). Семейство кривых для $\mu_{\beta} < 0$ получается отражением относительно оси δ . Аналогично на фиг. 2, б представлена половина семейства с $\mu_{\lambda} > 0$, отвечающая движению в отрицательном направлении ($\text{sign } r = -1$). Для отрицательных μ_{λ} , соответствующих движению точки подвеса в положительном направлении, семейство кривых получается симметричным отражением относительно оси δ с изменением знака λ на противоположный: $\mu_{\lambda} = -\varphi_2(\delta, -\lambda)$.

Укажем основные свойства семейств кривых на фиг. 2, а, б. Для семейства фиг. 2, а значениям $\beta > 0$ соответствуют значения $\delta > 1$, т. е. $\alpha > 0$ (увеличение длины); при этом значения μ_{β} ограничены: $|\mu_{\beta}| \leq \delta^{-1/4}$. Отметим, что если допускаются достаточно большие значения δ , то корень первого уравнения (3.1) всегда существует для любого $\beta \geq 0$. Значениям $\beta < 0$ отвечает $0 < \delta < 1$; при этом ограничения на функцию μ_{β} имеют вид $|\mu_{\beta}| \leq 1$. Учитывая естественное ограничение $\delta > 0$, из оценки интеграла находим, что первое уравнение (3.1) может быть удовлетворено, если величина $|\beta|$ достаточно мала: $\beta \geq -\frac{8}{3\pi}$ ($\beta \leq 0$). Таким образом, в рамках постановки задачи с постоянно убывающей длиной можно успеть погасить колебания конечной амплитуды $a^{\circ} \leq (\frac{8}{3\pi}) \sigma^{\circ} |\alpha|^{-1}$, которая может быть сделана сколь угодно большой увеличением отношения $\sigma^{\circ}/|\alpha|$. В размерных переменных отношение имеет простой физический смысл; это есть время изменения длины подвеса от начальной l° до нуля.

Рассмотрим семейство кривых фиг. 2, б. Аналогично изложенному функция μ_{λ} для $\delta \geq 1$ ограничена сверху: $0 < \mu_{\lambda} \leq \delta^{-1/4}$, причем корни второго уравнения (3.1) существуют для любого $\lambda > 0$, если допустимые значения δ достаточно велики. В случае уменьшения длины, что соответствует значениям $\lambda < 0$, имеем $0 < \delta \leq 1$ и ограничения на μ_{λ} : $0 \leq \mu_{\lambda} \leq 1$. В этой области, как и раньше, вследствие естественного ограничения второе уравнение (3.1) может быть удовлетворено, если величина $|\lambda|$ достаточно мала: $\lambda > -\frac{5}{8}$ ($\lambda < 0$). Это означает, что для системы с постоянной убывающей длиной подвеса маятник можно переместить на расстояние, не превышающее величину $\xi^{\circ} - \xi^{*} = \frac{5}{8} \sigma^{\circ} |\alpha|^{-1}$. Это расстояние может быть сколь угодно большим, если время $\sigma^{\circ} |\alpha|^{-1}$ достаточно велико.

Переходим к задаче определения искомых параметров μ и δ на основе построенных семейств кривых фиг. 2, а, б. Для этого выберем кривую семейства фиг. 2, а, соответствующую заданному значению β , и кривую

семейства фиг. 2, б для заданного λ . Единственная точка пересечения этих кривых (μ^* , δ^*), если она существует, определяет оптимальный режим в случае $0 \leq k^2 \leq 1$. Подставляя найденное значение $k_0 = \mu^*$ в выражение для k : $k = k_0 \sigma^{1/4}$, а затем в формулу (2.10), получим оптимальное управление u^* в виде программы (после элементарного интегрирования усред-



Фиг. 2

ненного уравнения для ψ из (2.2)). Управление в форме синтеза получается из программного при замене a° , ξ° , σ° на a , ξ , σ в выражениях для параметров β , λ (3.1) и равно

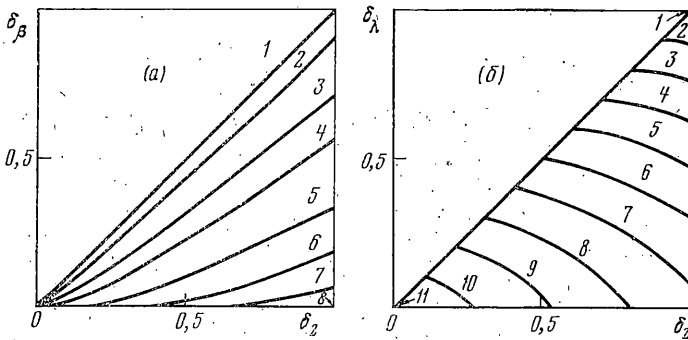
$$u^* = -\text{sign} [k_0 \sigma^{1/4} - (\xi - \zeta) a^{-1}] \\ k_0 = \mu^*(\beta, \lambda), \quad \beta = a \sigma^{-1} \alpha, \quad \lambda = (\xi - \zeta^*) \sigma^{-1} \alpha.$$

Подставив найденное значение $\sigma^* = \delta^* \sigma^\circ$ в (2.7), находим время оптимального быстрогодействия $\Theta = \tau_0 + (\delta^* - 1) \sigma^\circ / \alpha$. Оптимальная фазовая траектория в первом приближении метода усреднения получается элементарным интегрированием уравнений (2.11) при $u_2 = -u_1 = 1$, $f(\sigma) = \alpha$, $\sigma = \sigma^\circ + \alpha(\tau - \tau_0)$, $k = \mu^* \sigma^{1/4}$, $\text{sign } p = \text{sign } r = -1$. Таким образом, режимы 1–3 полностью исследованы.

Возможны случаи управляемого движения, когда выбранные кривые семейства фиг. 2а, б не имеют точек пересечения, что соответствует режимам 4, 5. Пусть это имеет место при увеличении длины маятника ($\alpha > 0$, $\delta > 1$). Тогда оптимальным является пятый режим управления, состоящий из двух участков: первый представляет режим 2 ($0 < k^2 \leq 1$), а второй — режим 1 ($k^2 > 1$). Искомые значения δ_1^* и μ_1^* для первого участка находятся из условия пересечения кривой семейства фиг. 2, а, с ограничивающей кривой $\mu_\beta = \delta^{-1/4}$. Это означает, что происходит одновременное гашение колебаний до нулевых значений амплитуды и некоторое перемещение в нужном направлении, а затем с момента времени, отвечающего $a = 0$ ($\sigma_1^* = \delta_1^* \sigma^\circ$), перемещение без колебаний с максимальной скоростью. Определение оптимального управления в форме программы и синтеза, времени быстрогодействия и фазовой траектории проводятся на основе первого и второго режимов, что не представляет затруднений.

Пусть соответствующие заданным условиям кривые семейств фиг. 2, а, б не имеют точки пересечения при убывающей длине маятника. В этом

случае, если задача имеет решение, оптимальным будет четвертый режим. Он состоит из двух участков: на первом $k^2 \geq 1$, т. е. осуществляется режим 1, а на втором $k^2 < 1$, что отвечает рассмотренному выше режиму 2. На первом участке оказывается выгодным использовать уменьшение амплитуды колебаний за счет уменьшения длины подвеса и перемещаться с максимальной скоростью $u_1 = -1$. Затем, начиная с некоторого момента, отвечающего значению длины $\sigma_2^* = \delta_2^* \sigma^\circ$, нужно осуществлять перемещение в заданную точку с полным гашением колебаний к концу процесса. При этом конечное значение $\sigma^* = \delta^* \sigma^\circ$ должно быть больше нуля. Опреде-



Фиг. 3.

лим величины δ^* и δ_2^* из уравнений, аналогичных (3.1), которые получаются соответствующим интегрированием системы (2.11) при $k^2 \geq 1$ для $\sigma \leq \sigma_2^*$ и при $k^2 < 1$ для $\sigma^* \leq \sigma \leq \sigma_2^*$.

Эти уравнения имеют вид

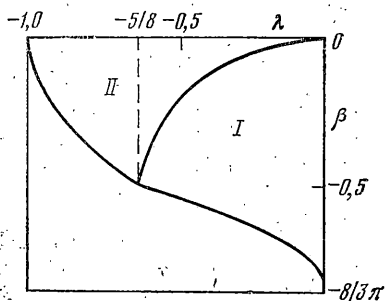
$$\frac{a^\circ}{\sigma^\circ} \alpha \delta_2^{3/4} = \frac{2}{\pi} \int_{\delta_2}^{\delta} (1 - \mu_*^2 \sqrt{y})^{1/2} \frac{dy}{\sqrt[4]{y}}, \quad \mu_* = \delta_2^{-1/4} > 1$$

$$\frac{\xi^\circ - \xi^*}{\sigma^\circ} \alpha + 1 - \delta_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\delta_2}^{\delta} \arcsin(\mu_* \sqrt[4]{y}) dy \quad (3.2)$$

Аналогичным приемом, как и для системы (3.1), разрешим уравнения (3.2) относительно δ_2 , δ для заданных значений параметров $\beta = a^\circ \alpha / \sigma^\circ$ и $\lambda = (\xi^\circ - \xi^*) \alpha / \sigma^\circ$. Построим численно два семейства кривых, отвечающих первому и второму уравнениям (3.2) (см. фиг. 3, а, б). Здесь δ_β и δ_λ — функции аргумента δ_2 ($\delta_2 \in [0, 1]$), а β и λ — параметры семейств. Кривым δ_β с номерами от 1 до 8 отвечают значения параметра β , равные соответственно 0; -0,01; -0,05; -0,1; -0,2; -0,3; -0,4; -0,5; а кривым δ_λ с номерами от 1 до 11 — значения параметра λ , равные 0; -0,1; -0,2 и т. д. до -1,0. Искомые значения δ^* и δ_2^* определяются точкой пересечения соответствующих кривых семейств фиг. 3, а и 3, б. Как следует из уравнений (3.2) и графиков фиг. 3, а, б, четвертый режим управления может существовать при $\beta \geq -1/2$ и $\lambda \geq -1$. Однако очевидно, что не для всякой пары кривых, удовлетворяющих этим условиям, существует точка пересечения (δ^* , δ_2^*).

Определим при уменьшающейся длине подвеса ($\alpha < 0$) область значений параметров β , λ , для которых осуществляется режимы второй или

четвертый. Численно найдем условия пересечений соответствующих кривых семейств, представленных на фиг. 2, а, б и 3, а, б при $\delta < 1$. Результаты расчетов приведены на фиг. 4. Здесь область I определяет значения параметров β , λ , для которых реализуется второй режим управления с $k^2 \in (0, 1)$; т. е. имеет место пересечение кривых семейств фиг. 2, а и 2, б. Аналогично область II содержит значения параметров β , λ , для которых реализуется четвертый режим управления. Объединение областей I и II определяет в каждый момент область текущих значений параметров β , λ , для которых возможно решение задачи оптимального управления в рамках модели с постоянно изменяющейся длиной маятника. Решение вне этой области можно определить как управляемое движение маятника с некоторой постоянной длиной подвеса [6].



Фиг. 4

Более интересным представляется решение существенно нелинейной задачи оптимального по быстродействию перемещения маятника на основе модели с управляемой длиной подвеса при естественных фазовых ограничениях $0 < \sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max} < \infty$. Управление длиной подвеса может привести к дополнительному выигрышу по быстродействию, а также позволит рассмотреть задачи с дополнительными ограничениями на движение системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
3. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. Акуленко Л. Д. Асимптотическое решение некоторых задач типа оптимального быстродействия. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 4, с. 590.
6. Акуленко Л. Д. Управление движением нелинейной колебательной системы смещением положения равновесия. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4, с. 3.
7. Черноушко Ф. Л. Оптимальное перемещение маятника. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 5 с. 806.
8. Мамалыга В. М., Черноушко Ф. Л. Управление перемещением грузов в вертикальной плоскости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4, с. 93.
9. Дэйгт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978. 228 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.XI.1979