МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1981

УДК 533.6.013.42

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ

РАДОВИНСКИЙ А. Л.

Рассматриваются линейные, гармонические, неосесимметричные колебания замкнутых в вершине тонких оболочек вращения, заполненных жидкостью.
Используются приближенные методы, аналогичные применяемым [1, 2] в статике и динамике оболочек.

1. Положение точек оболочки и некоторого прилегающего к ней слоя жидкости (пристеночного слоя) будем определять радиус-вектором

$$\mathbf{M}(\alpha, \theta, \gamma)=\mathbf{P}(\alpha, \theta)+\gamma\mathbf{n} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{P}(\alpha, \theta)$ — радиус-вектор точек срединной поверхности S оболочки, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к S, α, θ — параметры географической системы координат, заданной на поверхности S, γ — координата, возрастающая вдоль $\mathbf{n}$, на поверхности S значение $\gamma=0$.

Примем характерный радиус R^0 поверхности S за единицу длины и будем считать, что в пристеночном слое $\gamma/R^0 \ll 1$.

Компоненты U_i $(i=1, 2, 3)$ вектора смещений срединной поверхности оболочки и потенциал перемещений жидкости Ψ ищем в виде

$$\begin{gathered}
U_{1,3}(\alpha, \theta, t)=u_{1,3}(\alpha)\cos m\theta \exp(i\omega t)\\
U_2(\alpha, \theta, t)=u_2(\alpha)\sin m\theta \exp(i\omega t)\\
\Psi(\alpha, \theta, \gamma, t)=\Phi(\alpha, \gamma)\cos m\theta \exp(i\omega t)
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где m — заданное число волн по параллели. Будем исходить из следующих уравнений.

Уравнения движения оболочки, соприкасающейся с жидкостью [3], после разделения переменных могут быть приведены к виду

$$\begin{gathered}
(h^2N_{ij}+L_{ij})u_j+\lambda(1-\nu^2)u_i\delta_{3i}\frac{1-\nu^2}{2h}\frac{\rho}{\rho_0}\lambda\Phi_*=0\\
\lambda=\rho_0\omega^2R^{02}/E \qquad (i, j=1, 2, 3)
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где λ — частотный параметр, h, E, ν — полутолщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, ρ и ρ_0 — плотности жидкости и материала оболочки, δ_{3i} — символ Кронекера, звездочка при некоторых величинах здесь и ниже означает, что берется значение соответствующей функции на поверхности S, L_{ij} и N_{ij} — безмоментные и моментные операторы теории оболочек, часть из которых выписана ниже, а оставшиеся приведены в [4]:

$$L_{11}=\frac{1}{A^2}\frac{d^2}{d\alpha^2}+\frac{1}{A^2}\left(\frac{B'}{B}-\frac{A'}{A}\right)\frac{d}{d\alpha}+$$
$$+\left[\frac{B''}{B}-\frac{A'B'}{AB}-\left(\frac{B'}{B}\right)^2\right]-\frac{1-\nu}{R_1R_2}-\frac{1-\nu}{2}\frac{m^2}{B^2}$$

$$L_{12}=\frac{1+\nu}{2}\frac{m}{B}\frac{1}{A}\frac{d}{d\alpha}-\frac{3-\nu}{2}\frac{B'}{AB}\frac{m}{B}$$

$$L_{13}=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)\frac{1}{A}\frac{d}{d\alpha}-\left(\frac{R_1'}{R_1^2}+\frac{R_2'}{R_2^2}\right)\frac{1}{A}$$

$$L_{21}=-\frac{1+\nu}{2}\frac{m}{B}\frac{1}{A}\frac{d}{d\alpha}-\frac{3-\nu}{2}\frac{B'}{AB}\frac{m}{B}$$

$$L_{23}=L_{32}=-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\nu}{R_1}\right)\frac{m}{B}$$

$$L_{22}=\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{A^2}\frac{d^2}{d\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{A^2}\left(\frac{B'}{B}-\frac{A'}{A}\right)\frac{d}{d\alpha}+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{B''}{B}-\frac{A'B'}{AB}-\left(\frac{B'}{B}\right)^2\right]+\frac{1-\nu}{R_1R_2}-\frac{m^2}{B^2}$$

$$L_{31}=-\frac{1}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)\frac{d}{d\alpha}-\frac{1}{A}\left[\frac{B'}{B}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)+\frac{1-\nu}{R_2^2}R_2'\right],$$

$$L_{33}=-\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{2\nu}{R_1R_2}\right)$$

$$N_{33}=-\frac{1}{3AB}\left(\frac{d}{d\alpha}\frac{B}{A}\frac{d}{d\alpha}-\frac{A}{B}m^2\right)\frac{1}{AB}\left(\frac{d}{d\alpha}\frac{B}{A}\frac{d}{d\alpha}-\frac{A}{B}m^2\right)$$

где A, B и R_1, R_2 — соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны поверхности S, штрихом здесь и ниже обозначены производные по α.

Уравнение движения сжимаемой жидкости

$$\Delta\Psi-\frac{1}{C^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2}=0 \tag{1.4}$$

где Δ — оператор Лапласа, C — скорость звука в жидкости.

Система координат $(\alpha,\ \theta,\ \gamma)$ триортогональна [1]. Поэтому оператор Лапласа в пристеночном слое можно записать в виде

$$\Delta=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\right] \tag{1.5}$$

$$H_1=A(1-\gamma/R_1),\qquad H_2=B(1-\gamma/R_2),\qquad H_3=1$$

Подставив (1.2) и (1.5) в (1.4) и отделив переменные θ и t, получим уравнение относительно Φ:

$$\left\{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{B}{A}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{B}{A}\right)'-\gamma\frac{B}{A}\frac{\gamma_2R_1'/R_1^2-\gamma_1R_2'/R_2^2}{\gamma_1^2}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{A}{B}m^2+\right.$$

$$\left.+AB\gamma_1\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}-AB\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{2\gamma}{R_1R_2}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma}+AB\gamma_1\gamma_2\lambda\left(\frac{C_0}{C}\right)^2\right\}\Phi=0$$

$$C_0=\sqrt{E/\rho_0},\quad \gamma_1=1-\gamma/R_1,\quad \gamma_2=1-\gamma/R_2 \tag{1.6}$$

На поверхности S должно выполняться условие непротекания

$$\partial\Phi/\partial\gamma|_*=-u_3 \tag{1.7}$$

при постановке которого различием между срединной и внутренней лицевой поверхностями пренебрегаем.

2. Интегралы уравнений (1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде

$$u_1=k^{-1}\xi e^{kf}, \quad u_2=k^{-2}\eta e^{kf}, \quad u_3=\zeta e^{kf}, \quad \Phi=k^{-1}\varphi e^{kF} \tag{2.1}$$

$$p=p_0+k^{-1}p_1+\ldots, \quad p_0\neq 0 \quad (p=\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi), \quad k=h^{-1/2}[3(1-\nu^2)]^{1/4} \tag{2.2}$$

По аналогии с [1] назовем $f(\alpha)$ и $F(\alpha, \gamma)$ функциями изменяемости, а $\xi(\alpha)$, $\eta(\alpha)$, $\zeta(\alpha)$ и $\varphi(\alpha, \gamma)$ — функциями интенсивностей; $\xi_i(\alpha)$, $\eta_i(\alpha)$, $\zeta_i(\alpha)$, $\varphi_i(\alpha, \gamma)$ $(i=0,\ 1,\ 2, \ldots)$ — коэффициенты разложений функций интенсивностей.

Рассматриваются квазипоперечные колебания, т. е. такие колебания, для которых $u_3 \gg (u_1, u_2)$ (под u_i понимаются их максимальные значения). Считаем, что число волн вдоль параллели невелико и выполняется условие $m^2 \ll k^2$. Таким колебаниям [2] свойственно соотношение $u_2 < u_1$, чем и определяется выбор выражений (2.1).

При асимптотическом интегрировании уравнений надо учитывать порядки входящих в них коэффициентов. Так как задаваемые при расчетах значения коэффициентов уравнений (1.3) и (1.6) могут в различных случаях существенно отличаться, введем параметры r, a и b согласно равенствам

$$\lambda=h^{2r}, \quad \rho/\rho_0=h^a, \quad C/C_0=h^b \tag{2.3}$$

и будем пока считать, что $r=0$, $a=1/2$, $b=1/4$.

В п. 6 показано, что при таких значениях a, b и r получаемые результаты носят достаточно общий характер и могут быть распространены на другие сочетания чисел a, b и r, которые приводятся там же. Заметим, что значения коэффициентов (2.3), соответствующие данным r, a и b, отвечают случаю колебаний заполненной водой оболочки с $h=0{,}01$ при частотах, для которых $\lambda=O(1)$.

3. Отделим переменную γ, используя уравнение (1.6) и условие непротекания (1.7).

Функции $F(\alpha, \gamma)$ и $\varphi_i(\alpha, \gamma)$ в пристеночном слое представим в виде разложений в ряд Тейлора

$$(F, \varphi_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n(F_n, \varphi_{in}) \tag{3.1}$$

где $F_n(\alpha)$, $\varphi_{in}(\alpha)$ — функции, подлежащие определению.

Будем выполнять условие непротекания подстановкой выражений (2.1) и (3.1) в (1.7) и приравниванием показателей экспонент и коэффициентов при равных нисходящих степенях параметра k. Получим уравнения

$$F_0=f, \quad \zeta_0=-F_1\varphi_{00}\{k^0\}, \quad \zeta_1=-F_1\varphi_{10}-\varphi_{01}\{k^{-1}\} \tag{3.2}$$

Здесь и ниже в фигурных скобках указываются величины, коэффициенты при которых приравниваются для получения данного уравнения.

Подставив (2.1) и (3.1) в (1.6), представив коэффициенты уравнения (1.6) в виде рядов по γ/R_1 и γ/R_2 и приравнивая нулю множители при $k^i\gamma^i$, получим цепочку уравнений

$$\left(\frac{f'}{A}\right)^2+F_1^2=0 \quad \{k^2\gamma^0\} \tag{3.3}$$

$$-\frac{2}{R_1}\left(\frac{f'}{A}\right)^2+2\frac{F_1'f'}{A^2}+4F_1F_2=0 \quad \{k^2\gamma\}$$

$$2\frac{f'}{A^2}\varphi_{00}'+\frac{f'}{A^2}\left(\frac{f''}{f'}+\frac{B'}{B}-\frac{A'}{A}\right)\varphi_{00}+2F_1\varphi_{01}+$$

$$+2F_2\varphi_{00}-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)F_1\varphi_{00}+\mu\varphi_{00}=0 \quad \{k\gamma^0\}, \quad \mu=\frac{\lambda}{k}\left(\frac{C_0}{C}\right)^2$$

Здесь учтено, что $m^2 \ll k^2$ и согласно (2.3) и (2.4) $\mu=O(h^0)$.

Уравнения (3.2) (для ζ_0 и ζ_1) и (3.3) дают возможность представить входящее в (1.3) значение потенциала Φ на поверхности S в виде

$$\Phi_*=-\frac{k^{-1}}{F_1}\left\{\zeta_0+k^{-1}\left[\zeta_1-\frac{\zeta_0'}{f'}-\left(\frac{A'}{A}+\frac{1}{2}\frac{B'}{B}-\frac{f''}{f'}\right)\frac{\zeta_0}{f'}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{1}{R_2}-\frac{\mu}{F_1}\right)\frac{\zeta_0}{2F_1}\right]+O(k^{-2})\right\}e^{kf} \tag{3.4}$$

где функция F_1 может быть выражена через f' согласно (3.3).

4. Теперь методика интегрирования уравнений (1.3) мало отличается от известных [1, 2].

Подставив (2.1) и (3.4) в (1.3) и приравнивая нулю коэффициенты при нисходящих степенях параметра k, получим уравнения относительно неизвестных функций f, ξ_i, η_i, ζ_i.

Однородная алгебраическая система относительно ξ_0, η_0, ζ_0, получаемая приравниванием коэффициентов при старших степенях параметра k, имеет нетривиальные решения

$$\xi_0=-\frac{A}{f'}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)\zeta_0, \quad \eta_0=-\frac{m}{B}\left(\frac{A}{f'}\right)^2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2+\nu}{R_2}\right)\zeta_0 \tag{4.1}$$

при условии выполнения равенств

$$\Omega(x)=x^5+(R_2^{-2}-\lambda)x+\delta\lambda=0, \quad \delta=\rho/(2hk\rho_0) \tag{4.2}$$

$$(f')^2=-A^2X^2, \quad F_1=X \tag{4.3}$$

где X — отрицательный корень уравнения (4.2) (выбор корня объясняется ниже).

Условие совместности уравнений, получаемых приравниванием нулю коэффициентов при следующих степенях k, выражается в форме линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\zeta_0'}{\zeta_0}+\frac{1}{2}\frac{B'}{B}-\frac{1}{2}\frac{X'}{X}-\frac{1}{2}\frac{\Omega_1'}{\Omega_1}-\frac{\delta\lambda f'}{2\Omega_1X^2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{\mu}{X}\right)=0 \tag{4.4}$$

$$\Omega_1=\partial\Omega/\partial x\,|_{x=X}$$

Интегрируя (4.4), получим с учетом (4.1) первые члены разложений функций интенсивностей.

Выбор корня уравнения (4.2) предопределяет получение тех или иных интегралов уравнений (1.3), (1.6), (1.7).

Здесь рассматриваются только интегралы (2.1), для которых

$$\operatorname{Re}(f)=0, \quad \operatorname{Im}(f)\neq 0, \quad \operatorname{Re}(X)<0 \tag{4.5}$$

Такие интегралы осциллируют на поверхности S вдоль меридиана, что обеспечивается выполнением первых двух условий в (4.5), и экспоненциально затухают в жидкости вдоль нормали к оболочке. Последнее вытекает из третьего условия в (4.5), второго равенства (4.3) и выражения

$$\Phi(\alpha, \gamma)=\Phi_*\exp\{k[F_1\gamma+O(\gamma^2)]\} \tag{4.6}$$

получаемого при подстановке (3.1) в (2.1).

Колебания, отвечающие этим интегралам, локализуются в пристеночном слое жидкости. Поэтому остальную часть занимаемой жидкостью области в исходном приближении можно не рассматривать.

Анализ уравнения (4.2) ($\Omega(-\infty)=-\infty$, $\Omega(0)=\delta\lambda>0$) показывает, что всегда есть один отрицательный действительный корень $X<0$. Пользуясь правилом Декарта, можно доказать, что других отрицательных корней уравнение (4.2) не имеет.

Выбор знака в корнях первого уравнения (4.3) определяет два различных решения системы (4.1)—(4.4), удовлетворяющих условиям (4.5). Подставляя эти решения в (2.1), получим с учетом (3.4) и (4.6) следующие интегралы системы уравнений (1.3), (1.6), (1.7):

$$u_1=k^{-1}\frac{\chi}{X}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)\sin(kM+L+\beta)$$

$$u_2=k^{-2}\frac{m}{B}\frac{\chi}{X^2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1+\nu}{R_2}\right)\cos(kM+L+\beta)$$

$$u_3=\chi\cos(kM+L+\beta),\qquad \Phi=\Phi_*e^{kX\gamma} \tag{4.7}$$

$$\Phi_*=-k^{-1}\frac{\chi}{X}\cos(kM+L+\beta)$$

$$M=-\int XA\,d\alpha,\quad L=-\frac{\delta\lambda}{2}\int\left(\frac{1}{R_2}-\frac{\mu}{X}\right)\frac{A\,d\alpha}{\Omega_1 X},\quad \chi=\left[-\frac{X}{B\Omega_1}\right]^{1/2}$$

где β — произвольная постоянная.

5. Метод, приводящий к получению интегралов (4.7), теряет силу при приближении к вершинам оболочки, где $B=0$ и функции интенсивностей неограниченно возрастают.

Ограничимся рассмотрением оболочек с вершинами (типа купола), в окрестности которых поверхность S можно с некоторой точностью заменить сферой ($R_1=R_2=R$).

Введем в окрестности какой-либо из вершин такую [2] систему координат (1,1), когда $A=1$, $B=\alpha+\alpha^3/6R^2+O(\alpha^5)$.

В окрестности вершины прогиб оболочки и потенциал перемещений жидкости будем искать в виде

$$U_3(\alpha,\ \theta,\ t)=W(\alpha)\cos m\theta e^{i\omega t},\qquad \Psi(\alpha,\ \theta,\ \gamma,\ t)=\psi(\alpha,\ \gamma)\cos m\theta e^{i\omega t},$$

$$\psi(\alpha,\ \gamma)=Z(\alpha)Y(\gamma) \tag{5.1}$$

Подставив (5.1) в (1.4), (1.5) и разделив переменные, получим уравнения

$$\frac{d^2Y}{d\gamma^2}-\frac{2}{R-\gamma}\frac{dY}{d\gamma}+\left[\lambda\left(\frac{C_0}{C}\right)^2-\frac{k^2\varkappa^2R^2}{(R-\gamma)^2}\right]Y=0 \tag{5.2}$$

$$\Delta_m Z+k^2\varkappa^2 Z=0,\qquad \Delta_m=\frac{d^2}{d\alpha^2}+\frac{B'}{B}\frac{d}{d\alpha}-\frac{m^2}{B^2} \tag{5.3}$$

где $k^2\varkappa^2$ — параметр разделения.

Уравнения (1.3) в рассматриваемом случае можно привести к виду

$$\frac{h^2}{3(1-\nu^2)}\Delta_m\Delta_m\Delta_m W+(R^{-2}-\lambda)\Delta_m W-\frac{1}{2h}\frac{\rho}{\rho_0}\lambda\Delta_m\psi_*=0 \tag{5.4}$$

При этом используется метод, аналогичный применяемому [4] для вывода уравнений вынужденных колебаний пологих сферических оболочек в вакууме. Как и в [4], не учитывается влияние тангенциальных сил инерции оболочки и вклад тангенциальных смещений в изменение кривизн.

Условие непротекания в обозначениях (5.1) имеет вид

$$\partial\psi/\partial\gamma|_*=-W \tag{5.5}$$

Предполагая, что $|\varkappa|=O(1)$, $\varkappa<0$, и учитывая (2.4), ограниченное в области, занятой жидкостью ($0\leqslant\gamma\leqslant R$), решение уравнения (5.2) запишем в виде

$$Y=(1-\gamma/R)^{-k\varkappa R} \tag{5.6}$$

В малой окрестности вершины ($(\alpha/R)^2\ll1$) будем считать, что $B=\alpha$, и заменим оператор Δ_m согласно равенству

$$\Delta_m=\Delta_m{}'=\frac{d^2}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}-\frac{m^2}{\alpha^2} \tag{5.7}$$

Тогда (5.3) совпадает по форме с уравнением Бесселя m-го порядка и будет иметь решение $Z=J_m(-k\varkappa\alpha)$. Функцию W определим подставив ψ с учетом (5.1), (5.6) в условие непротекания (5.5). Таким образом получим

$$W=-k\varkappa J_m(-k\varkappa\alpha),\qquad \psi=(1-\gamma/R)^{-k\varkappa R}J_m(-k\varkappa\alpha) \tag{5.8}$$

Сделав в (5.4) подстановки (5.7), (5.8) и исключив множитель $k^3\varkappa J_m(-k\varkappa\alpha)\neq0$, получим уравнение относительно $\varkappa$

$$\varkappa^5+(R^{-2}-\lambda)\varkappa+\delta\lambda=0 \tag{5.9}$$

совпадающее по форме с (4.2) и также всегда имеющее один и только один отрицательный корень.

6. Стыковку полученных интегралов (4.7) и (5.8) будем производить по функциям прогиба оболочки и потенциала перемещений жидкости на поверхности S. Последнее допустимо ввиду быстрого затухания потенциала перемещений вдоль нормали к S.

Используя свойства бесселевых функций, при $-k\varkappa\alpha\gg1$ запишем выражение (5.8) в виде

$$W=-k\varkappa\psi_*\approx\left[-\frac{2k\varkappa}{\pi\alpha}\right]^{1/2}\cos\left(-k\varkappa\alpha-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{6.1}$$

В рамках допущений, принятых в п. 5, можно в окрестности вершины считать, что имеют место равенства $R_1=R_2=R$, $A=1$, $B=\alpha$. Тогда из сравнения (4.2) и (5.9) видно, что $X=\varkappa$, а другие выражения равны

$$M=-\varkappa\alpha,\quad L=\frac{\delta\lambda\alpha}{2\varkappa\Omega_{1\varkappa}}\left(\frac{1}{R}-\frac{\lambda\mu}{\varkappa}\right),\quad \chi=\left[-\frac{\varkappa}{\alpha\Omega_{1\varkappa}}\right]^{1/2},\quad \Omega_{1\varkappa}=\Omega_1|_{X=\varkappa}^{R_2=R}$$

Таким образом, интегралы (4.7) при $\alpha\to0$ можно записать в виде

$$u_3=-k\varkappa\Phi_*=\left[-\frac{\varkappa}{\Omega_{1\varkappa}\alpha}\right]^{1/2}\cos\{-[k\varkappa+O(1)]\alpha+\beta\} \tag{6.2}$$

Из сравнения (6.1) и (6.2) следует, что при $\alpha\to0$:

$$(u_3\Phi_*)\to[\pi/2k\Omega_{1\varkappa}]^{1/2}(W,\ \psi_*)\quad\text{при}\quad \beta=-m\pi/2-\pi/4$$

т. е. интегралы (4.7) можно регулярно продолжить в вершину с координатой $\alpha=\alpha_t$ при

$$M(\alpha_t,\alpha)=-\int_{\alpha_t}^{\alpha}XA\,d\alpha,\quad L(\alpha_t,\alpha)=-\frac{\delta\lambda}{2}\int_{\alpha_t}^{\alpha}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{\mu}{X}\right)\frac{A\,d\alpha}{\Omega_1X}$$
$$\beta=-m\pi/2-\pi/4 \tag{6.3}$$

Для определения частот и форм собственных колебаний оболочки с координатами вершин α_1 и α_2 выберем некоторую точку α_0 меридиана ($\alpha_1<\alpha_0<\alpha_2$) и построим интегралы (4.7)—(6.3) отдельно при $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ и при $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$. Из условия стыковки этих интегралов при $\alpha=\alpha_0$ получим частотное уравнение

$$\sin[kM(\alpha_1,\ \alpha_2)+L(\alpha_1,\ \alpha_2)+2\beta]=0 \tag{6.4}$$

Частотный параметр λ входит в (6.4) неявно через подынтегральные функции (6.3), зависящие, вообще говоря, от α и λ. В общем случае частотное уравнение (6.4) надо решать численными методами.

Соответствующие найденным частотам формы колебаний определяются выражениями (4.7)—(6.3) всюду на оболочке, за исключением вершин, где следует пользоваться формулами (5.8).

До сих пор считалось, что параметры a, b и r, введенные в равенствах (2.3), удовлетворяют условиям $r=0$, $a={}^1/_2$, $b={}^1/_4$.

При других значениях чисел a, b и r корень уравнения (4.2) можно записать в виде

$$X=h^{1/2-p}q,\quad q=O(h^0) \tag{6.5}$$

Здесь p — показатель изменяемости [1, 2] получаемых при этом в п. 4 интегралов, в чем можно убедиться подставив (2.2) и (6.5) в (4.7) и учитывая, что $k=O(h^{1/2})$, а следовательно, $kM=O(h^{-p})$.

Применение расчетных формул (4.7)—(6.3) и (6.4) при других значениях a, b и r оправдано, если, во-первых, интегралы (4.7) обладают большой изменяемостью, т. е. если $p>0$, а во-вторых, если обоснованы упрощения, сделанные в пп. 3, 4 при выводе уравнений для определения функций интенсивностей и изменяемостей и заключающиеся в отбрасывании асимптотически малых членов. При проверке второго условия надо иметь в виду, что согласно (4.3) и (6.5)

$$F_1=O(h^{1/2-p}),\quad f'=O(h^{1/2-p}).$$

Можно проверить, что сформулированные здесь условия выполняются, если

$$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2},\quad b<\min\left(\frac{1-a}{2},a\right),\quad -1+2b<r<\frac{1-a}{2} \tag{6.6}$$

Таким образом, неравенства (6.6) определяют область применимости результатов данной работы. Получаемые при этом интегралы обладают показателями изменяемости $0<p<1-b$.

Если зафиксировать исследуемые частоты (принять какое-либо из значений r в пределах (6.6)), то можно ослабить ограничения (6.6) на допустимые значения a и b, как это сделано в п. 2, где $b=\min({}^1/_2(1-a),\ a)={}^1/_4$.

При $-1<r\leqslant-1+2b$ выкладки, приводящие в п. 3 к определению Φ_*, неоправданы. Отметим, однако, без доказательства, что в этом диапазоне частот при $b<a$ можно пользоваться результатами [2], полученными для колебаний оболочек в вакууме. Соответствующие им частотное уравнение и выражение для перемещений u_1, u_2, u_3 формально следуют из (6.3)—(6.4) при

$$L=0,\ \Omega(x)=x^5-\lambda x,\quad \Omega_1=\partial\Omega/\partial x\,|_{x=X}$$

если считать, что X — отрицательный корень уравнения $\Omega=0$. Эти колебания обладают показателями изменяемости $1-b\leqslant p<1$.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за ценные замечания, оказавшие большую помощь в работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
3. *Балабух Л. И.* Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом.— Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966, с. 935.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.

Москва

Поступила в редакцию 3.V.1979