

УДК 539.3:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

ГРИГОЛЮК Э. И., МАГЕРРАМОВА Л. А.

Большая часть исследований потери устойчивости плоской формы равновесия тонких упругих круговых однородных пластин выполнена в рамках гипотез Кирхгофа, но есть и работы, например [117, 198], в которых эта проблема рассматривается в точной постановке с использованием уравнений теории упругости.

В данном обзоре в основном представлено современное состояние дел в области круговых однородных и неоднородных пластин.

1. Дифференциальное уравнение неосесимметричной формы потери устойчивости рассматриваемых пластин в линейной постановке и с учетом гипотезы прямой нормали имеет в общем случае следующий вид:

$$D\Delta\Delta w = N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \left(\frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + 2N_{r\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{w}{r} \right),$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1)$$

Здесь $\Delta(\dots)$ — двумерный оператор Лапласа в полярных координатах r и θ , w — прогиб, D — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины, N_r , N_θ и $N_{r\theta}$ — удельные нормальные усилия, возникающие в пластине в докритическом состоянии. Эти усилия зависят от характера приложенной нагрузки. Так, в случае действия равномерно распределенных по наружному и внутреннему контурам пластины радиальных усилий интенсивности P_b и P_a соответственно они определяются выражениями

$$N_r = A - B/r^2, \quad N_\theta = A + B/r^2, \quad N_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

$$A = (P_a a^2 - P_b b^2)/(b^2 - a^2), \quad B = (P_a - P_b) a^2 b^2 / (b^2 - a^2)$$

где a и b — внутренний и внешний радиусы пластины.

Если нагрузка распределена по какому-либо другому закону [110], приложена по части контура [109, 186] или является сосредоточенной в точках контура [185, 188], то ее обычно представляют в виде ряда Фурье. При действии касательных усилий [27, 67, 70] $N_r = N_\theta = 0$, $N_{r\theta} = M/(2\pi r^2)$, где M — момент касательных усилий.

Различные законы распределения температур в задачах температурного выпучивания также приводят к различным видам выражений для докритических удельных усилий в плоскости пластины. В соответствии с характером нагружения уравнение устойчивости (1) приобретает тот или иной специфический вид, от которого зависит метод решения. Если пластина находится в однородном поле напряжений, обусловленном действием по обеим границам кольцевой пластины равномерно распределенных радиальных нагрузок одинаковой интенсивности или действием равномерной нагрузки на контуре сплошной пластины, то из (2) $N_r = N_\theta = -P_b$

и уравнение устойчивости упрощается:

$$\Delta \Delta w + \kappa \Delta w = 0 \quad (3)$$

где $\kappa = P_b b^2 / D$ — искомый параметр критической нагрузки.

Уравнение (3) представляет полином относительно оператора Δ , и тогда точное решение уравнения устойчивости (3) в случае осесимметричных форм выпучивания имеет вид:

$$w = C_1 J_0(\sqrt{\kappa} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\kappa} r) + C_3 + C_4 \ln r \quad (4)$$

а для случая, когда прогиб является функцией окружной координаты, оно становится следующим:

$$w = [C_1 J_n(\sqrt{\kappa} r) + C_2 Y_n(\sqrt{\kappa} r) + C_3 r^n + C_4 r^{-n}] \sin n\theta, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

Здесь $J_n(\sqrt{\kappa} r)$, $Y_n(\sqrt{\kappa} r)$ — функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка (n — число узловых диаметров), $J_0(\sqrt{\kappa} r)$, $Y_0(\sqrt{\kappa} r)$ — функции Бесселя нулевого порядка, C_1, \dots, C_4 — постоянные интегрирования.

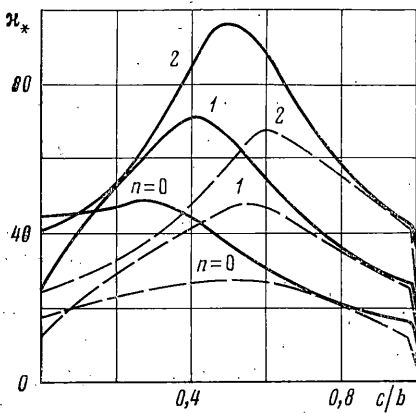
После подстановки решения в граничные условия получается система однородных алгебраических уравнений относительно постоянных C_i . Условие нетривиальности решения этой системы приводит к трансцендентному уравнению, из которого определяется параметр верхней критической нагрузки потери устойчивости.

Такая схема решений использовалась многими авторами, которые занимались вопросами устойчивости (в смысле Эйлера) круговых однородных пластин, находящихся в равномерном поле напряжений, когда во всех точках пластины $N_r = N_\theta = -P_b$ и $N_{r\theta} = 0$.

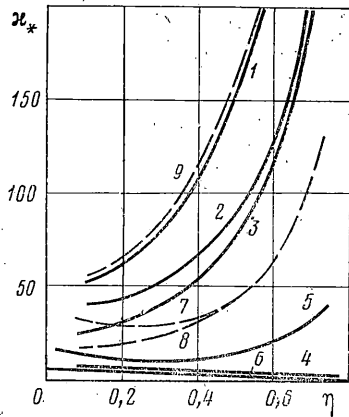
Трудоемкая операция нахождения корней трансцендентных уравнений, отдельные члены которых — бесселевы функции, удавалась вначале для самых простых случаев.

Впервые задача об устойчивости сплошной пластины в указанной постановке была рассмотрена Г. Брайяном [90], где для случая защемления получена критическая нагрузка осесимметричного выпучивания $P_* = 14,68D/b^2$. А. Н. Динник [32–34] исследовал более широкий круг вопросов. Он определил критическую нагрузку свободно опертой пластины при осесимметричной потере устойчивости ($P_* = 4,2D/b^2$), записал трансцендентные уравнения для определения критических нагрузок осесимметричного выпучивания бесконечной пластины с отверстием, кольцевой пластины с защемленным наружным и свободным внутренним контурами, исследовал также устойчивость пластины в упругой среде. А. Надаи [140, 141], продолжив работу Брайяна, определил спектр критических нагрузок, соответствующих формам равновесия с несколькими узловыми окружностями и диаметрами (m, n), сплошной защемленной (случай N_1) и опертой пластины (случай N_2) и установил, что минимальная нагрузка соответствует осесимметричной форме выпучивания без узловых окружностей. Ниже приводится спектр критических нагрузок для этих двух случаев

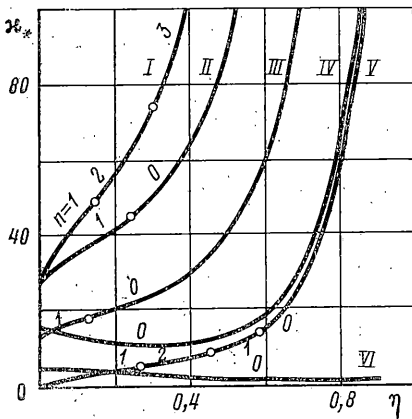
$n=0$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
N_2	4,191	29,04	73,48	137,6	221,4
N_1	14,68	49,22	103,4	177,5	271,3
$m=0$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
N_1	14,68	26,70	40,59	58,70	76,49



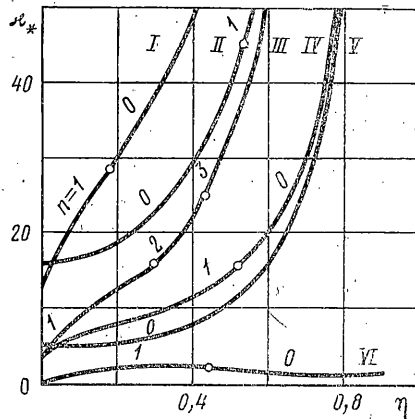
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Кроме того, Надаи впервые рассмотрел задачу об устойчивости защемленной пластины с опертым центром и задачу температурной устойчивости защемленной пластины при степенном законе изменения температуры в радиальном направлении.

В [75, 161] изучено влияние упругости защемления края на устойчивость сплошной пластины при осесимметричной форме равновесия (см. фиг. 1, где k — коэффициент пропорциональности между углом поворота краевого сечения и моментом; пунктирная прямая соответствует случаю свободного опирания).

Изучение сплошной пластины было продолжено в [53] (там же приводится исправленное решение [63]), получены величины критических нагрузок для свободно опертой пластины при формах равновесия с одним и двумя узловыми диаметрами, а именно: $13,36D/b^2$; $25,08D/b^2$. Кроме того, исследуя защемленную пластину с закрепленным центром, рассмотренную им ранее, Надаи высказал предположение о том, что величина критической нагрузки является функцией конструктивного характера крепления центра пластины при одних и тех же условиях на краю, что в дальнейшем было опровергнуто в [14, 51].

Применение вычислительных машин позволило расширить исследования в области получения точных решений.

Наличие дополнительной кольцевой опоры, находящейся на расстоянии s от центра пластины, было учтено в расчетах, выполненных при осесимметричной форме выпучивания [44] и при неосесимметричной [14, 51]. На фиг. 2 сплошные кривые соответствуют заземленной, а штриховые — шарнирно-опертой по контуру пластине, имеющей промежуточную жесткую кольцевую опору. В [44] изучалась также устойчивость пластин с произвольным точечным подкреплением.

Для более сложных случаев нагружения и закрепления сплошной круговой пластины необходимо использовать и более сложный математический аппарат при решении задач устойчивости.

В [143] исследуется устойчивость сплошной пластины со смешанными краевыми условиями под действием равномерно распределенной по всему контуру радиальной сжимающей нагрузки. Для пластины, у которой часть контура оперта, а часть заземлена, прогиб представляется в виде суммы прогибов w_0 (для пластины, полностью опертой и нагруженной распределенными сжимающими усилиями) и w^V (для опертой пластины от действия моментов на заземленной части).

В этом случае задача, описываемая уравнением (3), сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, решение которого получено в виде тригонометрического ряда с коэффициентами, зависящими от функций Бесселя.

Сплошная круговая пластина, нагруженная на части контура, изучалась в [109, 174, 186]. Первый автор рассматривал неосесимметричное выпучивание заземленной пластины, нагруженной на противоположных частях края равномерно распределенными радиально направленными усилиями. Раскладывая приложенную нагрузку в ряд Фурье, решение дифференциального уравнения задачи получено в виде тригонометрического ряда и показан способ для нахождения его коэффициентов.

В [174, 186] использовался энергетический метод Рэлея — Ритца для решения задачи об устойчивости сплошной пластины, нагруженной соответственно сжимающими усилиями, действующими в одном направлении и линейно-изменяющимися вдоль кромки [174], и равномерно распределенными по двум противоположным участкам радиальными сжимающими усилиями [186] (случай локального нагружения рассмотрен в [185, 187]).

Исследование устойчивости сплошной пластины с толщиной, изменяющейся вдоль радиуса по степенному закону, проводилось в [22, 107, 108], а по экспоненциальному — в [17, 64] в осесимметричной постановке.

В [17] решение системы двух дифференциальных уравнений относительно радиального и углового перемещений получено соответственно в гипергеометрических функциях и в виде бесконечного степенного ряда; для опертой и заземленной пластины найдены зависимости критической нагрузки от параметра, характеризующего изменение ее толщины (точное решение построено также в [107]).

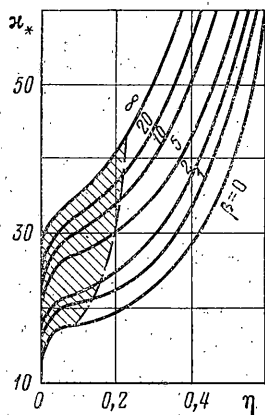
Приближенный метод Бубнова применен в [22, 64] для исследования устойчивости пластин переменной толщины с заземленной и опертой границей.

Влияние деформации сдвига на устойчивость сплошных круговых пластин изучено в [112, 127]. Во второй работе представлены результаты для свободно опертой и заземленной пластины при осесимметричном выпучивании.

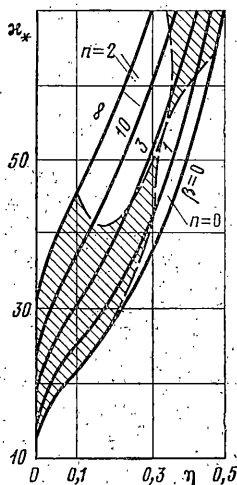
Кольцевые пластины, находящиеся в однородном поле напряжений ($N_r = N_\theta = -P$, $N_{r\theta} = 0$), исследованы многими авторами. Точное решение в этом случае имеет вид (4), (5). Пластина, имеющая один край заземлен-

ный, а другой — скользящий, изучалась в [144, 145]. Осесимметричная задача для шести различных видов граничных условий рассмотрена в [169], где построены кривые зависимостей критической нагрузки от величины относительного отверстия.

Н. Ямаки [189], решая задачу в неосесимметричной постановке, получил значения минимальных критических нагрузок и соответствующие им формы равновесия для двенадцати видов краевых условий. Сделан вывод, что при некоторых величинах относительного отверстия и определенных граничных условиях нижняя критическая нагрузка соответствует форме равновесия без осевой симметрии. Например, для случая обоих заземлен-



Фиг. 6



Фиг. 7

ных краев при отношении внутреннего диаметра к внешнему, равному $\eta=0,6$, минимальная критическая нагрузка соответствует форме равновесия с пятью узловыми диаметрами.

Для пластины с опертыми краями осесимметричные формы и формы равновесия с одним узловым диаметром при наличии одной узловой окружности и без нее изучены в [54, 55]. Соответствующие результаты для кольцевых пластин показаны на фиг. 3, 4.

На фиг. 3 изображены зависимости параметра критической нагрузки α_* от величины относительного отверстия при осесимметричном выпучивании. Кривая 1 соответствует случаю пластины с обеими заземленными границами, 2 — пластине с внутренним опертым, а наружным заземленным контурами, 3 — пластине с внутренним заземленным, а наружным опертым краями, 4 — пластине с обеими опертыми границами, 5 — пластине с внутренним свободным, а наружным заземленным контурами, 6 — пластине с внутренним свободным, а наружным опертым краями; штриховые кривые 7—9 построены на основании результатов [54, 55] для пластины с обеими свободно опертыми границами при значениях n и m : 0, 1; 1, 0; 1, 1.

На фиг. 4, 5 приведены минимальные критические усилия и соответствующие им формы равновесия (n — число узловых диаметров) при различных граничных условиях (светлые точки — границы перестройки форм). На фиг. 4 кривая I соответствует пластине с жестко заземленными

ми границами, II — пластине с наружным зацементированным и внутренним опертым контурами, III — пластине с опертыми границами, IV — пластине с внутренним свободным и наружным зацементированным краями, V — пластине с внутренним зацементированным и наружным свободным контурами, VI — пластине с внутренним свободным и наружным опертым краями.

На фиг. 5 кривая I соответствует пластине с внутренним зацементированным и наружным опертым контурами, II — пластине с наружным зацементированным и внутренним скользящим ($Q_r=0$, $dw/dr=0$) краями, III — пластине с внутренним зацементированным и наружным скользящим контурами, IV — пластине с внутренним опертым и наружным скользящим краями, V — пластине с внутренней скользящей и наружной опертой кромками, VI — пластине с внутренней опертой и наружной свободной границами.

Влияние упругости зацементования наружного контура на устойчивость кольцевой пластины с опертым и зацементированным внутренним краем исследовалось в [14; 51, 52]. На фиг. 6, 7 приведены полученные зависимости минимального параметра критической нагрузки и соответствующие им формы равновесия от относительной величины отверстия при изменении жесткости опоры, где β — коэффициент пропорциональности между углом поворота и изгибающим моментом на внешней границе пластины. Штриховая кривая на фиг. 6 (внутренний край оперт) является границей для $n=0$ и $n=1$ (заштрихованная область). На фиг. 7 (внутренний край зацементирован) пунктирные кривые разделяют области $n=2$, $n=0$ и $n=1$ (заштрихованная область). На фиг. 6 и 7 предельные случаи $\beta=0$ и $\beta=\infty$ соответствуют пластине с наружным опертым и зацементированным краем.

В [48] изучалась устойчивость пластин с малым относительным отверстием ($\eta < 0,14$) и выявлено резкое возрастание критической нагрузки у пластины с наружным зацементированным контуром при увеличении относительного отверстия от 0 до 0,001.

Кольцевая пластина, находящаяся в однородном поле напряжений и имеющая гладко переменную вдоль радиуса толщину, исследована при осесимметричном выпучивании в [108, 146].

В случае, когда на круговые кольцевые пластины действуют радиальные равномерно распределенные вдоль обоих контуров усилия различной величины, внутренние силовые факторы N_r , N_θ являются функциями радиуса пластины (2). Получить точное решение дифференциального уравнения устойчивости кольцевых пластин, находящихся в таком неоднородном поле напряжений, значительно труднее. Интегрирование в специальных функциях удавалось сначала только в некоторых частных случаях, упрощающих дифференциальные зависимости. Первые попытки относились к осесимметричным деформациям пластины.

В [129] найдено решение дифференциального уравнения

$$D \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{r dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} + \frac{P_b b^2}{b^2 a^2} \frac{d}{dr} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \frac{dw}{dr} = 0 \quad (6)$$

полученного для случая действия равномерно распределенных сжимающих усилий, приложенных только по наружному контуру (в (2) $P_a=0$), в функциях Бесселя нецелого индекса; определены критические нагрузки кольцевой пластины при отношении радиуса свободного от закрепления отверстия к радиусу пластины, равному 0,5. Для пластины с зацементированным и опертым наружными краями эти результаты равны $13,61D/b^2$ и $3,53D/b^2$.

Е. Мейсснер [136] обобщил результаты [129] и, воспользовавшись связью между радиальными и окружными внутренними усилиями при осе-

симметричных деформациях $d/dr(rN_r) = -N_0$, получил решение дифференциального уравнения задачи

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{r dr} (r\xi) \right] \right\} = \frac{A}{D} \frac{d}{dr} (r\xi) - \frac{B}{D} \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi}{r} \right) \quad (7)$$

($\xi = dw/dr$ — угол наклона нормали к срединной поверхности деформируемой пластины) в функциях Бесселя

$$\xi = C_1 J_t(rx) + C_2 J_{-t}(rx), \quad t = \sqrt{1 - B/D}, \quad x = \sqrt{A/D}$$

Для пластины, рассмотренной в [129], Е. Мейсснер получил зависимости изменения критической нагрузки от относительной величины отверстия. Эти результаты показаны на фиг. 8 штриховыми линиями.

Неосесимметричные формы потери устойчивости кольцевых пластин, находящихся в неоднородном поле напряжений, с точки зрения получения аналитического решения исследовались в [131, 132]. Первый автор изучал выпучивание пластины, нагруженной равномерно распределенной только по внутреннему контуру нагрузкой. Для пластины, имеющей бесконечный наружный радиус, усилия равны $N_r = -N_0 = (a/r)^2 P_a$. В этом случае дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \kappa^0 \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) = 0, \quad (\kappa^0 = P_a a^2 / D) \quad (8)$$

после разделения переменных при помощи выражения $w = w_0 \cos n\theta$ приобретает вид

$$\sum_{i=0}^4 w_0^{(i)} r^{i-4} = 0$$

и интегрируется методом Эйлера

$$w_0 = \sum_{j=1} C_j \rho^{1+\gamma_j}, \quad \rho = \frac{r}{a}$$

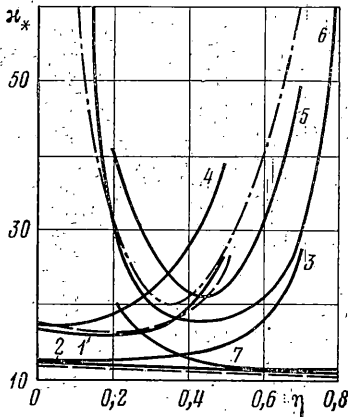
где γ_j определяется из характеристического уравнения.

Это решение Е. Мансфилд [132] распространяет на случай пластины с конечным наружным радиусом, нагруженной подобным образом и имеющей на внешнем контуре такие радиальные опоры, при которых сохраняется указанное распределение внутренних нормальных усилий. Числовые результаты, однако, получены им для форм равновесия без узловых диаметров при некоторых видах закрепления границ кольцевой пластины относительно прогиба и угла поворота. Кроме того, он рассмотрел ту же пластину при наличии нескольких диаметральных опор.

В [106] продолжено изучение осесимметричных выпучиваний кольцевой пластины при действии на нее равномерно распределенной по внешнему и внутреннему контурам усилий с интенсивностью P_b и P_a . Показано, что пластина находится в поле напряжений, рассмотренном Е. Мансфилдом, если $P_a/P_b = (b/a)^2$. Решение уравнения (8) в этом случае дано Е. Мансфилдом:

$$w = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \rho \sin(\sqrt{\kappa^0 - 1} \ln \rho) + C_4 \rho \cos(\sqrt{\kappa^0 - 1} \ln \rho)$$

На основе этого решения в [106] получены кривые зависимостей $\kappa_*-\eta$ при различных отношениях интенсивностей приложенных нагрузок для нескольких видов граничных условий.



Фиг. 8

В [131] исследована кольцевая пластина, рассмотренная в осесимметричной постановке задачи устойчивости Е. Мейсснером. При выпучивании по несимметричной форме решение уравнения устойчивости пластины, нагруженной только по внешнему контуру равномерными сжимающими усилиями

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w + \lambda (a^{-1} + r^{-1}) \Delta w &= \\ &= 2\lambda r^{-2} \partial^2 w / \partial r^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda = \kappa a^2 / (b^2 - a^2)$$

отыскивалось в виде $w = w_n(r) \cos n\theta$. При $n = 0$ интеграл уравнения (9) найден ранее Е. Мейсснером. При $n = 1$ С. Маджумдару [131] удалось получить точное решение. В этом случае при помощи подстановки $w_1 = z\Phi$, $\psi = d\Phi/dz$, где $z = \sqrt{\lambda} b/a$, обыкновенное однородное дифференциальное уравнение устойчивости относительно w_1 приводится к неоднородному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left[1 + \frac{1-p^2}{z^2} \right] \psi = \frac{C_3}{z^3}, \quad (p^2 = \lambda + 4)$$

решение которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi &= z^{-1} [C_1 J_p(z) + C_2 J_{-p}(z) + C_3 S_{-1,p}(z)] \\ S_{-1,p}(z) &= \frac{\pi}{2 \sin(p\pi)} \left[J_p(z) \int \frac{J_{-p}(z)}{z} dz - J_{-p}(z) \int \frac{J_p(z)}{z} dz \right] \end{aligned}$$

Для пластины с заземленным наружным и свободным внутренним контурами на основе этого точного решения автором получена зависимость $\kappa_*-\eta$ при выпучивании с одним узловым диаметром (штрихпунктирная кривая на фиг. 8).

Трудоёмкость построения точного решения задачи об устойчивости кольцевой пластины, находящейся в неоднородном поле напряжений общего вида (2) ($A, B \neq 0$), при несимметричных формах выпучивания заключалась в необходимости решать дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами. Это уравнение после разделения переменных будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta_n \Delta_n w + \left(\alpha + \frac{\beta}{r^2} \right) \Delta_n w + \frac{2\beta}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} &= 0 \\ \alpha = \frac{A}{D}, \quad \beta = \frac{B}{D}, \quad \Delta_n = \frac{d^2(\dots)}{dr^2} + \frac{d(\dots)}{r dr} - \frac{n^2(\dots)}{r^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Для этого случая в [14, 15] решение исходного уравнения устойчивости представлено в виде обобщенного степенного ряда $w = \sum a_k \rho^{\alpha+k}$ ($k=0, 1, \dots$), где ρ — безразмерный радиус пластины. Изучен весь диапазон изменения отношений интенсивностей нагрузок P_a и P_b и число узловых диаметров. Проведен расчет пластины со свободным внутренним и упруго-

защемленным внешним краями и нагруженной только по внешнему контуру (форма равновесия — с одним узловым диаметром). Эти результаты показаны на фиг. 9.

Гораздо большее количество результатов было получено при использовании приближенных методов. Методом Бубнова кольцевая пластина, находящаяся в неоднородном поле напряжений общего вида, исследована в [25, 78]. Устойчивость пластин изучалась при осесимметричном выпучивании на основе следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{du}{\rho d\rho} - \frac{u}{\rho^2} &= 0 \quad \left(\rho = \frac{r}{b} \right) \\ \frac{d^2 \xi}{d\rho^2} + \frac{d\xi}{\rho d\rho} - \frac{\xi}{\rho^2} \left[1 + 12b^2 \rho^2 \left(\frac{du}{d\rho} + \nu \frac{u}{\rho} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Радиальное перемещение u , удовлетворяющее первому уравнению в (11), равно $C_1 \rho + C_2 \rho^{-1}$. Задаваясь для угла поворота нормали к срединной поверхности пластины выражением $\xi = C_3 \rho^{-1} + C_4 \rho + C_5 \rho^3$, позволяющим точно удовлетворить граничным условиям и приближенно исходным уравнениям (11), найдены решения ряда частных задач. Некоторые результаты из [25] показаны на фиг. 8 сплошными линиями. Кривые 1 соответствуют пластине с внутренним свободным и наружным защемленным контурами, кривые 2 — пластине с внутренним свободным и наружным опертым краями, кривые 3, 4 — пластинам с наружным соответственно опертым и защемленным краем и с центральной жесткой вставкой. В этих случаях пластины нагружались только по наружному контуру. Кривые 5, 6, 7 соответствуют пластинам с граничными закреплениями, описанными для кривых 1, 1, 2, при нагружении внутреннего края. Кроме того, в случае 6 на наружном крае отсутствует возможность радиальных перемещений.

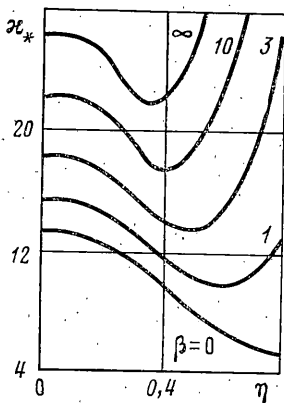
В [78] изучено также влияние жесткости закрепления наружного края на величину критических нагрузок при любых отношениях интенсивностей приложенных нагрузок и различных относительных размерах отверстия.

В [24] рассмотрена задача посадки диска на жесткий вал, а в [78] — устойчивость пластины с жестким центральным диском при упругом закреплении наружного края.

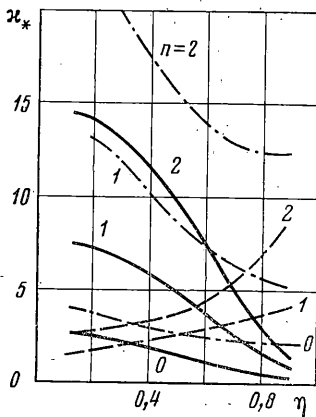
Некоторые авторы использовали энергетические методы для изучения проблемы устойчивости кольцевой пластины, внутренние нормальные усилия (N_r, N_θ) которой являются функциями расстояния от центра. В [311, 156—159] использовался метод Рэлея — Ритца. В качестве функций, аппроксимирующих прогиб, для этого метода выбирались простые полиномы по радиальной координате.

В [131] функция прогиба, удовлетворяющая геометрическим граничным условиям на внешнем защемленном контуре, принята в виде $w = w_0 [1 - (r^2/b^2)] \cos n\theta$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Минимизируя полную потенциальную энергию деформации пластины по w_0 , определена критическая нагрузка выпучивания рассмотренной пластины для одиннадцати первых форм равновесия ($n=0-10$) при нагружении только по наружному краю.

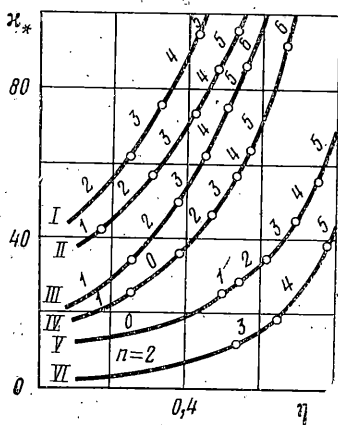
Пластинки с девятью различными видами закрепления краев при нагружении наружного контура исследовались в [158] (фиг. 10, 11). На фиг. 10 сплошные линии соответствуют случаю, когда оба края пластины свободны, штриховые — наружный край свободен, внутренний оперт, штрихпунктирные — наружный оперт, внутренний свободен. На фиг. 11 кривые I—V соответствуют граничным условиям I—V на фиг. 4, кривая VI — пластине с наружным свободным и внутренним защемленным краями. Получены номограммы для определения критической нагрузки,



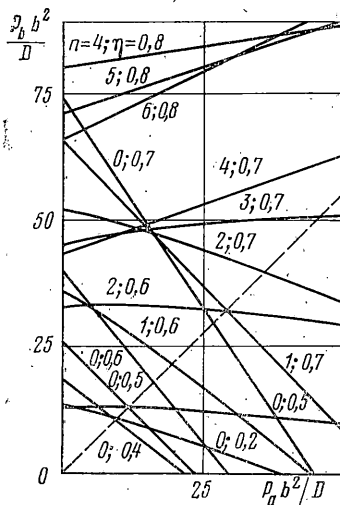
Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

приложенной по одному из контуров пластины, при известной величине интенсивностей усилий, действующих по другому краю (пластина имела наружный край защемленный, а внутренний — свободный) [156] (фиг. 12).

В [109, 110] решена осесимметричная задача устойчивости для восьми граничных условий также энергетическим методом с использованием аппарата интегральных уравнений. Рассмотрено два вида нагружения пластины — только по наружному или только по внутреннему контурам; при этом учитывались следующие условия: свободный от нагружения край может, а в другом случае не может перемещаться в радиальном направлении.

Используя энергетический критерий устойчивости Трефтца, в [171] для восьми комбинаций закрепления границ получены зависимости критической нагрузки осесимметричного выпучивания от величины относительного отверстия при следующих соотношениях интенсивностей нагрузок: $P_a=P_b, P_a=0, P_b=0, P_a=-P_b, P_a/P_b=(b/a)^2$.

Применялись и другие приближенные методы. Для задач устойчивости в [77] использовался метод сеток, однако числовых результатов там не приводится. Тот же автор [76], используя метод конечных разностей, получил критические усилия, вызывающие волнообразные формы неплоской потери устойчивости кольцевой пластины, свободной на внутреннем и защемленной на наружном крае под действием равномерного внешнего давления.

В [164] при исследовании устойчивости кольцевой пластины при нагружении ее по одному контуру задача сводится к интегродифференциальным уравнениям, которые решаются итерационным методом. Определены критические нагрузки для граничных условий следующего вида: один из краев защемлен, а другой — свободен и наоборот.

Полуобратный метод численного интегрирования, состоящий в замене краевой задачи начальной и в итерационном подборе свободных параметров (один из этих параметров соответствует параметру критической нагрузки), обеспечивающих выполнение всех краевых условий, использовался в [177] для определения критических усилий несимметричного выпучивания кольцевых пластин, различным образом нагруженных и закрепленных.

В [162] приведены данные эксперимента, хорошо согласующиеся с теоретическими результатами, полученными при решении осесимметричной задачи устойчивости опертой на внешнем и свободной на внутреннем краях пластины и нагруженной по наружному контуру.

Явление выпучивания кольцевых пластин под действием равномерно распределенных растягивающих нагрузок первым объяснил И. В. Геккелер [116]. Он изучал волнообразную форму потери устойчивости узкой кольцевой пластины (максимальная толщина составляет $\frac{1}{3}$ от общего радиуса), к внутреннему контуру которой приложены равномерно распределенные растягивающие усилия. В принятой автором приближенной схеме расчета прогиба не зависели от радиальной координаты, а возникающие при таком нагружении сжимающие кольцевые напряжения считались постоянными.

Используя точную постановку задачи, в [19] исследована кольцевая пластина, рассмотренная И. В. Геккелером, и установлено, что для случая обоих защемленных или опертых краев осесимметричная форма равновесия невозможна. Для различных видов граничных условий методом Бубнова получены значения параметра критической нагрузки и соответствующие формы равновесия при изменении величины относительного отверстия. Установлено, что для узких колец ($\eta > 0,7$) раньше реализуется плоская форма потери устойчивости, при этом различие в граничных условиях теряется. В [21] найдено решение для случая пластины со свободными краями при действии равномерно распределенных по обоим контурам растягивающих нагрузок с некоторым определенным отношением их величин. Выяснено, что минимальная критическая нагрузка соответствует форме равновесия с двумя узловыми диаметрами.

Первая задача по устойчивости упругой тонкой эллиптической пластины принадлежит С. Войновскому — Кригеру [182]. Для получения значений критической нагрузки он использовал энергетический метод. Та же задача методом последовательных приближений решена в [170]. В [35] получено точное решение задачи устойчивости эллиптического кольца в однородном поле напряжений в функциях Матье и исследовано влияние эксцентриситета.

Вопросам устойчивости пластин эллиптической формы в плане посвящены также работы [9, 149].

А. Н. Динник [33] изучал пластину в виде сектора круга. При действии равномерно распределенных по всем границам пластины сжимающих усилий для случая защемленного криволинейного и опертых прямолинейных краев получены критические величины нагрузки в зависимости от угла раствора сектора. Устойчивость равномерно сжатых пластин, вырезанных из кольца, изучалась в [122, 126], а пластины в виде полукруга — в [66].

Задача об устойчивости кольцевой пластины под действием равномерно распределенных по контурам касательных усилий впервые поставлена в [70]. Поле напряжений в пластине при такой нагрузке всегда однородно: $N_r = N_\theta = 0$, $N_{r\theta} = M / (2\pi r^2)$, где M — момент относительно центра касательных усилий, распределенных по внешнему краю. Указан способ решения дифференциального уравнения устойчивости в виде бесконечных рядов, однако числовых результатов не получено. Наиболее подробно исследована пластина с обоими защемленными краями. Показано, что при внутреннем радиусе пластины, стремящемся к бесконечности, получается уравнение для бесконечно длинной полосы, нагруженной по краям касательными усилиями, и узловые линии кольца становятся кривыми, как и у полосы. Числовые результаты для этой задачи методом Бубнова получены в [27] (найжены величины наименьших критических нагрузок и соответствующие им числа узловых линий при изменении относительного отверстия).

Узкие кольцевые замкнутые и незамкнутые однородные, а также ортотропные пластины рассматривались в [67]. Решение для обоих жестко заделанных или опертых краев получено при помощи сведения задачи для замкнутого кольца к бесконечной, а для разрезанного — к конечной полосе. Для тех же видов граничных опор задача решена в [29] с использованием условия минимума функционала Эйлера и введением косоугольных координат.

В [5, 6] исследовалась жестко защемленная по внутреннему и свободная по внешнему краю кольцевая пластина, нагруженная на внешнем контуре равномерно распределенными по всему или по части контура сдвигающими усилиями или двумя равными сосредоточенными касательными к контуру силами. Для всех этих видов нагружения получены значения критических усилий и соответствующие им числа узловых линий, исследованы сами узловые линии. Для случая действия сосредоточенных сил найдены две независимые формы потери устойчивости — осесимметричная и кососимметричная, из которых вторая наступает при меньшей величине критической нагрузки.

Температурные задачи устойчивости, как упомянуто выше, решал А. Надаи [140, 141], который получил точное решение дифференциального уравнения в функциях Бесселя только при специально им подобранных граничных условиях и определенном законе изменения температуры. В [26] приближенным методом Бубнова подробно изучено осесимметричное выпучивание кольцевой и сплошной пластин при степенном законе изменения температуры вдоль радиуса и получены многочисленные результаты для четырех видов закрепления границ: защемление внешнего контура с возможностью или невозможностью радиального перемещения и опирание с теми же случаями деформации, внутренний край при этом был всегда свободен.

В [11] авторы, изучая сплошную пластину, получили распределение напряжений, которое можно рассматривать как соответствующие местному нагреву — температура поддерживается постоянной $T(r) = T_0$ в области с радиусом $0 \leq r \leq a$, а на периферии ($r > a$) $T(r) = 0$; числовых результатов в этом исследовании не содержится.

Метод точного решения дифференциального уравнения при различных законах изменения температуры в радиальном направлении и при любых краевых условиях приводится в [60]. Задача решается в функциях Бесселя в случае равномерного нагрева пластины и в обобщенных степенных рядах при других распределениях температуры. Получены значения критических температур для различных линейных и параболических законов.

В [45] точное решение дифференциального уравнения неосесимметричной задачи устойчивости и собственных колебаний тоже определялось в степенных рядах для более общего закона изменения температуры вдоль радиуса, принятого в виде бесконечного степенного ряда, который позволяет описать практически любое температурное распределение. Для сплошной заземленной или опертой пластины при параболических, линейных законах и при равномерном нагреве получены значения собственных частот для осесимметричных и неосесимметричных (с одним узловым диаметром) колебаний, но результатов расчета критических температур приведено не было.

Из изложенного видно, что однородная сплошная и кольцевая пластины в линейной постановке задачи устойчивости исследованы многочисленными авторами довольно полно¹.

2. Дальнейшим шагом в изучении устойчивости круговых пластин стало исследование неоднородности. Рассматривались пластины, усиленные ребрами жесткости, с армирующими включениями и из ортотропных или анизотропных материалов. К таким исследованиям следует отнести работу [242], в которой предметом изучения была заземленная или опертая цилиндрически ортотропная сплошная круговая пластина при осесимметричном выпучивании. Дифференциальное уравнение устойчивости пластины следующее:

$$\begin{aligned}
 D_r \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right) + D_0 \left(\frac{\partial w}{r^3 \partial r} - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} \right) + \\
 + 2D_{r_0} \left(\frac{\partial^4 w}{r^2 \partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial r \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} \right) = N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \\
 + 2N_{r_0} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{w}{r} \right) \\
 D_r = E_r h^3 / [12(1 - \nu_r \nu_\theta)], \quad D_0 = E_\theta h^3 / [12(1 - \nu_r \nu_\theta)] \\
 D_{r_0} = D_r \nu_\theta + G_{r_0} h^3 / 12
 \end{aligned} \tag{12}$$

Более подробный анализ той же пластины был выполнен в [224]. Решение дифференциального уравнения представлено в виде бесконечного тригонометрического ряда, коэффициенты которого являются функциями радиуса; сформулированы условия потери устойчивости как в осесимметричном, так и в несимметричном случаях и определены корни этих уравнений как функции введенных параметров материала. В этой работе содержатся также приближенные решения и графики определения критических нагрузок при изменении упругих констант. Кроме того, рассмотрены пластины с дополнительным центральным опиранием.

В [225] продолжено изучение осесимметричного выпучивания сплошной заземленной или опертой пластины из ортотропного материала. Для некоторых величин параметров ортотропии при помощи точного решения дифференциального уравнения устойчивости получено несколько значений

¹ Литературу для однородных пластин см. [1—189].

критических нагрузок. В [198] при изучении устойчивости трехмерных упругих тел в качестве примера приводится выражение для определения критической нагрузки сплошной защемленной пластины при осесимметричном выпучивании.

Для кольцевых пластин авторы [240, 241] использовали классический метод Рэлея — Ритца при исследовании пластины, подверженной равным давлениям по контурам и только внешнему давлению. В предположении, что форма выпучивания осесимметрична, были получены оценки критических нагрузок для различных условий опирания краев, но лишь при одном равном половине отношении радиусов. Критические усилия полярно-ортотропной пластины при действии равномерно распределенного уже по внутреннему краю давления установлены названным выше методом в [229] для девяти комбинаций условий защемления, шарнирного опирания и свободного края. В процессе исследования авторы обнаружили, что прямое приложение метода Рэлея — Ритца с использованием простых полиномов в качестве аппроксимирующих функций приемлемо лишь для малых отверстий. Для отверстий же больших размеров предложено использовать тот же метод в сочетании с преобразованием координат. В работе получены точные оценки критических нагрузок для различных отношений жесткостей и размеров отверстия. Точное решение задачи о симметричной и первой несимметричной формах выпучивания в функциях Бесселя и Ломмеля найдено в [237]. Приводятся простые формулы для определения критических усилий при граничных условиях, соответствующих защемленной или свободно опертой кромке сплошной круговой пластины. Числовые результаты получены для этих двух форм при отсутствии и наличии одной узловой окружности. Для более высоких несимметричных форм равновесия решение дифференциального уравнения представлено в рядах.

Те же авторы [238] распространили свои исследования на сплошную цилиндрически ортотропную пластину с произвольным числом дополнительных упругих кольцевых опор. Они представили решение исходного дифференциального уравнения в виде двойных бесконечных степенных рядов; разобрали условия сопряжения на линиях дополнительных опор и три вида закрепления границы. Однако числовые результаты относятся лишь к изотропным свободным или защемленным по внешнему краю пластинам с одной дополнительной опорой названного вида и отражают влияние на устойчивость пластины различных факторов, таких, как расстояние дополнительной опоры от центра, ее жесткость и различные формы осесимметричного выпучивания и равновесия с одним узловым диаметром.

Применяя метод конечных разностей, в [200] решена задача об осесимметричной форме потери устойчивости круговой сплошной ортотропной пластины радиально переменной толщины в случае скользящей заделки или свободного опирания контура. Для выяснения влияния анизотропии, переменности толщины и шага сетки на величину критической нагрузки рассмотрены пластины из конкретных материалов и установлено, в частности, что значения критических усилий существенно зависят от анизотропии материала.

В [235] исследуется влияние различных факторов на устойчивость кольцевой ортотропной пластины с опертыми или защемленными краями при различных соотношениях внешних контурных нагрузок. Решение дифференциального уравнения задачи представляется в виде ряда

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(r) \cos m\theta \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

а значения критических нагрузок получены при помощи метода Бубнова.

В [222] предложен метод Фробениуса для отыскания точного решения осесимметричной и неосесимметричной форм выпучивания кольцевых ортотропных пластин. Широкий круг вопросов исследован в [236], где применен метод Рэлея — Ритца. В [190, 210] отражены вопросы устойчивости пластин из различных армированных материалов. Так, в [236] определен оптимальный закон изменения концентрации армирующих элементов в материале круговой сплошной пластины при условии, что последняя, обладая заданной устойчивостью, имела минимальный вес.

Материалам, рассмотренным в [190], характерна существенная анизотропия: модули Юнга для них в плоскости пластины превышают модули Юнга в поперечном направлении в 5—15 раз, а модули сдвига — в 10—100 раз. На примере устойчивости сплошной пластины, сделанной из такого материала, проведено исследование влияния сдвигов и поперечных деформаций и сделан вывод о необходимости учета первых.

Далее авторы переходят к изучению кольцевых пластин при трех различных граничных условиях, причем защемленный край в рамках представленной теории, учитывающей поперечные сдвиги, рассматривался по-разному: кроме классического условия $w = dw/d\rho = 0$ задавались условия при $\xi = \xi_1$, $w = u = 0$ или $w = du/d\xi = 0$, где ξ — относительная поперечная координата, а u — радиальное перемещение. Даны также рекомендации для уменьшения податливости пластины из описанных выше материалов.

Устойчивость круговой защемленной пластины с податливым включением исследована в [207]. Особенностью задачи, рассмотренной в этой статье, является следящий характер радиальных сжимающих усилий в кольцевой части пластины, порожденных натягом, с которым в отверстие кольцевой пластины впрессована упругая шайба.

Решению задач устойчивости круговых пластин, различным образом усиленных ребрами, посвящен ряд работ. Например, в [212] изучалась устойчивость неравномерно нагретой по радиусу кольцевой подкрепленной пластинки, в [218] исследовалось влияние жесткости и площади поперечного сечения ребра прямоугольного профиля на устойчивость опертой сплошной пластинки.

Г. Симитес [232], рассматривая конструктивно-анизотропную сплошную круговую пластину, нагруженную одновременно поперечным давлением и сжатием, искал оптимальный вариант ее подкрепления. Сплошную [228] и кольцевую [227] пластины с кольцевым подкреплением края рассматривали Ж. Филлипс и Ж. Карни. Для отыскания нижней критической нагрузки ими рассмотрены все возможные формы потери устойчивости и исследованы виды закрепления ребра. В одной из последних работ в этой области изучена кольцевая пластина с наружным подкреплением в виде круговой цилиндрической оболочки конечной длины [239]².

3. Значительно меньше места уделено в литературе слоистым пластинам.

В [249] на основе гипотезы Кирхгофа для всего пакета рассмотрена круговая трехслойная пластина симметричного строения по толщине, которая выпучивается осесимметричным или неосесимметричным образом под действием равномерно распределенных сжимающих или растягивающих усилий. Отмечено, что приведенное в работе дифференциальное уравнение отличается от аналогичных соотношений однородной пластины лишь природой постоянного коэффициента приведенной жесткости слоистой пластины D^* , и на конкретных примерах показано, что решение задач устойчивости трехслойных пластин рассматриваемого класса может

² Литературу для неоднородных пластин см. [190—246].

быть заимствовано из известных решений для однородных пластин простой заменой их жесткостей на соответствующие приведенные параметры неоднородных пластин.

Приближенный метод разделения жесткостей использовался в [262, 263], что позволило учесть сдвиговую жесткость заполнителя трехслойных пластин. Этим способом получено решение ряда задач, в том числе и для сплошной круглой защемленной пластины.

Более строгие подходы к задачам, объектом которых являлись трехслойные конструкции, привели к увеличению на два порядка дифференциального уравнения равновесия. Соответственно появилось и дополнительное граничное условие, описывающее взаимное смещение несущих слоев.

На основе различных теорий трехслойных оболочек решены простейшие задачи. Осесимметричная задача об устойчивости трехслойных круговых сплошных пластин с легким заполнителем изучалась в [248]. Там же рассмотрена пластина несимметричного строения по толщине, но с одинаковыми для несущих слоев коэффициентами Пуассона под действием сжимающих сил. Здесь для ортотропного несжимаемого заполнителя был принят квадратичный закон изменения тангенциальных перемещений по толщине и линейный для прогиба.

Уравнение устойчивости в этом случае для сплошной круговой пластины имеет вид [248]:

$$\Delta\Delta\Delta w - \alpha\Delta\Delta w = \xi\Delta w \quad (13)$$

где α — функция жесткостей при растяжении и изгибе несущих слоев и модуля сдвига заполнителя, геометрии сечения, а также и внешней нагрузки; ξ зависит от тех же жесткостей и внешних усилий.

Решение дифференциального уравнения найдено в функциях Бесселя; приводятся трансцендентные выражения для нахождения критических нагрузок осесимметричного выпучивания сплошной пластины со скользящим защемлением края при условии, что на контуре возможно взаимное смещение несущих слоев, и для свободно опертой пластины, имеющей жесткую диафрагму, которая препятствует этому смещению. В [248] уделено внимание также пластине со сжимаемым в поперечном направлении заполнителем.

Более подробно проблема сжимаемости заполнителя изучена в [251]. В этой работе задача местной и общей устойчивости симметричной по толщине сплошной пластины, равномерно сжимаемой радиальными усилиями, приложенными к несущим слоям, решается при помощи некоторых предположений о модулях упругости материала слоев, которые позволяют упростить соотношения примененной к заполнителю трехмерной теории упругости (сохранен кубический член в выражениях для тангенциальных перемещений и квадратичный для прогиба). Для защемленной и опертой сплошной пластины приведены трансцендентные уравнения, но числовых результатов нет.

В [250] рассматривалась кольцевая пластина, составленная из различных по толщине и материалу слоев, но с одинаковым для всех них коэффициентом Пуассона и нагруженная радиально растягивающими усилиями, равномерно распределенными по внутреннему контуру. Свои рассуждения авторы основывали на том, что малые тангенциальные перемещения по толщине заполнителя и прилегающим к нему частям несущих слоев изменяются по закону кубической параболы, имеющей плавный переход в линейные законы Кирхгофа по поверхностям раздела. Для определения критических нагрузок использовался метод Бубнова. В случае, когда оба края жестко защемлены, получены наименьшие критические

усилия и выражение для определения числа волн в окружном направлении.

В [252, 253] исследовались трехслойные пластины с жестким заполнителем на основе гипотезы ломаной линии Э. И. Григолюка. Дифференциальное уравнение устойчивости, полученное на основе этой теории, для круговых пластин следующее:

$$D \left(1 - \frac{\partial h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta \Delta \chi = N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + 2N_{r\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{w}{r} \right), \quad w = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \chi \quad (14)$$

где χ — функция перемещений, β и θ — параметры трехслойности пластины.

Для равномерно сжатой круговой сплошной пластины авторы нашли решение уравнения (14) в виде

$$\chi = [C_1 J_n(\lambda_1 r) + C_2 I_n(\lambda_2 r) + C_3 r^n] \sin n\theta \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

где $J_n(\lambda_1 r)$, $I_n(\lambda_2 r)$ — функции Бесселя первого рода, n -го порядка от действительного и мнимого аргумента, λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения.

На основе этого решения для определения критического усилия получено выражение, в котором учтены параметры трехслойности рассматриваемого объекта и получены числовые величины корней трансцендентных уравнений при жестком защемлении и свободном опирании края пластины.

А. Амато [259], используя теорему о минимуме потенциальной энергии, получил основные уравнения в перемещениях, записанные в полярных координатах с осевой симметрией для кольцевой трехслойной панели, имеющей мягкий изотропный заполнитель и тонкие изотропные слои обшивки одинаковой толщины и из одного материала. Рассматривая пластину, у которой внешний край защемлен, а внутренний скользящий, при действии меняющихся по радиусу напряжений, для получения критерия устойчивости авторы [260] использовали разложение угла поворота элемента в радиальном направлении в степенной бесконечный ряд. Показано, что для такой пластины, на которую действует равномерно распределенная только по внешнему контуру сжимающая нагрузка, пятое приближение дает приемлемый результат.

Формула для определения величины критической равномерно распределенной нагрузки при осесимметричном выпучивании круговой сплошной двуслойной пластины с контурной связью слоев выведена в [265]. Задача термоустойчивости сплошной биметаллической пластины решена в [261]. Осесимметричное выпучивание трехслойной сплошной круговой пластины, находящейся в температурном поле, изучалось в [255]. Рассматривалась защемленная по контуру пластина, состоящая из легкого малотеплопроводного изотропного заполнителя и изотропных несущих слоев различной толщины и различных теплофизических и механических свойств, за исключением коэффициента Пуассона. Авторы считали также, что температура не является функцией полярных координат и, кроме того, не изменяется по толщине несущих слоев, а по толщине заполнителя распределена по линейному закону. Используя указанные предположения, получены выражения для критической всесторонней сжимающей нагрузки и указан графический метод для определения критических температур.

Исследования по круговым пластинам, составленным из ортотропных слоев, содержатся в [267–269]. В [269] рассмотрены пластины, составленные из различным образом ориентированных слоев и нагруженные равномерным сжатием по краям силами N_x , N_y или линейно-распределенными сжимающими силами, действующими в срединной плоскости пластины лишь в одном направлении (параллельно одной из осей). Выражения для критических усилий получены методом Бубнова; числовых расчетов не приводится.

В [266, 268] изучено осесимметричное выпучивание круговых пластин, составленных из цилиндрически ортотропных слоев, квазиоднородных пластин, т. е. таких, у которых упругие статические моменты относительно нейтральной плоскости равны нулю. Для защемленных по обоим контурам трехслойных пластин с пропорциональными матрицами характеристик материалов при помощи точного решения получены многочисленные результаты. В функциях Бесселя построены решения ряда задач температурного выпучивания. Исследовано изменение собственных значений для трехслойных пластин, сжатых в радиальном направлении, от двух параметров анизотропии и от чередования слоев двух типов при жестком защемлении или свободном опирании границы.

Все эти исследования, относящиеся к слоистым пластинам³, проведены в основном в предположении об осесимметричных формах выпучивания, причем чаще всего для сплошных круговых пластин, и числовые результаты в них почти всегда отсутствуют. Не проведены такие актуальные исследования, как изучение влияния упругости опор на величину критической сжимающей нагрузки. Не изучено влияние диафрагм, связывающих несущие слои трехслойной круговой пластины. Отсутствуют числовые оценки вклада жесткости заполнителя и параметра, характеризующего изгибную жесткость несущих слоев, в то время как эти параметры являются основными характеристиками трехслойных конструкций.

Недостаточно исследованы кольцевые круговые трехслойные пластины. Здесь важны размеры отверстия, с которыми в прямой связи находятся формы выпучивания, соответствующие наименьшим критическим нагрузкам. Поэтому, как и для однородных пластин, необходимо изучать и низшую и более высокие формы равновесия трехслойных колец.

Интересно рассмотреть устойчивость трехслойных круговых пластин в различных стационарных температурных полях, а также устойчивость пластин под действием касательных усилий на контуре. В связи с широким распространением трехслойных конструкций решения указанных задач найдут применение в инженерной практике, а также внесут свой вклад в теорию пластин и оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексин Л. Г. Исследование устойчивости круглых пластин, нагруженных сосредоточенными силами.— Изв. вузов. Машиностроение, 1970, № 8, с. 19.
2. Алексин Л. Г. Экспериментальное исследование устойчивости круглых пластин при действии сосредоточенных сил.— Изв. вузов. Машиностроение, 1970, № 10, с. 8.
3. Алексин Л. Г. Устойчивость кольцевой пластины при действии локальных контурных касательных усилий.— IV Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. Харьковск. ин-т инж. коммун. стр-ва, 1972, с. 54.
4. Алексин Л. Г. Устойчивость неравномерно нагретой круглой пластины.— Изв. вузов. Машиностроение, 1973, № 2, с. 16.
5. Алексин Л. Г. Устойчивость кольцевой пластины типа прорезной пазовой фрезы.— Изв. вузов. Машиностроение, 1973, № 3, с. 5.

³ Литературу для трехслойных пластин см. [247–269].

6. *Алексин Л. Г.* Исследование устойчивости кольцевых пластин при действии контурных касательных усилий.— Тр. МВТУ, 1975 [1976], № 206, с. 52.
7. *Амандосов А. А., Секеев К.* Устойчивость круглой пластинки при всестороннем сжатии с точки зрения математической теории упругости.— В кн.: Материалы I научно-теорет. конф. молодых математиков и механиков. Алма-Ата: Изд-во Казахск. ун-та, 1969, с. 14.
8. *Амандосов А. А., Секеев К.* Об устойчивости круглой пластинки при всестороннем сжатии.— V Казахстанск. межвуз. научн. конф. по матем. и механ.: Тез. докл. Алма-Ата: Изд-во Казахск. ун-та, 1974, с. 87.
9. *Анисимов А. Н.* Устойчивость эллиптических пластинок, подверженных равномерному сжатию вдоль большой полуоси.— В кн.: Строительная механика и строительные конструкции. Горьковск. инж.-строит. ин-т, 1972, с. 9.
10. *Анисимов А. Н., Крамаева И. В., Паутов А. Н.* Исследование устойчивости равномерно сжатых эллиптических и прямоугольных пластин методом конечного элемента.— Тр. кафедры сопротивления материалов и теории упругости Горьковск. инж.-строит. ин-та, 1974, вып. 70, с. 5.
11. *Балабух Л. И., Шаповалов Л. А.* Некоторые задачи устойчивости круглых пластин при неоднородном напряженном состоянии.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 5, с. 60.
12. *Бареева Г. Н., Лизарев А. Д.* Неосесимметричные формы потери устойчивости кольцевых пластин при неоднородном поле напряжений.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 6, с. 103.
13. *Бареева Г. Н., Лизарев А. Д.* Об устойчивости кольцевой пластины при действии радиальных растягивающих сил.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 2, с. 126.
14. *Бареева Г. Н.* Устойчивость кольцевых пластин при однородном и неоднородном полях напряжений: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Свердловск: Свердловск. ун-т, 1967. 117 с.
15. *Бареева Г. Н.* Устойчивость кольцевых пластин при неоднородном поле напряжений.— Матем. зап. Уральск. ун-та, 1968, т. 6, тетр. № 2, с. 3.
16. *Ворога Ф. П., Каюк Я. Ф., Шаталов В. Г.* Несимметрична вграта стійкості кільцевих пластин.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 10, с. 912, 958.
17. *Бурмистров Е. Ф., Маслов Н. М.* Устойчивость круглых пластин переменной толщины.— Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 11, с. 121.
18. *Венцовский Б. К.* Приближенный способ расчета круглых пластин и дисков, изгибаемых в поле радиальных сил.— Тр. Моск. ин-та хим. машиностр., 1971, вып. 38, с. 135.
19. *Газизов В. Г.* К вопросу об устойчивости кольцевой пластины.— Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1958, вып. 12, с. 155.
20. *Газизов В. Г.* К вопросу об устойчивости упругого равновесия кольцевых пластин: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: Ин-т механики АН СССР, 1959. 16 с.
21. *Газизов В. Г.* Метод Бубнова — Галеркина и оценка точности в одной из задач устойчивости пластин.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 6, с. 168.
22. *Ганиев Н. С.* Изгиб и устойчивость круглой пластинки переменной толщины.— Исследования по теории пластин и оболочек. Сб. статей. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965, вып. 3, с. 322.
23. *Горгадзе А. Я., Шелия Г. А.* Вторичная потеря устойчивости упругой кольцевой пластинки.— Тр. Груз. политехн. ин-та. Кутаиси, 1975, № 3 (176), с. 249.
24. *Григолюк Э. И.* О посадке диска на жесткий вал.— Вестн. инж. и техн., 1948, № 5, с. 190.
25. *Григолюк Э. И.* Устойчивость круглых кольцевых пластин.— Инж. сб., 1949, т. 5, вып. 2, с. 83.
26. *Григолюк Э. И.* Некоторые задачи устойчивости круглых пластин при неравномерном нагреве.— Инж. сб., 1950, т. 6, с. 73.
27. *Григолюк Э. И.* Приближенное решение задачи об устойчивости кольца при кручении.— ПММ, 1950, т. 14, вып. 1, с. 99.
28. *Гришев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация круглых пластин в задачах устойчивости.— Строительная механика и расчет сооружений, 1977, № 2, с. 16.
29. *Грызун Т. Н.* Устойчивость кольцевой пластинки под действием сдвига.— Тр. Уфимск. авиац. ин-та, 1967, вып. 7, с. 65.
30. *Гуркин Г. С.* Потеря устойчивости плоской формы равновесия пильного диска при действии температурных напряжений.— Изв. вузов. Лесной ж., 1959, № 1, с. 112.
31. *Гуркин Г. С.* Устойчивость плоской формы равновесия круглых пил при совместном действии температурных напряжений, напряжений от сил инерции, сил резания и проковки.— Тр. Поволжск. лесотехн. ин-та. Йошкар-Ола, 1963, № 56, вып. 1, с. 3.
32. *Дилник А. Н.* Об устойчивости сжатой круглой пластинки.— Изв. Киевск. политехн. ин-та. Отдел механ. и инж., 1914, кн. 1, с. 53.

33. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 103.
34. Динник А. Н. Устойчивость сжатой круглой пластинки.— Избр. тр. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1955, с. 62.
35. Еводкимов А. Е. К вопросу об устойчивости эллиптической пластинки.— Изв. вузов. Машиностроение, 1961, № 2, с. 59.
36. Еводкимов А. Е. К вопросу об устойчивости кольцевых пластин.— Вестн. Харьковск. политехн. ин-та, 1965, № 2 (50), с. 38.
37. Каюк Я. Ф., Богова Ф. П., Шагалов В. И. Об устойчивости кольцевых пластин под действием сжимающих усилий переменной интенсивности.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 3, с. 235.
38. Киреева Г. В. Выпучивание круглой радиально сжатой пластинки.— Прикл. механика, 1969, т. 5, вып. 6, с. 86.
39. Киреева Г. В. О зависимости критических нагрузок и параметров от формы упругого потенциала.— Технология машиностроения. Сб. статей. Тула: Изд-во Тульск. политехн. ин-та, 1973, вып. 28, с. 62.
40. Киреева Г. В., Толоконников Л. А. О зависимости критических нагрузок и параметров от выбора упругого потенциала.— IV Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. Харьковск. ин-т инж. коммун. стр-ва, 1972, с. 24.
41. Кичаев Ю. П. Устойчивость круглой пластинки на упругом основании.— Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1964, № 11, с. 68.
42. Ковалев В. М. Об устойчивости круглых кольцевых пластинок.— Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. наук, 1971, № 5, с. 60.
43. Корбут Б. О. Про стійкість круглої пластини на пружній основі.— Прикл. механіка, 1964, т. 10, вып. 4, с. 443.
44. Корнеев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 458 с.
45. Кузнецов Е. В., Шалашилин В. И. Собственные колебания и устойчивость круглых пластин при осесимметричном нагреве.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 147.
46. Ланге А. Б. К расчету на устойчивость круглой пластинки, упругозащемленной по контуру, нагруженной радиальными сжимающими силами.— Холодильная техника и технологии. Сб. статей. Киев: Техника, 1973, вып. 16, с. 19.
47. Лизарев А. Д., Бареева Г. Н. Устойчивость упругозащемленной кольцевой пластины при неоднородном поле напряжений.— Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 3, с. 483.
48. Лизарев А. Д., Бареева Г. Н. Устойчивость кольцевой пластины с малым отверстием.— Прикл. механика, 1966, т. 2, вып. 6, с. 28.
49. Лизарев А. Д., Бареева Г. Н. Об устойчивости диска, посаженного на вал.— Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. Казанск. политехн. ин-т, 1967, с. 61.
50. Лизарев А. Д., Бареева Г. Н. Решение на ЭЦВМ некоторых задач о колебаниях и устойчивости кольцевых пластин.— В кн.: Материалы IV Всес. конф. по применению математических машин в строительной механике. Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967, с. 253.
51. Лизарев А. Д., Бареева Г. Н. Устойчивость упругозащемленных кольцевых пластин.— Расчеты на прочность. Сб. статей. М.: Машиностроение, 1968, вып. 13, с. 181.
52. Лизарев А. Д., Бареева Г. Н. Коэффициент влияния кольцевых пластин.— Сопротивление материалов и теория сооружений. Сб. статей. Киев: Будівельник, 1969, вып. 9, с. 134.
53. Макушин В. М. Критические значения интенсивности радиальных сжимающих сил для круглых тонких пластин.— Расчеты на прочность. Сб. статей. М.: Машгиз, 1959, вып. 4, с. 270.
54. Макушин В. М. Об одном случае устойчивости сжатой кольцевой пластины.— Расчеты на прочность. Сб. статей. М.: Машгиз, 1960, вып. 5, с. 236.
55. Макушин В. М. Некоторые случаи устойчивости сжатой кольцевой пластины.— Расчеты на прочность. Сб. статей. М.: Машгиз, 1960, вып. 6, с. 171.
56. Морозов Н. Ф. Качественное исследование круглой симметрично сжимаемой пластинки при большой краевой нагрузке (доказательство появления гофра).— Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6, с. 1318.
57. Папкович П. Ф., Солодилова Л. Г. Об устойчивости неплоской формы деформации плоского сжатого кольца, свободно опертого на внешнем контуре.— Тр. н.-и. ин-та военного кораблестроения. Ленинград, 1935, № 4, с. 29.
58. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Ч. 2. Л.: Судпромгиз, 1941, с. 942.
59. Петров Ю. П. Расчет на устойчивость дискретным методом круглых сплошных и кольцеобразных пластин с однородными и неоднородными граничными усло-

- виями.— Самолетостроение и техника воздушного флота. Сб. статей. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1965, вып. 4, с. 39.
60. *Попков В. Г.* Об устойчивости круглых пластинок при нагреве.— Тр. ин-та строит. механ. АН УССР. Киев, 1949, № 11, с. 158.
 61. *Ремнев Ю. И.* Об устойчивости круглой пластины при облучении.— Научн. докл. высш. школы. Сер. физ.-матем. наук, 1959, № 3, с. 145.
 62. *Ремнев Ю. И.* Устойчивость круглой пластины при объемном расширении.— Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 11, с. 124.
 63. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955, с. 468.
 64. *Роголевич В. В.* Устойчивость радиально-сжатых круглых пластин переменной толщины.— В кн.: Некоторые вопросы теории пластин и оболочек. Материалы конф. Казанск. физ.-техн. ин-та, 1967, с. 63.
 65. *Роголевич В. В.* Устойчивость и закритическая деформация круглых пластин переменной толщины.— Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1968, с. 180.
 66. *Саченков А. В.* К расчету на устойчивость плоских пластин.— Изв. вузов. Авиац. техника, 1963, № 2, с. 44.
 67. *Саченков А. В.* Об устойчивости кольцевых пластин и пологой сферической оболочки при сдвиге.— Исследования по теории пластин и оболочек. Сб. статей. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965, вып. 3, с. 35.
 68. *Седава Е. М.* Устойчивость бесконечной пластины, загруженной равномерно по круговому контуру.— Механика деформируемого твердого тела. Сб. статей. Куйбышев: Изд-во Куйбышевск. ун-та, 1975, вып. 1, с. 93.
 69. *Седава Е. М.* Растяжение бесконечной пластины с отверстием.— Изв. Воронежск. пед. ин-та, 1976, № 189, с. 46.
 70. *Соколов П. А.* Устойчивость плоского кругового кольца, нагруженного по краям касательными усилиями.— ПММ, 1939, т. 3, вып. 1, с. 31.
 71. *Срубщик Л. С.* Об устойчивости выпущенной формы равновесия сильно сжатой упругой круглой пластинки.— В кн.: Теория функций. Дифференциальные уравнения и их приложения. Элиста: Калмыцк. ун-т, 1976, с. 165.
 72. *Тагиев И. Г., Таги-Заде А. Г.* О нахождении критической силы равномерно сжатой по контуру круглой пластинки переменной толщины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 179.
 73. *Толоконников Л. А.* К вопросу об устойчивости круглых пластин, сжатых равномерно распределенным давлением по контуру.— Уч. зап. Ростовск. ун-та, Тр. физ.-матем. фак-та, 1953, т. 18, вып. 3, с. 71.
 74. *Толоконников Л. А., Киреева Г. Б.* О выборе аналитического выражения потенциала напряжений.— Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 8, с. 118.
 75. *Фельдман А. А.* Влияние пружености закрепления краю на стійкість стиснутої пластинки.— Доп. АН УРСР, 1949, № 4, с. 34.
 76. *Фельдман А. А.* Устойчивость кольцевой пластинки со свободным внутренним и зажатым внешним краями при равномерном внешнем давлении.— Тр. ин-та строит. механ. АН УССР. Киев, 1951, № 15, с. 40.
 77. *Фельдман А. А.* Метод сеток в применении к одной задаче об устойчивости кольцевых пластинок.— В кн.: Исследования по вопросам устойчивости и прочности. Киев: Изд-во АН УССР, 1956, с. 128.
 78. *Фельдман М. Р.* Стійкість кільцевої пластинки.— Прикл. механіка, 1955, т. 1, вип. 4, с. 449.
 79. *Федоров В. А.* Термоустойчивость упругоупругоупругих кольцевых пластин переменной жесткости.— Изв. вузов. Авиац. техника, 1976, № 4, с. 127.
 80. *Федоров В. А.* Исследование термоустойчивости закритического поведения и нелинейного изгиба густо перфорированных кольцевых пластин переменной жесткости. Аннот. докл. Семинары Моск. авиац. ин-та.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5, с. 197.
 81. *Харитончик А. Е.* К исследованию неосесимметричных форм потери устойчивости кольцевых пластин при осесимметричном нагреве.— Изв. вузов. Машиностроение, 1969, № 5, с. 44.
 82. *Хачатрян А. А.* Устойчивость круглой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру.— Вес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. М.: Госстройиздат, 1963, с. 61.
 83. *Хачатрян А. А.* Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1966, т. 19, № 6, с. 9.
 84. *Чиков Е. А.* Об устойчивости равновесия эллиптической пластинки.— Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1974, № 105, с. 23.
 85. *Янушин Я. К., Хасдан С. М.* Об устойчивости и вибрации дисков круглых пил при пилении.— Деревообработ. пром-сть, 1957, № 8, с. 11.
 86. *Ясин Э. М., Березин В. Л., Ращепкин К. Е.* Устойчивость пластинки, находящейся

- ся под действием поперечной нагрузки.— Проектирование, строительство и эксплуатация магистральных нефтепроводов и нефтебаз. Сб. статей. Уфимск. нефтяной ин-т, 1968, вып. 2, с. 292.
87. *Bartlett C. C.* The vibration and buckling of a circular plate clamped on part of its boundary and simply supported on the remainder.— *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1963, v. 16, No. 4, p. 431.
 88. *Bijlaard P. P.* Some contributions to the theory of elastic and plastic stability.— *Publ. Internat. Assoc. Bridge and Struct. Engng, Zürich*, 1947, v. 8, p. 17.
 89. *Bogdanoff J. L., Goldberg J. E., Helms H. E.* Lateral buckling of rimmed rotating discs.— In: *Proc. 3rd U. S. National Congress Appl. Mech. Providence, Rhode Island, New York: ASME*, 1958, p. 253.
 90. *Bryan G. H.* On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane.— *Proc. London Math. Soc.*, 1891, v. 22, p. 54.
 91. *Buckens F.* Stabilité d'une plaque mince annulaire sollicitée sur ses bords intérieur et extérieur.— *Ann. Soc. scient. Bruxelles. Sér. I*, 1960, v. 74, No. 2, p. 120.
 92. *Casacci S.* Calcul à la flexion des plaques et des coques de révolution soumises à des champs de forces dépendant des déplacements. *Fondations élastiques. Vibrations. Flambage. Thèse doct. Sci. Fac. Sci. Univ. Grenoble*, 1966. *Gap, s. a.*, 176 p.
 93. *Cheo L. S.* Wrinkling of elastic plates. *Doct. diss. New York: Univ., Sci. Engng and Sci.*, 1970. 94 p. (*Diss. Abstrs Internat.* 1971, B. 32, No. 2, p. 1066).
 94. *Chen Li-Chieh.* The buckling of a prestressed circular plate.— *Quart. Appl. Math.*, 1972, v. 30, No. 2, p. 157.
 95. *Choudhuri Snehansu K. Roy.* A note on quasi-static thermal deflection of a thin clamped circular plate due to ramp-type heating of a concentric circular region of the upper face.— *J. Franklin Inst.*, 1973, v. 296, No. 3, p. 213.
 96. *Collatz L.* *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen.* Leipzig: *Akad. Verlag*, 1949, S. 232, 257.
 97. *Conn J. A.* Some buckling and boundary layer problems of circular plates. *Doct. diss. New York Univ.*, 1964. 72 p.
 98. *Cyr W. W. St.*, II. Vibration and stability of circular plates subjected to concentrated in plane forces *Doct. diss. Kansas: State Univ.*, 1965. 73 p. (*Diss. Abstrs*, 1965, v. 26B, No. 1, p. 289).
 99. *Das A.* Buckling of a heated circular plate of variable thickness.— *Appl. Phys. Quart.*, 1968, v. 9, No. 4, p. 95.
 100. *Dean W. R.* The elastic stability of an annular plate.— *Proc. Roy. Soc. London A*, 1924, v. 106, No. 737, p. 268.
 101. *Durban D.* Instability of an elastic circular plate subjected to nonuniform loads.— *AIAA Journal*, 1977, v. 15, No. 3, p. 360.
 102. *Egger H.* Knickung der Kreisplatte und Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke.— *Ingr.-Arch.*, 1941, B. 12, H. 3, S. 190.
 103. *Eschenauer H.* Thermisches Beulen ebener Flächentragwerke.— *Z. Flugwiss*, 1969, B. 17, H. 10, S. 338.
 104. *Eschenauer H.* Theoretische Grundlagen zur Berechnung thermisch belasteter Flächentragwerke.— *Techn. Mitt. Krupp Forschungsber.*, 1974, B. 32, H. 1, S. 1.
 105. *Eposito R.* Sull'instabilità delle piastre anulari sottili uniformemente premute ai bordi.— *Ricerca*, 1968, p. 48.
 106. *Feder M.* Axisymmetric buckling of an annular plate. *Astronaut. Res.*, 1971. Dordrecht—Boston, 1973, p. 535.
 107. *Federhofer K.* Knickung der Kreisplatte und Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke.— *Ingr.-Arch.*, 1940, B. 11, H. 2, S. 224.
 108. *Federhofer K., Egger H.* Knickung der auf Scherung beanspruchten Kreisringplatte mit veränderlicher Dicke.— *Ingr.-Arch.*, 1943, B. 14, H. 3, S. 155.
 109. *Fischer U.* Die Beulung von Kreisplatten konstanten Dicke unter der Wirkung nicht-rotationssymmetrischer radialer Randkräfte.— *Wiss. Z. Techn. Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg*, 1965, B. 9, H. 1, S. 31.
 110. *Fischer U.* Untersuchung der elastischen Beulung von Kreisringplatten unter der Wirkung rotationssymmetrischer Randkräfte.— *Wiss. Z. Techn. Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg*, 1965, B. 9, H. 1, S. 7.
 111. *Furray M.* How to determine thermal buckling and postbuckling of circular bulkheads.— *Mach. Design*, 1964, v. 36, No. 6, p. 201.
 112. *Frederick D.* Some problems in the buckling of thick plates.— In: *Development in Theoretical and Applied Mechanics. V. 1.* New York: *Plenum. Press*, 1963, p. 152.
 113. *Gajewski A.* Pewne rozwiązania ścisłe problemu stateczności płyt o zmiennej sztywności.— *Arch. inż. ładow*, 1965, v. 11, No. 3, p. 443.
 114. *Gajewski A., Zyczkowski M.* Calculation of elastic stability of circular plates with variable thickness by an inverse method.— *Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn.*, 1966, v. 14, No. 5, p. 437.

115. *Gajewski A.* Certain solutions of stability of plates with variable rigidity.— Bull. Acad. polon. sci. Cl. IV, 1966, v. 14, No. 4, p. 349.
116. *Geckeler J. W.* Plastisches knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen.— Z. angew. Math. und Mech., 1928, B. 8, H. 5, S. 341.
117. *Greimel R.* Der einfluss der Schubverzerrungen auf den Beulwert einer Kreisplatte.— Z. angew. Math. und Mech., 1975, B. 55, H. 12, S. 766.
118. *Henshell R. D., Walters D., Warburton G. B.* A new family of curvilinear plate bending elements for vibration and stability.— J. Sound and Vibrat., 1972, v. 20, No. 3, p. 381.
119. *Hirata T., Watanabe M., Miyagawa M.* Initiation of elastic instability of the laterally loaded circular plates.— Bull. JSME, 1976, v. 19, No. 138, p. 1435.
120. *Hirata T., Watanabe M., Miyagawa M.* Estimation of initiation of elastic instability of the laterally loaded circular plates.— Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1976, v. 42, No. 356, p. 1061. Discuss., p. 1068.
121. *Ieremia M.* Voalarea elastica a placilor plane, decupate din coroane circulare.— Constructii, 1974, v. 23, No. 7, p. 25.
122. *Ieremia M.* Elastic buckling of plane plates cut out of annular crowns.— Bul. sti. Inst. constr. Bucuresti, 1973, v. 16, No. 1, p. 17.
123. *Johnson G., Pilkey W.* Lumped parameter circular plate stability analysis.— J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1976, v. 102, No. 5, p. 1135.
124. *Kerr A. D.* On the instability of circular plates.— J. Aerospace Sci., 1962, v. 29, No. 4, p. 486.
125. *Kline L. V., Hancock J. O.* Buckling of circular plate on elastic foundation.— Trans. ASME. Ser. B. J. Engng Industry, 1965, v. 87, No. 3, p. 323.
126. *Kopáková M., Jira J.* Analysis of a plate in the form of an annular sector under the action of in-plane forces.— Acta techn. ČSAV, 1978, v. 23, No. 1, p. 51.
127. *Kujawski J.* Wplyw odkształceń postaciowych na stateczność płyt kołowych.— Inż-ia i budown, 1975, v. 32, No. 3, p. 125.
128. *Lehnhoff T. F., Lin A.-T.* Thermal stresses in circular plates including the influence of transverse shear.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, v. 39, No. 4, p. 1147.
129. *Lokchine M. A.* Sur la stabilité d'une plaque renfermée entre deux cercles concentriques.— C. r. Acad. Sci., 1929, v. 189, No. 7, p. 316.
130. *Lovass-Nagy V.* Soját síkjában nyomott körlemezek kihajlásáról.— Alkalmazott Mat. Intéz. Közl., 1952, No. 1, p. 23.
131. *Majumdar S.* Buckling of a thin annular plate under uniform compression.— AIAA Journal, 1971, v. 9, No. 9, p. 1701.
132. *Mansfield E. H.* On the buckling of an annular plate.— Quart J. Mech. and Appl. Math., 1960, v. 13, No. 1, p. 16.
133. *Mansfield E. H.* Bending, buckling and curling of a heated thin plate.— Proc. Roy. Soc. A, 1962, v. 268, No. 1334, p. 316.
134. *Mansfield E. H.* Thermal buckling of a circular plate.— J. Roy. Aeronaut. Soc., 1967, v. 71, No. 683, p. 798.
135. *McKenzie K. I.* The buckling of a circular plate with a concentric circular hot-spot.— J. Roy. Aeronaut. Soc., 1960, v. 64, No. 590, p. 105.
136. *Meissner E.* Über das Knicken kreisringförmigen Scheiben. Schweiz.— Bauzeitung, 1933, B. 101, H. 8, S. 87.
137. *Migliacci A.* Lastre e cassettonati di forma anulare, caricati da sistemi radialmente simmetrici di distorsioni e comunque vincolati.— Tecn. ital., 1966, v. 31, No. 3, p. 133.
138. *Mossakowski J.* Buckling of a circular plate due to a concentrated heat source.— Arch. mech. stozowanej, 1964, v. 16, No. 4, p. 1023.
139. *Mostaghel N., Tadjbakhsh I.* Buckling of rotating rods and plates.— Internat. J. Mech. Sci., 1973, v. 15, No. 6, p. 429.
140. *Nadai A.* Über das Ausbeulen von kreisförmigen Platten.— Z. Vereines Deutsch. Ingr., 1915, B. 59, H. 9, S. 167.
141. *Nadai A.* Über das Ausbeulen von kreisförmigen Platten.— Z. Vereines Deutsch. Ingr., 1915, B. 59, H. 11, S. 221.
142. *Nomachi S.* On the buckling of annular plates under the action of shearing stresses due to the tangential tractions along its clamped edges.— Proc. 5th Japan National Congress Appl. Mech. Tokyo, 1956, p. 157.
143. *Nowacki W., Olesiak Z.* Płyta kołowa na obwodzie częściowo utwierdzona zupełnie i częściowo swobodnie podparta.— Arch. mech. stozowanej, 1956, v. 8, No. 2, p. 233. (Рус. перев.: Бюл. Польск. Акад. наук. Отд. 4, 1956, т. 4, вып. 4, с. 259.)
144. *Olsson G.* Über axialsymmetrische Knickung dünner Kreisringplatten.— Ingr.-Arch., 1937, B. 8, H. 6, S. 449.
145. *Olsson G.* Knickung der Kreisringplatte von quadratisch veränderlicher Steifigkeit.— Ingr.-Arch., 1938, B. 9, H. 3, S. 205.

146. *Olsson G.* Über die Knickung der Kreisringplatte von veränderlicher Dicke.— *Ingr.-Arch.*, 1941, B. 12, H. 2, S. 123.
147. *Oran C.* Complementary energy method for buckling of plates.— *J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1968, v. 94, No. 2, p. 621.
148. *Oran C.* Upper bounds in complementary energy method.— *J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1971, v. 97, No. 4, p. 1093.
149. *Ozkul A. G., Chen Y.* The buckling of a simply supported elliptic plate under uniform compression.— *Comp. and Structures*, 1977, v. 7, No. 2, p. 327.
150. *Pellett D. A., Costello R. G., Brock J. E.* Buckling of a tension panel containing a circular hole.— *AIAA Journal*, 1968, v. 6, No. 10, p. 2012.
151. *Pettersson O.* Circular plates subjected to radially symmetrical transverse load combined with uniform compression or tension in the plane of the plate.— *Acta Polytechn. Ser. Mech. Engng*, 1954, v. 3, No. 1. Stockholm, Esselte aktiebolag, 1954.
152. *Pettersson O.* Plates subjected to compression or tension and to simultaneous transverse load.— *Ingenjörsvetenskaps Akademiens tidskrift*, 1954, v. 25, No. 2, p. 78.
153. *Pezzoli G.* Le lastre circolari presso-inflesse.— *G. genio civile*, 1957, v. 95, No. 3, p. 208.
154. *Popelar C. H.* Assured upper bounds via complementary energy.— *J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1974, v. 100, No. 4, p. 623.
155. *Pytel E., Waszczyszyn Z.* Numeryczna analiza symetrycznego wybożenia sprężystej płyty pierścieniowej na tle istniejących rozwiązań.— *Czasop. techn.*, 1972, v. 76, No. 4, p. 36.
156. *Ramaiah G. K., Vijayakumar K.* Buckling of annular plates under uniform compressive loads.— *Mech. Res. Commun.*, 1975, v. 2, No. 1, p. 19.
157. *Ramaiah G. K., Vijayakumar K.* Elastic stability of annular plates under uniform compressive loads. *CANCAM75.— Proc. 5th Canadian Congr. Appl. Mech.*, Fredericton N. B. 1975, Fredericton, 1975, p. 175.
158. *Ramaiah G. K., Vijayakumar K.* Elastic stability of annular plates under uniform compressive forces along the outer edge.— *AIAA Journal*, 1975, v. 13, No. 6, p. 832.
159. *Ramaiah G. K., Vijayakumar K.* Timoshenko's conjecture on buckling of annular plates under uniform external pressure.— *AIAA Journal*, 1976, v. 14, No. 10, p. 1480.
160. *Rao C. V., Joga, Vijayakumar K.* On admissible functions for flexural vibration and buckling of annular plates.— *J. Aeronaut. Soc. India*, 1963, v. 15, No. 1, p. 1.
161. *Reissmann H.* Bending and buckling of an elastically restrained circular plate.— *J. Appl. Mech.*, 1952, v. 19, No. 2, p. 167.
162. *Rosen A., Libai A.* Stability and behavior of an annular plate under uniform compression.— *Exptl Mech.*, 1976, v. 16, No. 12, p. 461.
163. *Rózsa M.* Stability analysis of thin annular plates compressed along the outer or inner edge by uniformly distributed radial forces.— *Acta techn. Acad. scient. hung.*, 1966, v. 53, No. 3—4, p. 359.
164. *Rózsa M.* Stability analysis of a circular plate submitted to two compressive forces acting along a diameter.— *Acta techn. Acad. scient. hung.*, 1966, v. 55, No. 1—2, p. 153.
165. *Rózsa M.* Atmérőjének két végpontján nyomott szabad peremű körlemez stabilitásvizsgálata.— *Magyar. tud. akad. Müsz. tud. oszt. közl.*, 1967, v. 38, No. 1—2, p. 49.
166. *Sarkar S. K.* Buckling of a heated circular plate.— *Indian J. Mech. and Math.*, 1967, v. 5, No. 1, p. 39.
167. *Sarkar S. K.* Quasi-static thermal deflection in a solid circular plate in the axisymmetric case.— *Aplikace mat.*, 1968, v. 13, No. 4, p. 291.
168. *Sato K.* Buckling of an elliptical plate with simply supported edge under uniform compression.— *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1976, v. 43, No. 3, p. 455.
169. *Schubert A.* Die Beullast dünner Kreisringplatten, die am Aussen- und Innenrand gleichmässigen Druckerfahren.— *Z. angew. Math. und Mech.*, 1947, B. 25—27, H. 4, S. 123.
170. *Shibaoka Y.* On the buckling of an elliptic plate with clamped edge. Pt I.— *J. Phys. Soc. Japan*, 1956, v. 11, No. 10, p. 1088; Pt II, 1957, v. 12, No. 5, p. 529.
171. *Skerlj M.* Die allgemeine Lösung des achsensymmetrischen Stabilitätsproblems einer Kreisringscheibe.— *Strojniski Vestn.*, 1968, B. 14, Nr 3, S. 1.
172. *Striz B.* Stabilita rotacne soumerné tenké desky s tepelným pnutím.— *Strojnícky casop.*, 1964, v. 15, No. 1, p. 38.
173. *Tang S.* Elastic stability of thick circular plates under three-dimensional states of stress.— *Acta mech.*, 1967, v. 4, No. 4, p. 382.
174. *Tang S.* Elastic stability of a circular plate under unidirectional compression.— *J. Spacecraft and Rockets*, 1969, v. 6, No. 1, p. 78.
175. *Trombski M.* Stateczność i praca po utracie stateczności płyty pierścieniowej w ustalonym polu temperatur.— *Arch. budowy maszyn*, 1971, v. 18, No. 2, p. 325.
176. *Vanšlager F. E.* The lateral buckling of curved beams and circular ring sector pla-

- tes subjected to pure bending: Doct. diss. San Diego: Univ. Calif., 1968. 101 p. (Diss. Abstrs, 1969, v. B29, No. 11, p. 4212.)
177. *Waszczyszyn Z.* Obciążenie krytyczne spężystej płyty pierścieniowej przy niesymetrycznych formach wybożenia.— Arch. budowy maszyn, 1976, v. 23, No. 1, p. 79.
 178. *Way S.* Private communication to Timoshenko.— In: Theory of plates and shells by S. Timoshenko. New York—London: McGraw—Hill Book Company, Inc., 1940, p. 324.
 179. *Webber J. P. H., Houghton D. S.* Thermal buckling of a free circular plate.— C. o. A. Note, 1960, No. 105.
 180. *Westergaard H. H.* On the method of complementary energy.— Trans. Amer. Soc. Civil Engrs, 1942, v. 107, p. 765.
 181. *Willers F. A.* Die Stabilität von Kreisringplatten.— Z. angew. Math. und Mech., 1943, B. 23, H. 5, S. 252.
 182. *Woinowsky-Krieger S.* The stability of a clamped elliptic plate under uniform compression.— J. Appl. Mech., 1937, v. 4, No. 4, p. 177.
 183. *Wolkowisky J. H.* Existence of buckled states of circular plates.— Commun Pure and Appl. Math., 1967, v. 20, No. 3, p. 549.
 184. *Wolkowisky J. H.* Buckling of the circular plate embedded in elastic springs. An application to geophysics.— Commun Pure and Appl. Math., 1969, v. 22, No. 5, p. 639.
 185. *Yamaki N.* Выпучивание круглой пластинки под действием локальной нагрузки.— Mem. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ., 1955, v. 12, No. 115, p. 77.
 186. *Yamaki N.* Устойчивость круглой пластины, сжатой силами, приложенными к участкам контура.— Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 1956, v. 22, No. 115, p. 119.
 187. *Yamaki N.* Buckling of a circular plate under locally distributed forces.— Repts Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ., Japan, 1957, v. 3, p. 13.
 188. *Yamaki N.* Buckling of a thin annular plate under uniform compression.— Paper ASME, 1957, No. A-11, p. 7.
 189. *Yamaki N.* Buckling of a thin annular plate under uniform compression.— J. Appl. Mech., 1958, v. 25, No. 2, p. 267.
 190. *Амирханов И. Г.* К вопросу устойчивости оптимальной круглой пластины из армированного пластика.— Исследования по теории пластин и оболочек. Сб. статей. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1970, вып. 6—7, с. 734.
 191. *Бацикадзе Т. В., Нижарадзе Д. А., Цигишвили А. А.* К вопросу устойчивости сжатых анизотропных пластин криволинейного очертания.— XVIII Респ. науч.-техн. конф.: Тез. докл. Груз. политехн. ин-та и работников производства. Тбилиси, 1974, с. 194.
 192. *Бурмистров Е. Ф., Долгополов В. М., Маслов Н. М.* Устойчивость кольцевой ортотропной пластины переменной толщины.— IV Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. Харьковск. ин-т инж. коммун. стр-ва, 1972, с. 55.
 193. *Бурмистров Е. Ф., Долгополов В. М., Маслов Н. М.* Устойчивость кольцевой ортотропной пластины переменной толщины.— Механика деформируемых сред. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1974, вып. 2, с. 29.
 194. *Бурмистров Е. Ф., Маслов Н. М.* Устойчивость круглых кольцевых ортотропных пластинок.— Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1967, вып. 3, с. 144.
 195. *Бурмистров Е. Ф., Маслов Н. М.* Некоторые задачи устойчивости круглых ортотропных пластин переменной толщины при неравномерном нагреве.— Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1970, вып. 5, с. 87.
 196. *Бурмистров Е. Ф., Папкратов Н. Д.* Термоустойчивость круглых конструктивно-ортотропных пластин.— Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1970, вып. 5, с. 139.
 197. *Венцовский Б. К.* Устойчивость круглых и кольцеобразных пластин, подкрепленных кольцевыми ребрами.— Расчеты на прочность. Сб. статей. М.: Машгиз, 1959, вып. 4, с. 299.
 198. *Гузь А. Н.* Об устойчивости трехмерных упругих тел.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5, с. 930.
 199. *Долгополов В. М., Соколов С. С.* Устойчивость круглых ортотропных пластин экспоненциального профиля.— Расчет пространственных систем в строительной механике. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1972, с. 63.
 200. *Долгополов В. М.* Устойчивость круглой ортотропной пластинки переменной толщины.— Механика деформируемых сред. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1974, вып. 1, с. 75.
 201. *Ермоленко В. А.* О критерии осесимметричности деформаций осесимметрично нагруженной кольцевой пластинки, подкрепленной радиальными ребрами жестко-

- сти.—Теоретическая механика. Строительная механика. Высшая математика. Сб. статей. Моск. автодор. ин-т, 1969, с. 85.
202. *Зварич М. К., Маргынвич Т. Л.* Анизотропный диск, обжатый изотропным кольцом меньшего радиуса.— Прикл. механика, 1970, т. 6, вып. 5, с. 66.
203. *Каплевацкий И. Д.* Устойчивость подкрепленных кольцевых пластин при неоднородном поле напряжений.— Вестн. Львовск. политехн. ин-та, 1970, № 47, с. 160.
204. *Лизарев А. Д.* Устойчивость кольцевых пластин из полимерных материалов.— IV Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. Харьковск. ин-т инж. коммун. стр-ва, 1972, с. 63.
205. *Лизарев А. Д., Ростанин Н. Б.* Коэффициенты влияния кольцевых пластин с цилиндрической анизотропией.— Сопротивление материалов и теория сооружений. Сб. статей. Киев: Будівельник, 1975, вып. 27, с. 124.
206. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об устойчивости трансверсально-изотропных круглых пластинок.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1966, т. 19, № 2, с. 31.
207. *Назыров Я. З., Сибубаев Ш. М.* Устойчивость круглых пластин с податливым включением.— Докл. АН УзССР, 1976, № 1, с. 10.
208. *Панкратов Н. Д.* Устойчивость круглых конструктивно-ортотропных пластин при неравномерном нагреве.— Научн. тр. Саратовск. политехн. ин-та, 1966, вып. 23, с. 193.
209. *Петоян А. Ш.* Устойчивость круглой трансверсально-изотропной плиты при ее сжатии равномерно распределенной по контуру радиальной нагрузкой.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1966, т. 19, № 3, с. 34.
210. *Поляков В. А., Розе А. В., Хигров В. В.* Осесимметричный изгиб и выпучивание круглых пластин из материалов, армированных волокнами.— Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970, с. 488.
211. *Попович В. Е.* Осесимметричная потеря устойчивости неравномерно нагретой по радиусу кольцевой пластины типа шпангоута.— Изв. вузов. Авиац. техника, 1967, № 2, с. 67.
212. *Попович В. Е.* Устойчивость неравномерно нагретой по радиусу кольцевой подкрепленной пластинки.— Прочность и динамика авиационных двигателей. Сб. статей. М.: Машиностроение, 1969, вып. 5, с. 52.
213. *Розе А. В., Хигров В. В.* Устойчивость кольцевых трансверсально-изотропных пластин, слабо сопротивляющихся сдвигу.— Механика полимеров, 1969, № 5, с. 872.
214. *Флейшман Н. П., Каплевацкий И. Д.* К расчету на устойчивость кольцевой пластины с опорными ребрами жесткости.— Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. Каунасск. политехн. ин-т, 1967, с. 67.
215. *Флейшман Н. П., Каплевацкий И. Д.* Устойчивость кольцевой пластины с опорными ребрами жесткости.— Прикл. механика, 1969, т. 5, вып. 3, с. 56.
216. *Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях круглых трансверсально-изотропных пластинок.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1960, т. 13, № 1, с. 73.
217. *Хигров В. В.* Влияние укладки арматуры на устойчивость круглых, цилиндрически ортотропных пластин, слабо сопротивляющихся сдвигу.— Механика полимеров, 1971, № 2, с. 275.
218. *Amon R., Widera O. E.* Stability of edge-reinforced circular plate.— J. Engng Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1971, v. 97, No. 5, p. 1597.
219. *Bulson P.* The stability of flat plates. London: Chatto, 1970. p. 229.
220. *Cook I. T., Parsons H. W.* The buckling of a reinforced circular plate under uniform radial thrust.— Aeronaut. Quart., 1961, v. 12, No. 4, p. 337.
221. *Frauenthal J. C.* Constrained optimal design of circular plates against buckling.— Div. Engng and Appl. Phys. Harvard University, 1971, Rept SM-50.
222. *Kaplyevatsky Y.* Generalization of Frobenius's method for stability analysis of orthotropic annular plates.— Acta mech., 1975, v. 22, No. 3—4, p. 295.
223. *Kaplyevatsky Y.* Buckling of orthotropic annular plates.— Dept. Mech., Techn. Israel. Inst. Techn., 1974, TDM Rept No. 74-15.
224. *Mossakowski J.* Buckling of circular plates with cylindrical orthotropy.— Arch. mech. strosowanej, 1960, v. 12, No. 5—6, p. 583.
225. *Pandalai K. A. V., Patel S. A.* Buckling of orthotropic circular plates.— J. Roy. Aeronaut. Soc., 1965, v. 69, No. 652, p. 279.
226. *Patel S. A., Broth F. J.* Axi-symmetric buckling of orthotropic circular plates with variable thickness.— J. Roy. Aeronaut. Soc., 1967, v. 71, No. 675, p. 218.
227. *Phillips J. S., Carney J. F.*, III. Stability of an annular plate reinforced with a surrounding edge beam.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, v. 41, No. 2, p. 497.
228. *Phillips J. S., Carney J. F.*, III. Stability of beam-reinforced circular plates.— AIAA Journal, 1975, v. 13, No. 9, p. 1249.
229. *Ramaiah G. K., Vijayakumar K.* Buckling of polar orthotropic annular plates under uniform internal pressure.— AIAA Journal, 1974, v. 12, No. 8, p. 1045.
230. *Roszkowski M.* Stateczność kołowej tarczy ortotropowej obciążonej momentem skrecającym.— Arch. budowy maszyn, 1964, v. 11, No. 4, p. 839.

231. *Simitses G. J., Blackmon C. M.* Buckling of eccentrically stiffened thin circular plates.— *AIAA Journal*, 1969, v. 7, No. 6, p. 1200.
232. *Simitses G. J.* The optimal versus the stiffened circular plate.— *AIAA Paper*, 1973, No. 254, p. 6.
233. *Skerlj M.* Osno simetricni stabilnostni problem knoznega kolobarja z ojacenim notranjim robom.— *Strojn. vestn.*, 1971, B. 17, H. 4—5, S. 1 (нем.), S. 117 (словен.).
234. *Stavsky Y., Friedland S.* Buckling of quasi-heterogeneous orthotropic circular plates.— *Dept. Mech., Techn. Israel. Inst. Techn.*, 1969, TDM Rept No. 69-2.
235. *Strzelczyk A.* Wyboczenie płyt pierścieniowych cylindrycznie ortotropowych.— *Arch. budowy maszyn*, 1975, v. 22, No. 4, p. 437.
236. *Strzelczyk A., Wojciech S.* Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności ortotropowej płyty pierścieniowej.— *Mech. teor. i stosow.*, 1977, v. 15, No. 1, p. 37.
237. *Swamidas A. S. J., Kunukasseril V. X.* Buckling of continuous circular plates.— *J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1973, v. 99, No. 4, p. 835.
238. *Swamidas A. S. J., Kunukasseril V. X.* Buckling of orthotropic circular plates.— *AIAA Journal*, 1973, v. 11, No. 12, p. 1633.
239. *Szilassy I.* Peremén hengeres gyúruvel erositett körgyúrü alakú tárcsa stabilitása.— *Nehézipari műsz. egyet. közl. Sor.* 4, 1977, v. 22, No. 4, p. 225.
240. *Vijaykumar K., Joga Rao C. V.* Buckling of polar orthotropic annular plates.— *Trans. Amer. Soc. Civil Engrs, J. Eng. Mech. Div.*, 1971, v. 97, No. 3, p. 701.
241. *Vijaykumar K., Joga Rao C. V.* Axisymmetric vibration and buckling of polar orthotropic annular plates.— *Aeronaut. Engng Rept.*, Dept. Aeronaut. Engng Indian Inst. Sci., Bangalore, India, 1971, 298 S.
242. *Woinowsky-Krieger S.* Über die Beulsicherheit von Kreisplatten mit Kreiszyklindrischer Aelotropie.— *Ingr-Arch.*, 1958, B. 26, H. 2, S. 129.
243. *Wóźniak Cz., Zieliński St.* Niektóre zagadnienia stateczności kolistych płyt perforowanych.— *Arch. inz. ladow*, 1967, v. 13, No. 1, p. 155.
244. *Uthgenannt E. B., Brand R. S.* Buckling of orthotropic annular plates.— *AIAA Journal*, 1970, v. 8, No. 11, p. 2102.
245. *Uthgenannt E. B.* Thermal buckling of rotating orthotropic annular plates.— *J. Aircraft*, 1971, v. 8, No. 10, p. 841.
246. *Yamasaki T., Kumai T., Goto K.* Antisymmetric buckling of the perforated circular plate under outer edge.— *Technol. Repts Kyushu Univ.*, 1967, v. 40, No. 2, p. 228.
247. *Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М., Прусаков А. П.* Расчет трехслойных панелей. М.: Оборонгиз, 1960, с. 274.
248. *Галимов Н. К.* Осесимметричный изгиб и устойчивость трехслойных круглых пластин с легким наполнителем.— *Прикл. механика*, 1965, т. 1, вып. 1, с. 77.
249. *Газизов Б. Г.* Об устойчивости некоторых многослойных пластин.— *Волжск. матем. сб. Куйбышевск. пед. ин-т*, 1971, вып. 8, с. 68.
250. *Газизов Б. Г., Облезлов Е. В.* Устойчивость трехслойной круглой пластины.— *Волжск. матем. сб. Казанск. пед. ин-т*, 1971, вып. 12, с. 13.
251. *Голоскоков Е. Г., Ольшанский В. П.* Об устойчивости круглой трехслойной пластины с легким наполнителем.— *Динамика и прочность машин. Сб. статей. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та*, 1971, вып. 12, с. 47.
252. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* К расчету трехслойных пластин с жестким наполнителем.— *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*, 1964, № 1, с. 67.
253. *Григолюк Э. И., Корнев В. М.* Обоснование уравнений трехслойных пластин несимметричной структуре с жестким наполнителем.— *Инж. ж. МТТ*, 1966, № 6, с. 89.
254. *Ефремов Е. А.* Устойчивость круглых трехслойных пластин при облучении.— *Респ. конф. молодых ученых по механике твердого деформируемого тела: Тез. докл. Ин-т механики АН УССР*, 1969, с. 40.
255. *Ильгамов Н. А., Муштары Х. М.* О температурной устойчивости трехслойных пластин с защемленными краями.— *Изв. АН СССР. Механика*, 1965, № 3, с. 145.
256. *Карножицкий В. П.* Об устойчивости трехслойных пластин и оболочек.— *V Всес. конф. по теории пластин и оболочек: Аннот. докл. М.: Наука*, 1966, с. 29.
257. *Колесов В. С., Власов Н. М., Процюк Б. В.* Термоупругость многослойных пластин.— *XIV Науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций. Сб. статей, Киев: Наукова думка*, 1977, с. 59.
258. *Магеррамова Л. А.* Устойчивость трехслойных круговых пластин. *Анн. докл. Семинары Моск. авиац. ин-та.*— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1977, № 4, с. 198.
259. *Amato A. J.* Axisymmetric buckling of annular sandwich panels. *Doct. diss. Univ. Fla.*, 1970, 87 p. (*Diss. Abstrs Internat.* 1971, v. B31, No. 11, p. 6658).
260. *Amato A. J., Ebcioğlu I. K.* Axisymmetric buckling of annular sandwich panels.— *AIAA Journal*, 1972, v. 10, No. 10, p. 1351.
261. *Baumann W.* Beitrag zum Durchschlagsproblem kreisförmiger Bimetallplättchen.— *Österr. Ingr-Arch.*, 1960, B. 14, H. 3, S. 161.
262. *Bijlaarä P. P.* On the elastic stability of sandwich plates. Pt I—II.— *Proc. Koninkl nederl. akad. wet. A*, 1947, v. 50, No. 1, p. 79; No. 2, p. 186.

263. *Bijlaard P. P.* Analysis of the elastic and plastic stability of sandwich plates by the method of split rigidities. I—II.—*J. Aeronaut. Sci.*, 1951, v. 18, No. 5, p. 339; No. 12, p. 790. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1952, № 6(16), с. 98.)
264. *Bufler H.* Axilsymmetrisches Ausknicken kreisförmiger Verbundplatten.—*Ingr.-Arch.*, 1965, B. 34, H. 6, S. 385.
265. *Clark L. G.* General small deflection theory of elastic bending and buckling of laminated plates.—*Proc. 4th Midwest. Conf. Solid Mech.*, Austin, Texas, 1959, S. 1, s. a., p. 127.
266. *Elishakoff I., Stavsky V.* Axisymmetric buckling of certain annular composite plates.—*Internat. J. Solids and Structures*, 1975, v. 11, No. 12, p. 1347.
267. *Stavsky V., Friedland S.* Buckling of composite circular plates under radial compression.—*Acta Mech.*, 1971, v. 11, No. 1—2, p. 87.
268. *Stavsky Y.* Thermoelastic stability of laminated orthotropic circular plates.—*Acta Mech.*, 1975, v. 22, No. 1—2, p. 31.
269. *Tang S.* Stability of a laminated anisotropic circular plate.—*J. Spacecraft and Rockets*, 1972, v. 9, No. 2, p. 123.

Москва

Поступила в редакцию
14.VIII.1979