

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ТРЕХСЛОЙНЫХ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ ПЛАСТИН
С КОМБИНИРОВАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

ВЕСТЯК А. В.

Представлен численный метод расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных трапециевидных пластин с жестким заполнителем, воспринимающим поперечный сдвиг. Использовано сочетание метода Фурье с методами наименьших квадратов и граничной коллокации. Исследования основаны на разрешающем уравнении Григолюка — Чулкова. Разработана ФОРТРАН-программа, по которой проведены расчеты симметричных и несимметричных пластин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую трехслойную пластину, имеющую форму несимметричной трапеции в плане (фиг. 1). Ниже будем использовать следующие геометрические параметры трапеции: H — высота пластины, a , b — большее и меньшее основания, α_1 , α_2 — угол наклона правой и левой стороны.

Геометрия элемента трехслойной пластины и обозначения компонентов тензора напряжений представлены на фиг. 2.

Все используемые далее параметры полностью соответствуют работе [1].

Приводимые ниже исследования напряженно-деформированного состояния пластин с жестким заполнителем, воспринимающим поперечный сдвиг, основаны на разрешающем уравнении Григолюка — Чулкова

$$D \left(1 - \frac{\partial h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 \chi(x, y) = q, \quad q = \text{const} \quad (1.1)$$

где q — нормальная к плоскости пластины нагрузка, $\chi(x, y)$ — некоторая вспомогательная функция, связанная с прогибом $w(x, y)$ соотношением

$$w(x, y) = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi(x, y) \quad (1.2)$$

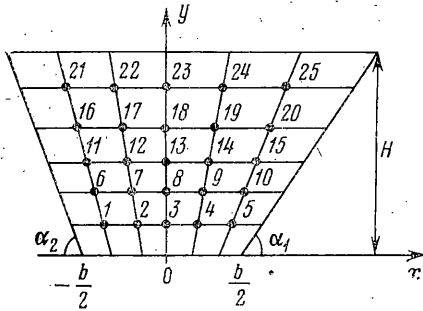
В дальнейшем будем использовать следующие выражения для полных удельных и обобщенных изгибающих моментов [1]:

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(1 - \frac{\partial h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi(x, y) \\ M_y(x, y) &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(1 - \frac{\partial h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi(x, y) \\ M_{xy}(x, y) &= D(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(1 - \frac{\partial h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi(x, y) \\ H_x(x, y) &= -D \gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi(x, y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

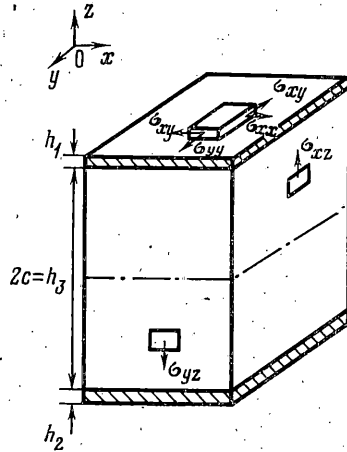
$$H_y(x, y) = -D\gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \chi(x, y)$$

$$H_{xy}(x, y) = D\gamma(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \chi(x, y)$$

где D — изгибная жесткость, ϕ, β — коэффициенты, характеризующие изгибную жесткость несущих слоев и заполнителя, h — толщина пластины, γ — отношение поперечной силы, воспринимаемой заполнителем, к поперечной силе, μ — обобщенный коэффициент Пуассона.



Фиг. 1



Фиг. 2

Будем исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной трапециевидной пластины, у которой параллельные кромки имеют свободное опирание. Тогда граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} w(x, 0) = w(x, H) = 0, \quad M_x(x, 0) = M_x(x, H) = 0 \\ H_y(x, 0) = H_y(x, H) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

На боковых сторонах трапеции рассмотрим два случая опирания: свободно опертый край

$$\begin{aligned} w(x, y) = 0 \\ M_n(x, y) = M_x \cos^2 \theta^\circ + M_y \sin^2 \theta^\circ - M_{xy} \sin 2\theta^\circ = 0 \\ H_n(x, y) = H_x \cos^2 \theta^\circ + H_y \sin^2 \theta^\circ - H_{xy} \sin 2\theta^\circ = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где θ° — угол наклона внешней нормали к боковой стороне; для правой стороны пластины $\theta^\circ = \alpha_1 - \pi/2$, $x = y \operatorname{ctg} \alpha_1 + b/2$, а для левой $\theta^\circ = -\pi/2 - \alpha_2$, $x = -y \operatorname{ctg} \alpha_2 - b/2$;

защемленный край

$$w(x, y) = 0 \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \theta^\circ + \frac{\partial}{\partial y} \sin \theta^\circ \right) w(x, y) = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha_n = -\frac{(1-\phi)h}{\beta\gamma} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \theta^\circ + \left(\frac{\partial}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial}{\partial y^3} \right) \sin \theta^\circ \right] \chi(x, y) = 0$$

где α_n — угол сдвига в заполнителе.

Задача о расчете напряженно-деформированного состояния пластины сведена к нахождению такой вспомогательной функции $\chi(x, y)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению шестого порядка (1.1), граничным условиям (1.4) и условиям (1.5) или (1.6).

2. Представление общего решения. Общее решение линейного дифференциального уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\chi(x, y) = \chi_1(x, y) + \chi_2(y) \quad (2.1)$$

где $\chi_1(x, y)$ — решение однородного дифференциального уравнения

$$(1 - k\nabla^2) \nabla^2 \nabla^2 \chi(x, y) = 0, \quad k = \partial h^2 / \beta \quad (2.2)$$

а $\chi_2(y)$ — решение «балочного» неоднородного уравнения

$$d^4 \chi / dy^4 - k (d^6 \chi / dy^6) = q / D \quad (2.3)$$

описывающего прогиб равномерно нагруженной балки.

Функции $\chi_1(x, y)$ и $\chi_2(y)$, кроме того, должны удовлетворять граничным условиям (1.4). Используя метод Фурье, найдем решения уравнения (2.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.4):

$$\chi_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_1^m \operatorname{ch} \beta_m x + A_2^m \operatorname{sh} \beta_m x + B_1^m \operatorname{ch} \alpha_m x + B_2^m \operatorname{sh} \alpha_m x + C_1^m \alpha_m x \operatorname{ch} \alpha_m x + C_2^m \alpha_m x \operatorname{sh} \alpha_m x) \sin \alpha_m y$$

$$\alpha_m = m\pi / H, \quad \beta_m = \sqrt{m^2 \pi^2 / H^2 + 1/k}$$

где A_i^m, B_i^m, C_i^m ($i=1, 2$) — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\chi_2(y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \frac{q}{24D} y^4 + C_5 \operatorname{ch} \frac{y}{\sqrt{k}} + C_6 \operatorname{sh} \frac{y}{\sqrt{k}}$$

Постоянные C_0, C_1, \dots, C_6 определяются из граничных условий (1.4) на параллельных сторонах пластины. Переходя к безразмерным величинам (при этом под $x, y, b, \chi, w, M_x, M_y, M_{xy}, H_x, H_y, H_{xy}, Q_x, Q_y$ будем понимать величины: $x/H, y/H, b/H, \chi D / (gH^4), wD / (qH^4), M_x D / (qH^2), M_y D / (qH^2), M_{xy} D / (qH^2), H_x D / (\gamma qH^2), H_y D / (\gamma qH^2), H_{xy} D / (\gamma qH^2), Q_x D / (qH^2), Q_y D / (qH^2)$), получим решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.4), в следующем виде:

$$\chi(x, y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + C_4 y^4 + C_5 \operatorname{sh} py + C_6 \operatorname{ch} py + \sum_{m=1}^{\infty} (A_1^m \operatorname{ch} \beta_m x + A_2^m \operatorname{sh} \beta_m x + B_1^m \operatorname{ch} \alpha_m x + B_2^m \operatorname{sh} \alpha_m x + C_1^m \alpha_m x \operatorname{ch} \alpha_m x + C_2^m \alpha_m x \operatorname{sh} \alpha_m x) \sin \alpha_m y \quad (2.5)$$

$$C_0 = k^2, \quad C_1 = 1/24 - 1/2k, \quad C_2 = 1/2k, \quad C_3 = -1/12, \quad C_4 = 1/24, \quad C_5 = k^2 (\operatorname{ch} p - 1) / \operatorname{sh} p$$

$$C_6 = -k^2, \quad p = 1/\sqrt{k}, \quad \alpha_m = m\pi, \quad \beta_m = \sqrt{m^2 \pi^2 + 1/k} \quad (m=1, 2, \dots)$$

3. Преобразование граничных условий. Произвольные постоянные в выражении (1.5) должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить граничным условиям на боковых сторонах трапецевидной пластины.

1. Свободно опертый край. Пусть граничные условия на боковой стороне пластины задаются соотношениями (1.5). Преобразуем их к виду,

удобному для подстановки функции (2.5):

$$w(x, y) = 0 \Rightarrow (1 - k_1 \nabla^2) \chi(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

$$M_n(x, y) = 0 \Rightarrow \left(A_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right) - \\ - k \left[A_1 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + (1 + \mu) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + B_1 \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + C \left(\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x \partial y^3} \right) \right] = 0 \quad (3.2)$$

$$H_n(x, y) = 0 \Rightarrow A_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$A_1 = \cos^2 \theta^\circ + \mu \sin^2 \theta^\circ$$

$$B_1 = \sin^2 \theta^\circ + \mu \cos^2 \theta^\circ, \quad C_1 = (1 - \mu) \sin 2\theta^\circ$$

2. *Защемленный край.* Из граничных условий (1.6) имеем

$$\chi(x, y) - k \left(\frac{\partial^2 \chi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$A_2 \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} = 0, \quad A_2 = \cos \theta^\circ, \quad B_2 = \sin \theta^\circ$$

$$A_2 \left(\frac{\partial^3 \chi(x, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \chi(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right) + B_2 \left(\frac{\partial^3 \chi(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \chi(x, y)}{\partial y^3} \right) = 0$$

Общее решение разрешающего уравнения (1.1), принятое в форме (2.5), содержит произвольные постоянные $A_1^m, A_2^m, B_1^m, B_2^m, C_1^m, C_2^m$ ($m = 1, 2, \dots$), которые выбираются так, чтобы удовлетворились граничные условия на боковых сторонах пластины (3.1) — (3.3) или (3.4).

4. **Вычислительный алгоритм и результаты расчетов.** В выражении (2.5) для функции прогибов $\chi(x, y)$ ограничимся n слагаемыми. Тогда из граничных условий следует найти $6n$ произвольных постоянных $A_1^m, A_2^m, B_1^m, B_2^m, C_1^m, C_2^m$ ($m = 1, 2, \dots, n$). Выберем на боковых сторонах пластины $(n-1)$ точку коллокации в узлах, являющихся корнями полинома Чебышева [2, 3]:

$$y_i = \sin(\pi i / 2n) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.1)$$

Пусть граничные условия удовлетворяются в точках $x_i = y_i \operatorname{ctg} \alpha_1 + b/2$ для правой стороны и $x_i = -y_i \operatorname{ctg} \alpha_2 - b/2$ для левой стороны пластины. Тогда получим $6(n-1)$ линейных алгебраических уравнений.

Недостающие шесть уравнений найдем из условия равенства нулю интеграла от левой части граничных условий на боковых сторонах.

Решив полученную систему линейных алгебраических уравнений, найдем коэффициенты A_i^m, B_i^m, C_i^m ($i = 1, 2; m = 1, 2, \dots, n$) и, подставляя функцию (2.5) в выражения для прогибов и моментов, вычислим основные параметры напряженно-деформированного состояния трехслойной трапециевидной пластины.

Для реализации изложенного алгоритма составлена ФОРТРАН-программа, вычисляющая обобщенные механические характеристики трехслойной пластины по формулам, приведенным в [1]. Далее, в зависимости от геометрических и механических параметров трапециевидной пластины и граничных условий, составляется система линейных алгебраических уравнений, при решении которой находятся соответствующие коэффициенты в разложении (2.5).

Для каждого фиксированного значения элементы матрицы коэффициентов быстро возрастают при увеличении числа членов n в разложении (2.5); аналогичная ситуация возникает и при увеличении значения x (узлы коллокации выбираются по формулам (4.1)). Поэтому матрица системы линейных алгебраических уравнений содержит как малые, так и большие элементы. В проводимых расчетах отношение модулей максимального и минимального элементов матрицы имело порядок 10^{30} – 10^{75} . Такие системы линейных алгебраических уравнений являются плохо обусловленными. Их решение известным методом Гаусса приводит к значительным вычислительным погрешностям ($\sim 500\%$). Поэтому система линейных алгебраических уравнений нормировалась; для уменьшения числа обусловленности [4, 5] матрица системы разлагалась на треугольные множители с единичной диагональю и затем осуществлялось решение системы алгебраических уравнений с итерационным уточнением.

Так как с увеличением числа точек коллокации n точнее удовлетворяются граничные условия на боковых сторонах трапециевидной пластины, то его целесообразно выбирать как можно большим. В разработанной программе n_{\max} принималось равным девяти из соображений лимита оперативной памяти вычислительной машины.

Однако с ростом числа n растет число обусловленности системы линейных алгебраических уравнений, что приводит к увеличению вычислительной погрешности. В разработанной программе осуществлялась серия расчетов для каждой пластины при $n=2, 3, \dots, n_{\max}$. Для каждого из значений n вычисляется норма невязки на боковых сторонах пластины в случае защемленного края. Например, для свободно опертого правого и защемленного левого краев пластины наиболее точным считался расчет, для которого принята наименьшее значение величина

$$\left\{ \max_y |w(x, y)| + \max_y |M_n(x, y)| + \max_y |H_n(x, y)| \right\}_{y \in [0, 1], x = y \operatorname{ctg} \alpha_1 + b/2}$$

$$\left\{ \max_y |w(x, y)| + \max_y \left| \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \right| + \max_y |\alpha_n| \right\}_{y \in [0, 1], x = -y \operatorname{ctg} \alpha_2 - b/2}$$

Программа позволяет вычислять прогибы $w(x, y)$, изгибающие моменты M_x, M_y, M_{xy} , обобщенные изгибающие моменты H_x, H_y, H_{xy} , перерезывающие силы Q_x, Q_y , напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ в несущих слоях и заполнителе.

Расчет этих основных характеристик напряженно-деформированного состояния проводился в 25 точках пластины с координатами

$$x_j = [b + y_i (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2)]^{1/6} j - 1/2 b - y_i \operatorname{ctg} \alpha_2, y_i = 1/6 i \quad (i=1, \dots, 5)$$

т. е. в точках сетки, приведенной на фиг. 1.

Изгибные напряжения вычислялись в точках, где достигают максимума изгибающие моменты M_x и M_y (верх и низ каждого из несущих слоев и заполнителя). Далее определялись максимальные величины параметров напряженно-деформированного состояния пластины.

Для проверки работы ФОРТРАН-программы были проведены расчеты напряженно-деформированного состояния тонких однослойных упругих пластин. Для того чтобы перейти от трехслойной пластины к однослойной, имеются следующие возможности.

1. Положить толщины несущих слоев $h_1 = h_2 = 0$, но тогда коэффициент $\vartheta = 0$ и по данному алгоритму расчеты не могут быть проведены.

2. Положить геометрические и механические характеристики несущих слоев и заполнителя равными: $1/3 h = h_1 = h_2 = h_3, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, E_1 = E_2 =$

$=E_3$. Далее полагалось $\mu_k=0,3$, $E_k=6,87 \cdot 10^{10}$ Па. Тогда модуль сдвига $G=$
 $=\frac{1}{2}E_k(1+\mu)=2,64 \cdot 10^{10}$ Па.

Параметры пластины принимались равными: $\theta_1=7/27$, $\theta_2=7/8$, $\theta_3=8/81$,
 $\eta_1=21/81$, $\eta_2=28/81$, $\eta_3=45/81=0$, $\phi=0,17$, $\beta=5,39$, $k=\phi h^2/\beta=0,0316h^2$, $k_1=$
 $=h^2/\beta=0,194h^2$.

Так как расчеты проводятся в относительных величинах, то однослойную пластину можно интерпретировать как трехслойную, прогибы которой удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.2), где $k=0,17k_1$.

σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{yy}	σ_{xz}	σ_{yz}	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{yy}	σ_{xz}	σ_{yz}
203,9	-6,2	157,7	-	-	179,7	-0,4	174,8	-	-
(9,2)	(-5,6)	(27,5)	-	-	(9,9)	(-6,4)	(21,7)	-	-
-9,2	5,6	-27,5	-	-	-9,9	6,4	-21,7	-	-
(-106,5)	(5,9)	(-92,6)	-	-	(-94,8)	(3,4)	(-98,2)	-	-
0,022	-0,013	0,066	0,453	0,287	0,024	-0,015	0,052	0,36	0,72

3. Если в зависимостях (1.1), (1.2) положить формально $k=k_1$, то после подстановки (1.2) в (1.1) это уравнение примет вид $\nabla^4 w(x, y)=q/D$, т. е. получим бигармоническое уравнение, описывающее прогибы тонкой однослойной пластины. Исходя из условий 2, 3 были проведены сравнительные расчеты. Полученные данные сопоставлялись с приведенными в [6] (тонкие упругие прямоугольные пластины, равносторонняя треугольная пластина). Погрешность не превышала 1–2%. Для трапециевидных тонких пластин результаты сравнения с данными, приведенными в [7, 8], дали погрешность 3–4%.

Далее проводился расчет напряженно-деформированного состояния трехслойных трапециевидных пластин, у которых (фиг. 1) $H=1$, $b=0$, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1; $\alpha_1=\alpha_2=\text{arctg } \frac{1}{2}(1-b)$, что соответствует углам $\alpha_{1,2}=63, 68, 73, 79, 84, 90^\circ$ — симметричные пластины; $\alpha_1=\text{arctg } \frac{1}{2}(1-b)$, $\alpha_2=90^\circ$ — несимметричные пластины.

Характеристики слоев пластины принимались равными: $h_1=10^{-4}$ м, $h_2=0,5 \cdot 10^{-4}$, 10^{-4} , $1,5 \cdot 10^{-4}$ м, $h_3=0,5 \cdot 10^{-3}$, 10^{-3} , $1,5 \cdot 10^{-3}$ м.

В качестве материала несущих слоев выбирался дюралюминий Д16Т, а для заполнителя — пенопласт [9]: $E_1=E_2=6,90 \cdot 10^{10}$ Па, $E_3=1,53 \cdot 10^8$ Па, $\mu_1=\mu_2=0,3$, $\mu_3=0,4$.

В таблице приведены максимальные значения напряжений в слоях и заполнителе для пластины с параметрами: $H=1$, $b=0,6$, $\alpha_1=\alpha_2=79^\circ$, $h_1=0,01$, $h_2=0,005$, $h_3=0,05$ при нагрузке $q=1$. Граничные условия: левая боковая сторона — закреплена, правая боковая сторона — свободно оперта. Первые четыре столбца соответствуют точке с координатами $x=0$, $y=0,5$, а последние четыре — точке с координатами $x=0$, $y=0,67$. В скобках стоят соответствующие значения напряжений в первом и втором слоях в нижних волокнах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорович Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 171 с.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
3. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
4. Jullkerson D. R., Wolfe P. An algorithm for scaling matrices.— SIAM, Rev., 1962, v. 4, No. 2, p. 142.
5. Curtis A. R., Reid J. K. On automatic scaling of matrices for Gaussian elimination.— J. Inst. Math. and Appl., 1972, v. 10, No. 1, p. 118.

6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1965. 635 с.
7. Вестяк А. В., Хвилон Е. А. Расчет напряженно-деформированного состояния трапециевидных пластин методом граничной коллокации.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 138.
8. Вестяк А. В., Хвилон Е. А. Напряженно-деформированное состояние трапециевидных пластин с проседающими границами.— Прикл. механика, 1978, т. 14, вып. 4, с. 71.
9. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 2./Под ред. Биргера И. А., Пановко Я. Г. М.: Машиностроение, 1968. 464 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1979