МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1981

УДК 539.3

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

ГОРШКОВ А. Г., ТАРЛАКОВСКИЙ Д. В.

(Москва)

В связи с задачами взрыва в грунте представляют интерес вопросы, связанные с распространением упругих сферических волн в неоднородном пространстве от точечного источника. Применительно к радиальным колебаниям в средах со сферической симметрией решенные к настоящему времени задачи связаны, как известно, в основном с неоднородностью, описываемой степенной зависимостью параметров среды от радиуса (например, [1, 2]). Возможна также кусочно-постоянная аппроксимация свойств неоднородной среды [3, 4]. Задача о динамическом движении $m+1$ сферических слоев решена в [3] при помощи преобразования Лапласа по времени. Однако переход в пространство оригиналов при большом числе слоев становится очень трудоемким.

В публикуемой работе рассматривается распространение упругих сферических волн, генерируемых точечным источником, расположенным в бесконечном изотропном пространстве, разделенном концентрическими сферическими границами на $n+2$ однородные среды с различными свойствами. Определением переходных функций для каждой среды и интеграла Дюамеля решение общей задачи сводится к системе интегральных уравнений в свертках в пространстве обобщенных функций.

Каждая переходная функция вычисляется суммированием элементарных сферических волн при использовании преобразования Лапласа по времени. После выделения особенностей в переходных функциях разрешающая система уравнений сводится к системе из $2(n+1)$ уравнений Вольтерра второго рода с запаздывающим аргументом в пространстве непрерывных функций.

1. Пусть бесконечное линейно-упругое изотропное пространство разделено концентрическими сферическими границами с радиусом $R=R_i$ ($i=0, 1, \ldots, n$; $R_0>R_1>\ldots>R_n$) и центром в точке O на $n+2$ слоя (среды). Слой с символом i ограничен внутренним радиусом $R=R_i$ и внешним $R=R_{i-1}$. Таким образом, внешняя бесконечная среда имеет индекс $i=0$, а внутренняя (сплошной шар) — $i=n+1$. Каждая i-я среда однородна и характеризуется упругими постоянными Ламе λ_i, μ_i и плотностью ρ_i.

В момент времени $t=0$ поверхности $R=R_0$ касается фронт упругой сферической волны, создаваемой источником, расположенным в точке O и имеющим потенциал

$$\varphi_s(r, \tau)=r_n f[\tau-\gamma_{n+1}(r-r_n)]/r \tag{1.1}$$

где f — функция, задающая закон изменения потенциала по времени.

Здесь и далее введены следующие безразмерные величины (штрих означает размерную величину):

$$r=\frac{R}{R_0},\quad \tau=\frac{c_0 t}{R_0},\quad r_i=\frac{R_i}{R_0},\quad h_i=r_{i-1}-r_i,\quad u_i=\frac{u_i'}{R_0}$$

$$\varphi_i=\frac{\varphi_i'}{R_0^2},\quad \sigma_{ri}=\frac{\sigma_{ri}'}{\lambda_0+2\mu_0},\quad \varkappa_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+2\mu_i},\quad \gamma_i=\frac{c_0}{c_i},$$

$$\beta_i=\frac{\lambda_i+2\mu_i}{\lambda_0+2\mu_0},\qquad c_i=\sqrt{\frac{\lambda_i+2\mu_i}{\rho_i}}\qquad (i=0,1,\ldots,n+1)$$

где u_i, σ_{ri} — радиальные перемещение и напряжение; φ_i, c_i — упругий потенциал и скорость распространения волн расширения; h_i — относительная толщина слоя ($h_{n+1}=r_n$, $h_0=\infty$).

Функции u_i, σ_{ri} и φ_i связаны между собой зависимостями

$$u_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial r},\qquad \sigma_{ri}=\beta_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}+\frac{2\varkappa_i}{r}u_i\right) \tag{1.2}$$

Радиальные колебания i-й среды описываются уравнением

$$\gamma_i^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}$$
$$\varphi_i(r,0)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau}(r,0)=0\qquad (i=0,1,\ldots,n+1) \tag{1.3}$$

Условия контакта сред, состоящие в непрерывности перемещений и радиальных напряжений, запишем в виде

$$u_i(r_i,\ \tau)=u_{i+1}(r_i,\ \tau),\ \sigma_{ri}(r_i,\ \tau)=\sigma_{r,\,i+1}(r_i,\ \tau)\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$
$$u_n(r_n,\ \tau)=u_{n+1}(r_n,\ \tau)+u_s(r_n,\ \tau)$$
$$\sigma_{rn}(r_n,\ \tau)=\sigma_{r,\,n+1}(r_n,\ \tau)+\sigma_{rs}(r_n,\ \tau) \tag{1.4}$$

где u_s и σ_{rs} — радиальные перемещение и напряжение в набегающей волне.

На бесконечности и в центре пространства O соответствующие потенциалы возмущенного движения в данном случае должны быть ограниченными. Отсюда приходим к условиям

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_0(r,\tau)=0,\qquad |\varphi_{n+1}(0,\tau)|<C<\infty \tag{1.5}$$

2. Чтобы свести задачу (1.3)—(1.5) к системе интегральных уравнений, для i-й среды введем упругие потенциалы $\xi_{0i}(r,\ \tau)$ и $\xi_{1i}(r,\ \tau)$ ($i=0,\ 1,\ldots$ $\ldots,\ n+1$), каждый из которых удовлетворяет уравнению движения (1.3) и нулевым начальным условиям; граничные условия для них имеют вид

$$\left.\frac{\partial\xi_{0i}}{\partial r}\right|_{r=r_{i-1}}=\delta(\tau),\qquad \left.\frac{\partial\xi_{0i}}{\partial r}\right|_{r=r_i}=0 \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{\partial\xi_{1i}}{\partial r}\right|_{r=r_{i-1}}=0,\qquad \left.\frac{\partial\xi_{1i}}{\partial r}\right|_{r=r_i}=\delta(\tau) \tag{2.2}$$

где $\delta(\tau)$ — обобщенная функция Дирака, $\xi_{00}=\xi_{1,\,n+1}\equiv0$.

Определим также переходные функции $\chi_{m0}^{(i)}(\tau)$ и $\chi_{m1}^{(i)}(\tau)$ ($m=0,\ 1$; $i=0,$ $1,\ldots,\ n+1$) как радиальные напряжения, соответствующие потенциалам ξ_{mi} на границах $r=r_{i-1}$ и $r=r_i$. Таким образом из (1.2) найдем

$$\chi_{m0}^{(i)}(\tau)=\beta_i\left(\frac{\partial^2\xi_{mi}}{\partial r^2}+\frac{2\varkappa_i}{r}\frac{\partial^2\xi_{mi}}{\partial r^2}\right)\Bigg|_{r=r_{i-1}}$$
$$\chi_{m1}^{(i)}(\tau)=\beta_i\left(\frac{\partial^2\xi_{mi}}{\partial r^2}+\frac{2\varkappa_i}{r}\frac{\partial^2\xi_{mi}}{\partial r^2}\right)\Bigg|_{r=r_i} \tag{2.3}$$

Заметим, что используемые обычно в гидроупругости переходные функции соответствуют потенциалу, а не напряжениям (давлению). Для уменьшения громоздкости последующих формул в некоторых случаях это обозначение изменено или опущено.

Используя (2.1)–(2.3), а также интеграл Дюамеля, для радиальных напряжений в i-й и $(i+1)$-й средах на границе $r=r_i$ получим (звездочка означает операцию свертки):

$$\sigma_{ri}(r_i,\tau)=\chi_{01}^{(i)}(\tau)*u_i(r_{i-1},\tau)+\chi_{11}^{(i)}(\tau)*u_i(r_i,\tau) \quad (i=1,2,\dots,n) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{r,i+1}(r_i,\tau)=\chi_{00}^{(i+1)}(\tau)*u_{i+1}(r_i,\tau)+\chi_{10}^{(i+1)}(\tau)*u_{i+1}(r_{i+1},\tau) \quad (i=0,1,\dots,n-1)$$

Аналогично на поверхностях $r=r_0$ и $r=r_n$ для сред $i=0$, $n+1$ будем иметь

$$\sigma_{r0}(r_0,\tau)=\chi_{11}^{(0)}(\tau)*u_0(r_0,\tau), \qquad \sigma_{r,n+1}(r_n,\tau)=\chi_{00}^{(n+1)}(\tau)*u_{n+1}(r_n,\tau) \tag{2.5}$$

Обозначая $w_i(\tau)=u_i(r_i,\tau)$ $(i=0,1,\dots,n)$, из условий контакта (1.4) и соотношений (2.4), (2.5) получим систему интегральных уравнений в свертках в пространстве обобщенных функций

$$\chi_{01}^{(i)}*w_{i-1}+(\chi_{11}^{(i)}-\chi_{00}^{(i+1)})*w_i-\chi_{10}^{(i+1)}*w_{i+1}=0 \quad (i=1,\dots,n-1)$$

$$(\chi_{11}^{(0)}-\chi_{00}^{(1)})*w_0-\chi_{10}^{(1)}*w_1=0 \tag{2.6}$$

$$\chi_{01}^{(n)}*w_{n-1}+(\chi_{11}^{(n)}-\chi_{00}^{(n+1)})*w_n=-\chi_{00}^{(n+1)}*u_s(r_n,\tau)+\sigma_{rs}(r_n,\tau)$$

Далее найдем переходные функции $\chi_{mn}^{(i)}(\tau)$. Поскольку их вычисление однотипно, ограничимся нахождением $\chi_{00}^{(i)}(\tau)$ $(i=1,\dots,n)$. Потенциал $\xi_{0i}(r,\tau)$ удовлетворяет краевой задаче (1.3), (2.1). Представим его в виде суперпозиции сходящихся и расходящихся сферических волн [5]:

$$\xi_{0i}(r,\tau)=\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\{f_{0k}^{(0i)}[\tau+\gamma_i(r-r_{i-1})-2k\gamma_i h_i]+ \tag{2.7}$$
$$+f_{1k}^{(0i)}[\tau-\gamma_i(r-r_i)-(2k+1)\gamma_i h_i]\}$$

где $f_{0k}^{(0i)}(\tau)$ и $f_{1k}^{(0i)}(\tau)$ — произвольные функции, соответствующие сходящимся и расходящимся волнам.

Если $\dot f_{0k}^{(0i)}(0)=\dot f_{1k}^{(0i)}(0)=f_{0k}^{(0i)}(0)=f_{1k}^{(0i)}(0)=0$ (точка означает дифференцирование по времени τ), то функция $\xi_{0i}(r,\tau)$ удовлетворяет уравнению (1.3) и нулевым начальным условиям. Произвольные функции определяются из граничных условий (2.1).

В пространстве преобразования Лапласа по времени τ перемещение, соответствующее потенциалу $\xi_{0i}{}^{\vee}(r,s)$, имеет вид (s — параметр преобразования):

$$u_i{}^{\vee}(r,s)=\frac{\partial\xi_{0i}{}^{\vee}}{\partial r}=-\frac{r_{i-1}^2}{r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\{R(-\gamma_i rs)f_{0k}^{(0i)\vee}(s)\exp[-\gamma_i(r_{i-1}-r)s]+ \tag{2.8}$$
$$+R(\gamma_i rs)f_{1k}^{(0i)\vee}(s)\exp[-\gamma_i(r-r_i+h_i)s]\}\exp[-2k\gamma_i h_i s]$$
$$R(s)=s+1$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.1), произвольные функции f_{0k}^{0i} и $f_{1k}^{(0i)}$ будут определяться рекуррентной системой уравнений

$$f_{00}^{(0i)\vee}(s)=-1/R(-\gamma_i r_{i-1}s),\qquad f_{1k}^{(0i)\vee}(s)=-A_{1i}(s)f_{0k}^{(0i)\vee}(s),\qquad (2.9)$$
$$f_{0k}^{(0i)\vee}(s)=-A_{0i}(s)f_{1,k-1}^{(0i)\vee}(s)$$

$$A_{0i}(s)=R(\gamma_i r_{i-1}s)/R(-\gamma_i r_{i-1}s),\ A_{1i}(s)=R(-\gamma_i r_i s)/R(\gamma_i r_i s)$$

Переходная функция $\chi_{00}^{(i)\vee}(s)$ с учетом формул (2.3) будет иметь вид

$$\chi_{00}^{(i)\vee}(s)=\sigma_{ri}{}^{\vee}(r_{i-1},s)=\frac{\beta_i}{r_{i-1}}\Big\{Q_i(-\gamma_i r_{i-1}s)f_{00}^{(0i)\vee}(s)+\qquad (2.10)$$
$$+\sum_{k=1}[Q_i(-\gamma_i r_{i-1}s)f_{0k}^{(0i)\vee}(s)+Q_i(\gamma_i r_{i-1}s)f_{1,k-1}^{(0i)\vee}(s)]\exp[-2k\gamma_i h_i s]\Big\}$$

$$Q_i(s)=s^2+2(1-\varkappa_i)(s+1)$$

Обозначим далее

$$g_{00k}^{(i)\vee}(s)=Q_i(-\gamma_i r_{i-1}s)f_{0k}^{(0i)\vee}(s)+Q_i(\gamma_i r_{i-1}s)f_{1,k-1}^{(0i)\vee}(s)\quad (k\geqslant 1)$$
$$g_{000}^{(i)\vee}(s)=Q_i(-\gamma_i r_{i-1}s)f_{00}^{(0i)\vee}(s)$$

Тогда из (2.9) и (2.10) найдем

$$\chi_{00}^{(i)\vee}(s)=\frac{\beta_i}{r_{i-1}}\sum_{k=0}^{\infty}g_{00k}^{(i)\vee}(s)\exp[-2k\gamma_i h_i s]\qquad (2.11)$$

$$g_{001}^{(i)\vee}=-\frac{2(\gamma_i r_{i-1}s)^3}{R^2(-\gamma_i r_{i-1}s)}A_{1i}(s),\qquad g_{00k}^{(i)\vee}=A_{0i}A_{1i}g_{00,k-1}^{(i)\vee}\quad (k\geqslant 2)$$

Переходя в область оригиналов, для $\chi_{00}^{(i)}(\tau)$ получим следующее представление:

$$\chi_{00}^{(i)}(\tau)=\frac{\beta_i}{r_{i-1}}\Big\{\gamma_i r_{i-1}\delta'(\tau)-(1-2\varkappa_i)\delta(\tau)+$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\gamma_i r_{i-1}\delta'(\tau_{0ik})-2k\frac{h_i}{r_i}\delta(\tau_{0ik})\Big]\Big\}+\Phi_{00}^{(i)}(\tau)\qquad (2.12)$$

$$\Phi_{00}^{(i)\vee}(s)=\frac{\beta_i}{r_{i-1}}\sum_{k=0}^{\infty}G_{00k}^{(i)\vee}(s)\exp[-2k\gamma_i h_i s],\quad \tau_{0ik}=\tau-2k\gamma_i h_i\quad (i=1,\dots,n)$$

где трансформанты $G_{00k}^{(i)\vee}(s)$ удовлетворяют неоднородным рекуррентным соотношениям

$$G_{000}^{(i)\vee}=-1/R(-\gamma_i r_{i-1}s),\qquad G_{001}^{(i)\vee}=P_{00i}(s)B_i(s)G_{000}^{(i)\vee}$$
$$G_{00k}^{(i)\vee}=A_{0i}A_{1i}G_{00,k-1}^{(i)\vee}+4\frac{h_i}{r_i}R[-(2k-1)\gamma_i h_i s]B_i(s)\quad (k\geqslant 2)$$

$$P_{00i}(s)=-2\Big[\gamma_i^2 r_i r_{i-1}\Big(1+2\frac{h_i^2}{r^2}\Big)s^2-$$
$$-\gamma_i r_{i-1}\Big(1+\frac{2h_i^2}{r_i r_{i-1}}+\frac{2h_i}{r_i}\Big)s+\frac{2h_i}{r_i}\Big]$$

$$B_i(s)=1/[R(-\gamma_i r_{i-1}s)R(\gamma_i r_i s)]$$

Выражения для остальных переходных функций находятся аналогично.

Обозначая $v_i(\tau)=w_i^{\cdot}(\tau)$ и учитывая свойства функции Дирака и ее производной, из системы (2.6) получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода типа свертки

$$w_i=v_i*1 \quad (i=0,1,\ldots,n),$$

$$\Phi_{01}^{(i)}*w_{i-1}+(\Phi_{11}^{(i)}-\Phi_{00}^{(i+1)})*w_i-$$

$$-\Phi_{10}^{(i+1)}*w_{i+1}+\frac{2\beta_i}{r_i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\gamma_i r_i v_{i-1}(\tau_{1ik})-\frac{h_i}{r_i}(2k+1)w_{i-1}(\tau_{1ik})\right]-$$

$$-\left(\beta_i\gamma_i+\beta_{i+1}\gamma_{i+1}\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)v_i(\tau)+$$

$$+\left[-\frac{\beta_i}{r_i}(1-2\varkappa_i)+\frac{\beta_{i+1}}{r_{i+1}}(1-2\varkappa_{i+1})\right]w_i(\tau)+$$

$$+\frac{2\beta_i}{r_i}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\gamma_i r_i v_i(\tau_{0ik})+2k\frac{h_i}{r_{i-1}}w_i(\tau_{0ik})\right]+$$

$$+\frac{2\beta_{i+1}}{r_{i+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\gamma_{i+1}r_i v_i(\tau_{0,i+1,k})+2k\frac{h_{i+1}}{r_i}w_i(\tau_{0,i+1,k})\right]+$$

$$+\frac{2\beta_{i+1}}{r_i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\gamma_{i+1}r_{i+1}v_{i+1}(\tau_{1,i+1,k})+(2k+1)\frac{h_{i+1}}{r_i}w_{i+1}(\tau_{1,i+1,k})\right]=0$$

$$\tau_{1ik}=\tau_{0ik}-\gamma_i h_i \quad (i=1,\ldots,n-1)$$

$$(\Phi_{11}^{(0)}-\Phi_{00}^{(1)})*w_0-\Phi_{10}^{(1)}*w_1-\left(1+\beta_1\gamma_1\frac{1}{r_1}\right)v_0(\tau)+$$

$$+\left[-(1-2\varkappa_0)+\frac{\beta_1}{r_1}(1-2\varkappa_1)\right]w_0(\tau)+$$

$$+\frac{2\beta_1}{r_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\gamma_1 v_0(\tau_{01k})+2k\frac{h_1}{r_1}w_0(\tau_{01k})\right]+ \tag{2.13}$$

$$+\frac{2\beta_1}{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\gamma_1 r_1 v_1(\tau_{11k})+(2k+1)h_1 w_1(\tau_{11k})\right]=0$$

$$\Phi_{01}^{(n)}*w_{n-1}+(\Phi_{11}^{(n)}-\Phi_{00}^{(n+1)})*w_n+$$

$$+\frac{2\beta_n}{r_n}\sum_{k=0}\left[\gamma_n r_{n-1}v_{n-1}(\tau_{1nk})-(2k+1)\frac{h_n}{r_n}w(\tau_{1nk})\right]-$$

$$-(\beta_n\gamma_n+\beta_{n+1}\gamma_{n+1})v_n(\tau)+$$

$$+\frac{1}{r_n}[-\beta_n(1-2\varkappa_n)+\beta_{n+1}(1-2\varkappa_{n+1})]w_n(\tau)+$$

$$+\frac{2\beta_n}{r_n}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\gamma_n r_n v_n(\tau_{0nk})+2k\frac{h_n}{r_{n-1}}w_n(\tau_{0nk})\right]-$$

$$-\frac{\beta_{n+1}}{r_n}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[\gamma_{n+1}r_n v_n(\tau_{0,n+1,k})+(2k-1+2\varkappa_{n+1})w_n(\tau_{0,n+1,k})]=$$

$$=-\Phi_{00}^{(n+1)}*u_s(r_n,\tau)-\frac{\beta_{n+1}}{r_n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\gamma_{n+1}r_n\dot{u}_s(r_n,\tau_{0,n+1,k})+$$

$$+(2k-1+2\varkappa_{n+1})u_s(r_n,\tau_{0,n+1,k})]+\sigma_{rs}(r_n,\tau)$$

Система из $2(n+1)$ уравнений (2.13) позволяет найти величины перемещений и скоростей, а следовательно, и напряжений на поверхностях контакта сферических слоев. По условиям на поверхностях, используя известные потенциалы $\xi_{0i}(r,\tau)$ и $\xi_{1i}(r,\tau)$ и интеграл Дюамеля, можно вычислить все компоненты напряженно-деформированного состояния в любой точке i-го слоя.

Заметим, что верхний предел суммирования в (2.13) поставлен условно. При вычислении сумм необходимо учитывать, что $w_i(\tau)=v_i(\tau)=0$ при $\tau<0$. Предполагая, что функция $f(\tau)$ в (1.1) такова, что радиальное напряжение $\sigma_{rs}(r_n,\tau)$ — непрерывная функция при любом $\tau\geqslant0$, можно показать, что и неизвестные функции $w_i(\tau)$ и $v_i(\tau)$ будут непрерывными. Поэтому решение (2.13) можно искать в пространстве непрерывных функций любым известным численным методом. Функции $\Phi_{\widehat{m}n}(\tau)$ достаточно просто вычисляются при использовании, например, алгоритма, приведенного в [5].

Принципиально возможно получение решения и для нагрузки, имеющей разрывы первого рода по времени τ, и учет этих разрывов в искомых функциях. Однако с увеличением числа границ раздела количество разрывов на данном интервале времени значительно увеличивается и их учет становится нецелесообразным.

Отметим также, что в рассмотренной задаче сферические слои могут быть и акустическими. Для этого достаточно для i-й среды положить $\varkappa_i=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сеницкий Ю. Э.* Расчет неоднородных анизотропных цилиндра и сферы при действии произвольной радиально-симметричной динамической нагрузки.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 5, с. 7.
2. *Dutta S.* Motion in a non-homogeneous elastic medium by a twisting impulsive force on the surface of a spherical cavity.— Geophysica pura e applicata, 1961, v. 49, No. 2, p. 36.
3. *Филиппов И. Г., Бахрамов Б. М.* Волны в упругих однородных и неоднородных средах. Ташкент: Фан, 1978. 215 с.
4. *Pilkey W. D.* Mechanicay and/or thermally generated dynamic-responce of thick spherical and cylindrical shells with variable material properties.— J. Sound and Vibration, 1967, v. 6, No. 1, p. 105.
5. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Нестационарные гидроупругие колебания толстостенной сферы.— Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 5, с. 812.

Поступила в редакцию
5.II.1980