**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1981**

УДК 539.3.01

ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОЙ СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ЩЕЛЕЙ

НАХМЕЙН Е. Л., НУЛЛЕР Б. М.

(Ленинград)

В [1–4] построение и использование систем кусочно-однородных решений, сокращенно P-систем, базировалось на теории однородных решений и методе Винера – Хопфа. Такие P-системы предназначены для решения смешанных задач с точками раздела типов условий на продольных гранях полубесконечных и конечных упругих областей.

Ниже построена P-система, при помощи которой можно решать разнообразные периодические и двоякопериодические задачи для многослойной полосы, полуплоскости и плоскости со смешанными условиями «поперечного» типа и произвольным числом точек раздела в периоде. Вместо метода Винера – Хопфа применяется метод Мусхелишвили; как и раньше, задачи сводятся к системам Пуанкаре – Коха, имеющим экспоненциально убывающие по номеру строки и столбца матричные элементы.

Как пример рассматривается задача о слоистой плоскости с двоякопериодической системой прямолинейных щелей, находящихся на линиях склейки материалов. Подобные задачи для однородной (неслоистой) плоскости обычно решают при помощи эллиптических функций, получая сингулярные интегральные уравнения [5, 6], уравнения Фредгольма [7], квазирегулярные системы алгебраических уравнений [8]. В данной работе используется иная идея, связанная с разбиением плоскости не на параллелограммы, а на сдвинутые один относительно другого прямоугольники. Решение в прямоугольнике периодов ищется в рядах по элементам P-систем; на сопряжение решений в соседних прямоугольниках сдвиг почти не влияет.

1. Построим P-систему задачи об упругой плоскости, составленной из двух полуплоскостей с разными упругими характеристиками и ослабленной вдоль линии склейки периодической с периодом 2π системой щелей. Совместим ось x плоскости $z=x+iy$ с линией сопряжения полуплоскостей. Пусть N – число щелей в периоде, L_1 – совокупность интервалов (a_k, b_k), занимаемых щелями, $-\pi\leqslant a_1<b_1<a_2<\ldots<b_N<\pi$, L_2 – дополнение L_1 до отрезка $[-\pi, \pi]$.

P-система данной задачи определяется однородными условиями

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})(x, \pm 0)=0, \quad x\in L_1 \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}(\sigma_y-i\tau_{xy})(x, +0)-(\sigma_y-i\tau_{xy})(x, -0)=0, \quad x\in L_2 \\ (u+iv)(x, +0)-(u+iv)(x, -0)=0, \quad x\in L_2\end{gathered} \tag{1.2}$$

Условия (1.1), (1.2) периодически с периодом 2π продолжены на всю действительную ось.

Каждый элемент P-системы будем искать в виде суммы периодических функций

$$(u+iv)_k(x, y)=(u+iv)_{k1}(x, y)+(u+iv)_{k2}(x, y) \quad (k=\pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.3}$$

Первое слагаемое (1.3) в верхней (нижней) полуплоскости, определяемой индексом $j=1$ $(j=2)$, при $k\geqslant 1$ $(k\leqslant -1)$ составим из однородных решений для полосы $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, $-\infty<y<\infty$, удовлетворяющих условиям $u=\tau_{xy}=0$ и $v=\sigma_x=0$ на гранях $x=\pm\pi$ и имеющих особенности в верхней (нижней) полуплоскости [9]

$$2\mu_j(u+iv)_{k1}=-ik^{-1}e^{ky}\{e^{ikx}(T_{k1}+2ky\overline{T}_{k2})-\varkappa_j T_{k2}e^{-ikx}\}$$
$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_{k1}=e^{ky}\{e^{ikx}(T_{k1}+2ky\overline{T}_{k2})-T_{k2}e^{-ikx}\} \qquad (1.4)$$

где T_{ks} — произвольные комплексные постоянные, $\varkappa_j=3-4\nu_j$ или $\varkappa_j=(3-\nu_j)(1+\nu_j)^{-1}$, ν_j и μ_j — коэффициенты Пуассона и модули сдвига. Первое слагаемое (1.3) в нижней (верхней) полуплоскости при $k\geqslant1$ ($k\leqslant-1$) положим равным нулю.

Чтобы в решении (1.4) устранить ненулевые напряжения на щелях и разрывы в перемещениях и напряжениях на их продолжении, добавим к (1.4) решение следующей периодической задачи для рассматриваемой неоднородной плоскости:

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_{k2}(x,\pm0)=f_k^{\pm}(x), \quad x\in L_1 \qquad (1.5)$$
$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_{k2}(x,+0)-(\sigma_y-i\tau_{xy})_{k2}(x,-0)=S_k(x), \quad x\in L_2$$
$$(u+iv)_{k2}(x,+0)-(u+iv)_{k2}(x,-0)=g_k(x), \quad x\in L_2$$

$$f_k^+(x)=S_k(x)=-(\sigma_y-i\tau_{xy})_{k1}(x,0) \qquad (1.6)$$
$$f_k^-(x)=0, \quad g_k(x)=-(u+iv)_{k1}(x,0) \quad \text{при } k\geqslant1$$
$$f_k^-(x)=-S_k(x)=-(\sigma_y-i\tau_{xy})_{k1}(x,0)$$
$$f_k^+(x)=0, \quad g_k(x)=(u+iv)_{k1}(x,0) \quad \text{при } k\leqslant-1$$

Задача (1.5) рассмотрена в [10]. Ее решение имеет вид

$$\sigma_x+\sigma_y=4\,\mathrm{Re}\,[c_jK(z)+c_{j+2}M(z)] \quad {\scriptstyle (j=1,\,2)} \qquad (1.7)$$
$$\sigma_y-i\tau_{xy}=c_j[K(z)+(z-\bar z)\overline{K'(z)}]+\delta_jK(\bar z)+$$
$$+c_{j+2}[M(z)-M(\bar z)+(z-\bar z)\overline{M'(z)}]$$
$$2\mu_j\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=c_j[\varkappa_jK(z)-(z-\bar z)\overline{K'(z)}]+$$
$$+\delta_jK(\bar z)+c_{j+2}[\varkappa_jM(z)+M(\bar z)-(z-\bar z)\overline{M'(z)}]$$
$$\delta_1=c_2, \quad \delta_2=c_1, \quad c_1=(\varkappa_1+m)^{-1}, \quad c_2=(1+m\varkappa_2)^{-1}$$
$$c_3=m(1+\varkappa_2), \quad c_4=1+\varkappa_1, \quad m=\mu_1\mu_2^{-1}$$

Периодические функции $K(z)$ и $M(z)$, регулярные во всей комплексной плоскости, кроме, может быть, действительной оси, определяются из краевых задач Римана

$$M^+(x)=M^-(x)+m(x), \quad x\in[-\pi,\pi] \qquad (1.8)$$

$$K^+(x)=G(x)K^-(x)+k(x), \quad x\in[-\pi,\pi] \qquad (1.9)$$
$$G(x)=g, \quad k(x)=\Delta c_1^{-1}[c_4f_k^+(x)+c_3f_k^-(x)]$$
$$m(x)=\Delta[f_k^+(x)-f_k^-(x)] \quad \text{при } x\in L_1; \quad G(x)=1, \quad m(x)=\Delta S_k(x),$$
$$k(x)=2\mu_1g_k'(x)-m\Delta(\varkappa_1\varkappa_2-1)S_k(x) \quad \text{при } x\in L_2$$
$$\Delta^{-1}=c_3+c_4, \quad g=-c_1^{-1}c_2$$

Учитывая (1.6), после элементарных преобразований получим

$$m(x)=\Delta(T_{k1}e^{ikx}-T_{k2}e^{-ikx})\,\mathrm{sign}\,k, \quad x\in[-\pi,\pi] \qquad (1.10)$$
$$k(x)=\Delta c_1^{-1}\varepsilon_k(-1)^{s+1}(g_{hs}T_{k1}e^{ikx}-T_{k2}e^{-ikx}), \quad x\in L_s$$
$$\varepsilon_k=c_4, \quad g_{k2}=g^{-1} \quad \text{при } k\geqslant1; \quad \varepsilon_k=c_3, \quad g_{k2}=g \quad \text{при } k\leqslant-1;$$
$$g_{k1}=1 \quad {\scriptstyle (k=\pm1,\,\pm2,\,\ldots;\ s=1,\,2)}$$

Вследствие самоуравновешенности приложенных нагрузок функции $K(z)$ и $M(z)$ на бесконечности обращаются в нуль.

Решения краевых задач (1.8)—(1.10), построенные на основе теории краевых задач для автоморфных функций [11], запишем в виде [9]

$$M(z)=T_{ks}e^{ik\sigma z},\quad \sigma=\operatorname{sign}(ky),\quad s={}^1/_2(3+\sigma) \tag{1.11}$$

$$K(z)=\frac{X(z)}{4\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{k(t)}{X^+(t)}H(t,z)\,dt+X(z)\,\Psi_k(z)$$

$$X(z)=\prod_{n=1}^{N}\left(\sin\frac{z-a_n}{2}\right)^{-{}^1/_2+i\gamma}\left(\sin\frac{z-b_n}{2}\right)^{-{}^1/_2-i\gamma},\quad \gamma=\frac{\ln(-g)}{2\pi}$$

где для четного и нечетного N соответственно имеем

$$\Psi_k(z)=\sum_{n=1}^{{}^1/_2(N-1)}\left\{C_{kn}{}^1\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)z-\delta\right]+C_{kn}{}^2\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)z-\delta\right]\right\}$$

$$H(t,z)=\left(\sin\frac{t-z}{2}\right)^{-1}$$

$$\Psi_k(z)=\sum_{n=1}^{{}^1/_2N-1}\{C_{kn}{}^1\cos(nz-\delta)+C_{kn}{}^2\sin(nz-\delta)\}+C_{k0}$$

$$H(t,z)=\operatorname{ctg}\frac{t-z}{2},\quad \delta=\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[\gamma(b_n-a_n)-\frac{i}{2}(a_n+b_n)\right]$$

Выбранная ветвь канонического решения $X(z)$ задачи (1.9) определяется асимптотикой

$$X(z)=(\mp 2i)^N\exp(\pm{}^1/_2Niz\mp i\delta)+O\{\exp[\pm{}^1/_2iz(N-1)]\},\quad z\to\pm i\infty \tag{1.12}$$

Комплексные постоянные $C_{kn}{}^t$ удовлетворяют системе уравнений

$$\int\limits_{a_n}^{b_n}\frac{\partial}{\partial x}[(u+iv)(x,+0)-(u+iv)(x,-0)]\,dx=g_k(b_n)-g_k(a_n)\quad (n=1,\ldots,N-1) \tag{1.13}$$

Напряжения на действительной оси в задаче (1.5) согласно (1.7) можно записать в форме $(t=1,2)$:

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_{k2}(x,\pm 0)=\varepsilon_k(t-1)X^+(x)\sum_{s=1}^{2}T_{ks}P_{ks}(x)+f_k{}^\pm(x),\quad x\in L_t \tag{1.14}$$

где $P_{ks}(x)$ — известные функции, $X^+(x)=X^-(x)$ на L_2.

Отсюда и из (1.3) следует, что на линии раздела сред вне щелей

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_k(x,0)=\varepsilon_kX^+(x)\sum_{s=1}^{2}T_{ks}P_{ks}(x),\quad x\in L_2 \tag{1.15}$$

У концов щелей напряжения имеют осциллирующие особенности

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_k=(K_1-iK_2)\,|x-d_n|^{-{}^1/_2\pm i\gamma},\quad x\to d_n\mp 0\quad (n=1,\ldots,N) \tag{1.16}$$

где верхние знаки берутся при $d_n=a_n$, нижние — при $d_n=b_n$.

В качестве нулевого элемента P-системы возьмем решение периодической задачи для разнородной плоскости при заданном распределении напряжений $f_0^{\pm}(x)$ на берегах щелей и на бесконечности [10].

Это решение определяется граничными условиями на щелях

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})(x, \pm 0) = f_0^{\pm}(x), \quad x \in L_1 \tag{1.17}$$

и условиями непрерывности (1.2). Оно выражается формулами (1.7), в которых следует положить

$$K(z) = \frac{X(z)}{4\pi i}\int_{L_1}\frac{k(t)}{X^+(t)}H(t,z)\,dt + X(z)\Psi_0(z) \tag{1.18}$$

$$M(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\frac{m(t)e^{it}\,dt}{e^{it}-e^{iz}} + C$$

$$\Psi_0(z) = \sum_{n=1}^{{}^1\!/_2 N}\{C_{n1}\cos(nz-\delta) + C_{n2}\sin(nz-\delta)\} + C_{01} \quad (N \text{ — четное})$$

$$\Psi_0(z) = \sum_{n=1}^{{}^1\!/_2(N+1)}\left\{C_{n1}\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)z-\delta\right] + \right.$$

$$\left. + C_{n2}\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)z-\delta\right]\right\} \quad (N \text{ — нечетное})$$

$$k(x) = \Delta c_1^{-1}[c_4 f_0^+(x) + c_3 f_0^-(x)], \quad m(x) = \Delta[f_0^+(x) - f_0^-(x)]$$

Функции $f_0^{\pm}(x)$ должны удовлетворять условию Гельдера на L_1, $N+2$ комплексных постоянных C, C_{n1}, C_{n2} определяются по условию однозначности перемещений [12] и по заданным на бесконечности в одной из полуплоскостей, например в верхней, напряжениям σ_y^∞, σ_x^∞, τ_{xy}^∞ и вращению ε^∞. Задание двух последних величин эквивалентно условию периодичности (квазипериодичности) перемещений.

Отметим, что интегралы, входящие в формулы (1.11), всегда вычисляются в элементарных функциях. Для этого используется переход от интегрирования по отрезкам прямой к интегрированию по замкнутым контурам, охватывающим дуги окружностей [13, 9]. То же самое относится и к решению (1.18), если граничные функции $f_0^{\pm}(x)$ представлены тригонометрическими полиномами. Например, в случае одной щели в периоде ($a_1=-a$, $b_1=a$) формулы (1.11) принимают вид

$$K(z) = \varepsilon_k(1-g)^{-1}\left\{g^t T_{hs}e^{ik\sigma z} + X(z)\sum_{q=1}^{2}T_{hq}P_{hq}(z)\right\} \tag{1.19}$$

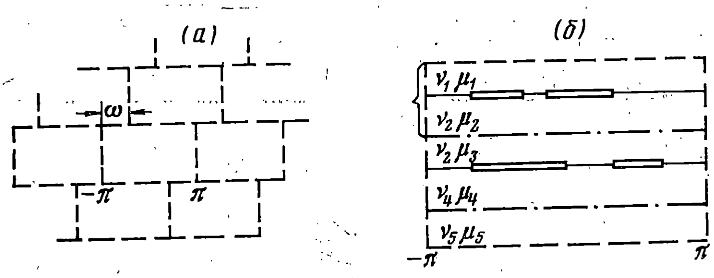
$$\sigma = \operatorname{sign}(ky), \quad s = {}^1\!/_2(3+\sigma), \quad t = {}^1\!/_2(1-\operatorname{sign} y) \quad (k=\pm1, \pm2, \ldots)$$

$$P_{k1}(z) = -P_{-k2}(z) = \frac{e^{a\gamma}}{2i}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p D_p(e^{ia})\exp\left[i\left(k-p+\frac{1}{2}\right)z\right]$$

$$P_{k2}(z) = -P_{-k1}(z) = \frac{ge^{-a\gamma}}{2i}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p D_p(e^{-ia})\exp\left[i\left(p-k-\frac{1}{2}\right)z\right] \quad (k=1,2,\ldots)$$

$$D_p(\alpha) = \sum_{n=0}^{p}C_1^p C_2^{p-n}\alpha^{p-2n}, \quad C_j^n = \gamma_j(\gamma_j-1)\ldots(\gamma_j-n+1)$$

$$\gamma_1 = {}^1\!/_2 - i\gamma, \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_1$$



Если берега разреза не нагружены $(f_0^{\pm}(x)=0)$, то в (1.18)

$$C_{11}=0, \quad C_{12}=(\sigma_y^{\infty}-i\tau_{xy}^{\infty})(c_1+c_2)^{-1} \tag{1.20}$$

$$\operatorname{Re} C=\frac{1}{4c_3}\left(\sigma_x^{\infty}+\sigma_y^{\infty}\frac{c_2-3c_1}{c_1+c_2}\right), \quad \operatorname{Im} C=\frac{2\mu_1\varepsilon^{\infty}}{c_3c_4}-\frac{c_1\tau_{xy}^{\infty}}{c_3(c_1+c_2)}$$

Разложим кусочно-однородные решения (1.3), (1.4), (1.11) в ряды по однородным решениям. Так как общее решение периодической задачи для составной плоскости в силу полноты системы тригонометрических функций можно записать в виде рядов по однородным решениям, то решение задачи (1.5), (1.6) представимо в форме

$$(u+iv)_{k2}=\sum_{t=0}^{\infty}(u+iv)_k^{\,n}, \quad n=(-1)^j t$$

$$2\mu_j(u+iv)_k^{\,0}=R_{k1}^{0j}x+R_{k2}^{0j}y+R_{k3}^{0j} \tag{1.21}$$

$$2\mu_j(u+iv)_k^{\,n}=in^{-1}e^{-ny}\{e^{-inx}(R_{k1}^{nj}-2ny\overline{R}_{k2}^{nj})-\varkappa_j e^{inx}R_{k2}^{nj}\} \qquad (n\neq 0)$$

где R_{ks}^{nj} — произвольные комплексные постоянные.

По теореме единственности Кирхгофа значения напряжений в решении (1.21) задачи (1.5), (1.6) при $y=0$ совпадают с решением (1.14). Приравнивая в этих решениях компоненты вектора напряжений во всем промежутке $[-\pi,\pi]$ и учитывая ортогональность тригонометрических функций, найдем значения коэффициентов R_{ks}^{nj}.

Опуская промежуточные выкладки, выпишем полученные разложения на прямых, параллельных действительной оси $y=l_j$ ($j=1,2$; $l_1>0$, $l_2<0$; $k=\pm1,\pm2,\ldots$)

$$2\mu_j\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)_k(x,l_j)=\eta_{\pm k}\{e^{ikx}[(T_{k1}+2kl_j\overline{T}_{k2})e^{kl_j}+\varkappa_j T_{k1}e^{-kl_j}]+ \tag{1.22}$$
$$+e^{-ikx}[\varkappa_j T_{k2}e^{kl_j}+(T_{k2}-2kl_j\overline{T}_{k1})e^{-kl_j}]\}+$$

$$+\sum_{s=1}^{2}\left\{T_{hs}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\mp nl_j}(\varkappa_j e^{\pm inx}P_{hs}^{n\mp}-e^{\mp inx}P_{hs}^{n\pm})\mp\right.$$

$$\left.\mp 2l_j\overline{T}_{hs}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{\mp nl_j}e^{\mp inx}\overline{P}_{hs}^{n\pm}\right\}, \quad P_{hs}^{n\pm}=\frac{\varepsilon_k}{4\pi i}\int_{L_2}P_{hs}(x)X^{+}(x)e^{\pm inx}dx$$

$$x\in[-\pi,\pi], \qquad \eta_r=1 \text{ при } r>1, \qquad \eta_r=0 \text{ при } r<0$$

где верхние знаки берутся при $j=1$, нижние — при $j=2$.

В случае одной щели согласно (1.19)

$$P_{k1}{}^{n\pm}=-\varepsilon_k e^{a\gamma}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p D_p(e^{ia})J_{k-p\pm n} \tag{1.23}$$

$$P_{k2}{}^{n\pm}=g\varepsilon_k e^{-a\gamma}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p D_p(e^{-ia})J_{-k-p-1\pm n},\quad J_k=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_2}X^+(x)e^{i(k+1/2)x}dx$$

Разложение решения (1.18) проводятся аналогично. Запишем его в форме

$$2\mu_j\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)_0(x,l_j)=R_{01}{}^j+\sum_{k=1}^{\infty}(e^{ikx}Q_{kj}{}^+ + e^{-ikx}Q_{kj}{}^-)\quad (R_{01}{}^2=R_{01}{}^1 m)$$

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_0(x,l_j)=\frac{1}{2\pi}(Y_j-iX_j)+\sum_{k=1}^{\infty}(e^{ikx}Z_{kj}{}^+ + e^{-ikx}Z_{kj}{}^-) \tag{1.24}$$

Здесь постоянная $R_{01}{}^1$ характеризует периодичность (квазипериодичность) перемещений по x; (X_j, Y_j) — главный вектор усилий, приложенных в полосе периодов при $y\to\infty$ $(j=1)$ и $y\to-\infty$ $(j=2)$. Значения коэффициентов $Q_{kj}{}^{\pm}$, $Z_{kj}{}^{\pm}$ нетрудно получить для каждого конкретного распределения нагрузок.

Например, если $N=1$, $a_1=-a$, $b_1=a$, $f_0{}^{\pm}(x)\equiv0$, при заданных напряжениях на бесконечности, с учетом (1.20) получим

$$R_{01}{}^1=(c_1\varkappa_1-c_2)C_{12}+c_3c_4C \tag{1.25}$$

$$Q_{k1}=C_0(e^{-a\gamma}J_{k-1}+2kl_1e^{a\gamma}\bar J_{-k})e^{-kl_1},\quad Q_{k1}{}^+=C_0\varkappa_1e^{a\gamma}J_{-k}e^{-kl_1}$$

$$Q_{k2}{}^+=-C_0(e^{-a\gamma}J_{-k-1}-2kl_2e^{a\gamma}\bar J_k)e^{kl_2},\quad Q_{k2}{}^-=C_0\varkappa_2e^{a\gamma}J_ke^{kl_2}$$

$$Z_{k1}{}^+=C_0e^{a\gamma}J_{-k}e^{-kl_1},\quad Z_{k1}{}^-=-C_0e^{-a\gamma}J_{k-1}e^{-kl_1}$$

$$Z_{k2}{}^+=-C_0e^{-a\gamma}J_{-k-1}e^{kl_2},\quad Z_{k2}{}^-=C_0e^{a\gamma}J_ke^{kl_2},\quad C_0=-{}^1/_2(c_1+c_2)C_{12}$$

2. Построенная P-система предназначена для решения разнообразных задач о периодических и двоякопериодических системах коллинеарных щелей, ослабляющих многослойную полосу, полуплоскость или плоскость. На границах этих областей можно задавать произвольные основные условия, на линиях контакта материалов — условия полного сцепления, проскальзывания или предельного трения; допустимы также условия подкрепления границ стрингерами, балками, винклеровским слоем. Методика нахождения коэффициентов в рядах по элементам P-систем, как известно, основывается на соотношениях ортогональности. Хотя число типов таких соотношений за последнее время увеличилось [4, 14] и в решения некоторых периодических задач [9, 10] P-системы неявно входили, до сих пор упругие области склеивались только торец в торец, без сдвига. Это позволяло решать, в частности, двоякопериодические задачи лишь в тех случаях, когда параллелограммом периодов был прямоугольник.

Ниже рассматривается задача с произвольным многослойным параллелограммом периодов. При этом плоскость разбивается не как обычно на параллелограммы, а на сдвинутые один относительно другого с постоянным шагом ω слои прямоугольников (фигура, a). Прямоугольник периодов (фигура, $б$) в свою очередь разбивается (штрихпунктирными линиями) на несколько прямоугольников, в каждом из которых имеется не более чем одна линия щелей, и, следовательно, решение в нем можно искать в рядах по элементам P-систем. В областях, где нет щелей (на фигуре *б* — ν_5, μ_5), вместо кусочно-однородных решений используются однородные решения.

Пусть $r_k^q(x, y)$ — q-я компонента вектор-функции (1.4), так что $r_k^1 = u_{k1}, \ldots, r_k^4 = \tau_{xyk1}$. Тогда нетрудно проверить соотношение ортогональности

$$\int_{-\pi}^{\pi} r_k^q(x, l_1) r_n^q(x+\omega, l_2)\, dx = 0 \qquad (q=1,\ldots,4;\ k^2 \neq n^2) \tag{2.1}$$

которое позволяет сопрягать решения на общих границах сдвинутых смежных прямоугольников. На внутренних границах прямоугольников решения сопрягаются при помощи соотношения (2.1) при $\omega=0$.

Заметим, что если щели расположены внутри однородной области (например, $\nu_2=\nu_1$, $\mu_2=\mu_1$ на фигуре *б*), то число линий сопряжения не уменьшается, но P-система становится проще. Если в прямоугольнике периодов нет щелей, задача решается в замкнутой форме. Подобная задача об изгибе однородной пластинки, лежащей на двоякопериодической системе точечных опор, решена в [15] в эллиптических функциях.

Покажем методику учета сдвига на примере решения простой антиплоской задачи. Пусть упругий прямоугольник периодов $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $l_1 \leqslant y \leqslant l_2$ однороден, не имеет щелей и сдвинут относительно соседнего прямоугольника по x на величину ω. Решение будем искать в виде

$$u_z(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_k e^{ikx} + \overline{T}_k e^{-ikx}) e^{ky} + f_1(x, y)$$

где $f_1(x, y)$ — соответствующее заданной нагрузке на прямоугольник решение периодической с периодом 2π задачи для всей плоскости, T_k — произвольные комплексные постоянные. Для удовлетворения граничным условиям

$$u_z(x, l_1) = u_z(x+\omega, l_2), \quad \tau_{zy}(x, l_1) = \tau_{zy}(x+\omega, l_2)$$

подставим в них решение, умножим обе части полученных равенств на e^{ikx} и интегрируем по x от $-\pi$ до π. Тогда в силу биортогональности систем $\{e^{ikx}\}$ и $\{e^{ik(x+\omega)}\}$ получим систему двух уравнений ($r=1, 2$; $k=0, 1, \ldots$; $k^\circ=0$ при $k=0$)

$$k^{r-1}[T_{-k}(e^{-kl_1} - e^{-ik\omega - kl_2}) - (-1)^r \overline{T}_k (e^{kl_1} - e^{-ik\omega + kl_2})] =$$

$$= \frac{(-1)^r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f_r(x, l_1) - f_r(x+\omega, l_2)] e^{ikx}\, dx, \qquad f_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)$$

Тем же путем в замкнутой форме решаются основные гармонические и бигармонические двоякопериодические задачи для слоистой плоскости.

Рассмотрим более сложную задачу о плоскости, склеенной из чередующихся полос двух видов с упругими постоянными ν_1, μ_1 и ν_2, μ_2, и ослабленной на линиях раздела материалов (через одну) двоякопериодической системой щелей. На фигуре *б* соответствующий прямоугольник периодов $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $l_2 \leqslant y \leqslant l_1$ ($l_1 > 0$, $l_2 < 0$) отмечен фигурной скобкой; в нем N щелей образуют множество L_1 на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $y=0$.

Пусть главный вектор заданных на L_1 напряжений равен нулю, напряжения на бесконечности равны σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0. Тогда граничные условия на кромках полосы $l_2 \leqslant y \leqslant l_1$ примут вид

$$(u+iv)(x, l_2) = (u+iv)(x+\omega, l_1), \quad x \in [-\pi, \pi] \tag{2.2}$$
$$(\sigma_y - i\tau_{xy})(x, l_2) = (\sigma_y - i\tau_{xy})(x+\omega, l_1), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Решение задачи (1.2), (1.17), (2.2) будем искать в рядах

$$u+iv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u+iv)_k \tag{2.3}$$

сразу удовлетворяя условиям (1.2), (1.17). При этом произвольные постоянные в (1.18) определяются равенствами

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0 \quad (y \to \pm\infty), \quad l_1\sigma_x^{\infty} - l_2\sigma_x^{-\infty} = \sigma_x^0 (l_1 - l_2) \tag{2.4}$$

Удовлетворим условиям (2.2). Подставим разложения (1.22) в ряд (2.3), а затем — в (2.2). В образовавшихся двойных рядах поменяем порядки суммирования, введем новые неизвестные

$$X_{k1} = T_{k1} e^{ik\omega} e^{kl_1}, \quad X_{k2} = \overline{T}_{k2} e^{ik\omega} e^{kl_1} \quad (k \geqslant 1) \tag{2.5}$$
$$X_{k1} = \overline{T}_{k1} e^{kl_2}, \quad X_{k2} = T_{k2} e^{kl_2} \quad (k \leqslant -1)$$

и умножим полученные равенства на e^{ikx}. Интегрируя по x от $-\pi$ до π и используя соотношение (2.1), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных X_{ks}. После элементарных преобразований из этой системы выделяются конечные соотношения ($s=1, 2$; $k=1, 2, \ldots$)

$$a_{s1}X_{k1} + a_{s2}X_{k2} + a_{s3}X_{-k1} + a_{s4}X_{-k2} = w_s \tag{2.6}$$
$$a_{s1} = 1 + \alpha_{s1} e^{-2kl_1} - \psi_s [e^{-2kl_1} + c_1(1-m)]$$
$$a_{s2} = 2kl_1[1 - c_1\psi_s(1-m)] - 2kl_2c_2c_4m^{2-s}, \quad a_{s3} = m^{2-s}[c_2(1-m) - 4kl_2e^{2kl_2}]$$
$$a_{s4} = -m^{2-s}[\alpha_{s2} + e^{2kl_2} + c_1c_3\psi_s + 4k^2l_2^2c_2(1-m)]$$
$$w_s = r_s + c_1\psi_s p_{k1} + 2kl_2c_2m^{2-s}, \quad \psi_s = (-1)^{s+1}(\alpha_{s1}e^{-kl_1}e^{ik\omega} + m^{2-s}e^{kl_2})$$
$$r_1 = mQ_{k2}^+ - Q_{k1}^- e^{ik\omega}, \quad r_2 = Z_{k2}^+ - Z_{k1}^+ e^{ik\omega}, \quad p_{k1} = m(Q_{k2}^+ - Z_{k2}^+) - e^{ik\omega}(Q_{k1}^+ - mZ_{k1}^+)$$
$$p_{k2} = e^{-ik\omega}(Q_{k1}^- - Z_{k1}^-) + mQ_{k2}^- - Z_{k2}^-, \quad \alpha_{1t} = \varkappa_t, \quad \alpha_{2t} = 1 \quad (t=1, 2)$$

В результате каждый коэффициент X_{ks} с отрицательным номером k выражается через пару коэффициентов X_{ks} с тем же, но положительным номером k

$$X_{-ks} = \sum_{t=1}^{2} \beta_{ts}^k X_{kt} + \rho_{ks}, \quad k=1, 2, \ldots \quad (s=1,2) \tag{2.7}$$
$$\beta_{ts}^k = O(1), \quad \rho_{ks} = O\{\exp(-kl_0)\}, \quad l_0 = \min(l_1 - l_2)$$

и число неизвестных в бесконечной системе уменьшается вдвое. Отделяя затем в ней действительные и мнимые части, получим систему уравнений относительно неизвестных Y_{ks} ($Y_{kj} + iY_{k, j+2} = X_{kj}$, $j=1, 2$):

$$\sum_{t=1}^{4} \sum_{n=1}^{\infty} m_{nt}^{ks} Y_{nt} = z_{ks} \quad (s=1,\ldots,4;\ k=1,2,\ldots) \tag{2.8}$$

$$m_{nr}^{kj} + im_{nr}^{k,j+2} = d_{kr}^j \delta_{nk} - e^{\mp kl_j}\theta_j q_{nr}^j \quad (r,j=1,2) \tag{2.9}$$

$$m_{n,r+2}^{k,j+2} - im_{n,r+2}^{kj} = \mp d_{kr}^j \delta_{nk} - e^{\mp kl_j}\theta_j q_{n,r+2}^j, \quad \theta_1 = e^{ik\omega}, \quad \theta_2 = 1$$

$$z_{kj} + iz_{k,j+2} = p_{kj} + e^{\mp kl_j}\theta_j \sum_{n=1}^{\infty} q_n^j, \quad q_n^j = e^{nl_2}(\overline{\rho}_{n1}P_{-n1}^{k\pm} + \rho_{n2}P_{-n2}^{k\pm})$$

$$d_{k1}{}^{1}=e^{-2kl_1}+c_1(1-m)+c_1c_3\beta_{12}{}^{k},\ d_{k2}{}^{1}=2kl_1c_1(1-m)+c_1c_3\beta_{22}{}^{k}$$

$$\bar{d}_{kr}{}^{2}=c_2c_4\delta_{r1}+\beta_{r2}{}^{k}e^{2kl_2}-(1-m)(\beta_{21}{}^{k}-2kl_2\beta_{22}{}^{k})$$

$$q_{nr}{}^{j}=P_{nr}{}^{k\pm}e^{-in\omega}e^{-nl_1}+e^{nl_2}(P_{-n1}{}^{k\pm}\bar{\beta}_{r1}{}^{n}+P_{-n2}{}^{k\pm})$$

$$q^{j}_{n,r+2}=P_{nr}{}^{k\pm}e^{-in\omega}e^{-l_1n}+(-1)^{r}e^{nl_2}(P^{k\pm}_{-n1}\bar{\beta}_{r1}{}^{n}-P^{k\pm}_{-n2}\beta_{r2}{}^{n})$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, верхние знаки берутся при $j=1$, нижние — при $j=2$.

В бесконечной системе (2.8) внедиагональные матричные элементы согласно (2.9) экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов. Следовательно, система относится к типу нормальных систем Пункаре — Коха [16]. Для таких систем доказано существование и единственность нормального решения, которое можно найти, например, методом редукции. При этом имеет место оценка $Y_{ks}=O[\exp(-kl_0)]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 620.
2. *Боговой В. Г., Нуллер Б. М.* Давление плоского кругового штампа на упругое полупространство с выемкой или включением.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 669.
3. *Нуллер Б. М.* О сжатии упругого слоя балочными плитами.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 364.
4. *Глаговский В. Б., Нахмейн Е. Л.* Расчет балочных плит, сцепленных с упругим слоем.— Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1975, т. 108, с. 124.
5. *Линьков А. М.* Интегральное уравнение плоской задачи теории упругости о двоякопериодической системе разрезов, нагруженных самоуравновешенными нагрузками.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 70.
6. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Интегральные уравнения плоской задачи теории трещин.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4, с. 728.
7. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. Сб. М.: Наука, 1972, с. 251.
8. *Фильштинский Л. А.* Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 5, с. 906.
9. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 53.
10. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения задач теории упругости для полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных периодическими системами щелей.— Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1975, т. 107, с. 14.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 700 с.
13. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 813.
14. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 333.
15. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Поперечный изгиб изотропной плоскости, опирающейся на двоякопериодическую систему точечных опор.— Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6, с. 1316.
16. *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. Одесса: Гос. изд-во Украины, 1922. 521 с.

Поступила в редакцию
15.I.1979