

УДК 539.3

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

ПОБЕДРЯ Б. Е., ПЕШЕНИН С. В.

(Москва)

Известно, что задача о равновесии упругого параллелепипеда была сформулирована Ламе в 1852 г. [1] и привлекла внимание многих механиков, математиков и инженеров. При решении задачи были использованы аналитические, численные, экспериментальные и полужэкспериментальные методы. (Обзор этих исследований см. в [2].) Эта задача, ставшая классической, в какой-то степени характеризует уровень развития теории упругости, ее математической строгости и показывает возможности вычислительной механики. На этой задаче можно проверить многие гипотезы, положенные в основу технической теории упругости, сопротивления материалов, теорий прочности. Наличие двухгранных и трехгранных углов в параллелепипеде делает эту задачу интересной и для проведения математических исследований.

В последнее время в связи с развитием вычислительной механики был пересмотрен вопрос о ценности так называемых «аналитических» решений. Стало ясно, что основная задача определения напряженно-деформированного состояния заключается в получении результатов с заранее заданной точностью при наименьших материальных и физических затратах.

В этой связи А. А. Ильюшин<sup>1</sup> предложил для основных канонических областей построение матриц, которые связывали бы значения перемещений со значениями напряжений в граничных точках каждой из этих областей. Эта матрица, получившая название матрицы Ильюшина, дает полную информацию для данной канонической области. Задача определения напряженно-деформированного состояния для областей, составленных из канонических, для которых известна матрица Ильюшина, сводится к решению небольшого числа алгебраических уравнений.

Вопрос о корректности построения матрицы Ильюшина и ее особенностях был рассмотрен в [3]. Используя матрицу Ильюшина для квадрата, удалось решить задачу о нахождении эффективных упругих характеристик композиционного материала [4], составленного в виде «шахматной доски» [5].

Ниже будет описан достаточно эффективный численный метод решения задачи Ламе об упругом параллелепипеде, который был использован при получении матрицы Ильюшина для упругого куба, и проанализированы некоторые упомянутые выше эффекты, связанные с этой задачей.

1. Вторая квазистатическая (или статическая) задача механики деформируемого твердого тела заключается в решении трех уравнений равновесия в некоторой области  $V$  [6]:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}^{\sim}(\mathbf{u}) + \mathbf{X} = 0 \quad (1.1)$$

при удовлетворении граничным условиям на поверхности  $\Sigma$

$$\mathbf{F}^{\sim}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s} \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения,  $\mathbf{F}^{\sim}$  — тензор-оператор связи между напряжениями  $\boldsymbol{\sigma}$  и деформациями  $\boldsymbol{\varepsilon}$  [7] (деформации считаются малыми):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}^{\sim}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla). \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Ильюшин А. А. Загадки механики твердых деформируемых тел. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 68.

Будем предполагать выполненными условия самоуравновешенности объемных  $X$  и поверхностных  $s$  сил.

Если оператор  $F^\sim$  является потенциальным [7], т. е. существует некоторый скалярный оператор  $W^\sim$ , зависящий от деформаций  $\varepsilon$ , такой, что  $\sigma = \partial W^\sim / \partial \varepsilon$ , то можно дать вариационную постановку задачи (1.1), (1.2) для лагранжиана  $L^\sim$

$$L^\sim = \Phi^\sim - \int_V Xu \, dV - \int_\Sigma su \, d\Sigma, \quad \Phi^\sim = \int_V W^\sim \, dV \quad (1.4)$$

закрывающуюся в разыскании стационарной точки лагранжиана [8]

$$DL^\sim(u, \delta u) = 0 \quad (1.5)$$

При некоторых ограничениях на оператор  $F^\sim$  [8] в этой стационарной точке  $u^*$  лагранжиан имеет минимум и к  $u^*$  сходятся последовательные приближения

$$B^\sim u^{(n+1)} = B^\sim u^{(n)} + \tau_{n+1} [\operatorname{div} F^\sim(u^{(n)}) + X] \quad (1.6)$$

где  $B^\sim$  — некоторый линейный оператор, обеспечивающий сходимость итерационного процесса (1.6),  $\tau_n$  — итерационные параметры.

В указанную схему укладывается достаточно широкий класс операторов  $F^\sim$ , в частности, описывающий теорию малых упругопластических деформаций Ильюшина [9], некоторые теории вязкоупругости [10] и даже отдельные случаи общей теории пластичности [11].

Здесь для простоты ограничимся случаем анизотропной неоднородной теории упругости, для которой операторы  $F^\sim$  и  $W^\sim$  имеют соответственно вид

$$F^\sim(\varepsilon) = C(x)\varepsilon, \quad W^\sim = 1/2 C_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (1.7)$$

где  $C$  — тензор модулей упругости, причем в дальнейшем все величины будем полагать безразмерными.

Для изотропного однородного тела операторы  $F^\sim$  и  $W^\sim$  имеют вид

$$F^\sim(\varepsilon) = \lambda \theta J + 2\mu \varepsilon, \quad W^\sim = 1/2 (\lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}) \quad (1.8)$$

где  $\theta = \varepsilon_{ii}$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные Ламе,  $J$  — единичный тензор.

Отметим, что вариационная постановка задачи (1.1), (1.2) справедлива и для случая обобщенного решения [8], которое в дальнейшем будем иметь в виду в силу отсутствия гладкости поверхности параллелепипеда, необходимой для существования классического решения.

2. Рассмотрим дискретизацию задачи (1.1), (1.2), т. е. построим ее разностный аналог, причем будем исходить из вариационной постановки, т. е. использовать вариационно-разностный метод построения разностной схемы<sup>2</sup>. В дальнейшем в качестве области  $V$  будем рассматривать параллелепипед.

Начало декартовой системы координат поместим в одной из вершин параллелепипеда, а оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  направим вдоль его ребер. Введем равномерную сетку, т. е. множество точек (узлов сетки) с координатами  $(i_\alpha - 1)h_\alpha$ ,  $i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , где  $h_\alpha$  — шаг сетки вдоль оси  $x_\alpha$ ,  $N_\alpha = l_\alpha/h_\alpha + 1$  — число узлов на ребре длиной  $l_\alpha$ , параллельном оси  $x_\alpha$ .

Далее обозначим

$$E^\sim u^h = u^h, \quad T_\alpha^\sim u^h(i_1, i_2, i_3) = u^h(i_1 + n\delta_{1\alpha}, i_2 + n\delta_{2\alpha}, i_3 + n\delta_{3\alpha}), \\ \partial_\alpha = (T_\alpha^\sim - E^\sim)/h_\alpha, \quad \partial_{\alpha+} = (E^\sim - T_\alpha^\sim)/h_\alpha, \quad \Lambda = \partial_{\alpha+} \partial_\alpha$$

<sup>2</sup> Дьяконов Е. Г. Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во МГУ, вып. 1. 242 с.

где  $u^h(i_1, i_2, i_3)$  — сеточная функция,  $E^\sim$  — тождественный оператор,  $\partial_\alpha$  — правая, а  $\partial_{\alpha^*}$  — левая разностные производные,  $\Lambda_\alpha$  — вторая разностная производная.

С помощью кубатурных формул введем разностные аналоги интегралов

$$\int_V u \varphi dV, \quad \int_\Sigma u \varphi d\Sigma$$

Обозначая

$$[u^h, \varphi^h]_\alpha = \frac{1}{2} \{ (u^h, \varphi^h)_\alpha + [u^h, \varphi^h]_\alpha \}, \quad [u^h \varphi^h]_{\alpha\beta} = [[u^h, \varphi^h]_\alpha]_\beta$$

$$(u^h, \varphi^h)_\alpha = \sum_{i_\alpha=2}^{N_\alpha} u^h \varphi^h h_\alpha, \quad [u^h, \varphi^h]_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u^h \varphi^h h_\alpha, \quad i_\beta, i_\gamma = \text{const}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta \neq \gamma)$$

получим по области  $V$  и по поверхности  $\Sigma$  разностные аналоги интегралов

$$[u^h \varphi^h] = [[ [u^h, \varphi^h]_{i_1} ]_2]_3 \quad (2.1)$$

$$[u^h, \varphi^h]_\Sigma = \sum_{\alpha=1}^3 \{ [u^h, \varphi^h]_{\beta\gamma} |_{i_\alpha=1} + [u^h, \varphi^h]_{\beta\gamma} |_{i_\alpha=N_\alpha} \}$$

Определим разностный аналог нормы

$$\|u^h\| = [u^h, u^h]^{1/2} \quad (2.2)$$

Чтобы получить разностный аналог лагранжиана, заменим в (1.4) интегралы по формулам (2.1) их разностными аналогами, а производные — разностными производными. Отметим, что разностный аналог интеграла по области  $V$  представляет сумму восьми слагаемых, каждое из которых есть тройная сумма, где суммирование ведется по  $i_1, i_2, i_3$ , причем  $i_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) принимают значения либо от единицы до  $N_\alpha - 1$ , либо от двух до  $N_\alpha$ . В первом случае производную  $\partial/\partial x_\alpha$  заменим правой, а во втором случае — левой разностной производной. Так, получим разностный аналог энергии деформации  $\Phi^h$ . В результате будем иметь

$$L^h = \Phi^h(u^h) - [X^h, u^h] - [s^h, u^h]_\Sigma \quad (2.3)$$

Если компоненты тензора  $C$  терпят разрывы на плоскостях, параллельных координатным плоскостям, то представим в виде объединения параллелепипедов  $\Pi_k$  область  $V = \cup \Pi_k$ , в которых тензор непрерывен. Тогда  $L^h = \sum L^h(\Pi_k)$ . Это равенство выражает аддитивность разностного аналога лагранжиана в случае непрерывного тензора  $C$  и служит определением  $L^h$  в случае, когда компоненты тензора  $C$  разрывны.

Для определения стационарной точки лагранжиана  $L^h$  из выражения (4.5) получим систему линейных алгебраических уравнений  $\partial L^h / \partial u_\beta(i_1, i_2, i_3) = 0$  ( $i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha; \alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), которую запишем так:

$$A^\sim u^h + f^h = 0, \quad (A^\sim u^h)_\beta = -\partial \Phi^h(u^h) / \partial u_\beta \quad (2.4)$$

Вид оператора  $A^\sim$  зависит от узла, в котором он рассматривается (во внутренних узлах  $A^\sim$  имеет один вид, на каждой грани — другой и т. д.). Однако из аддитивности  $\Phi^h$  следует, что достаточно знать вид оператора  $A^\sim$  только в вершинах. Действительно, проведем через произвольный внутренний узел три плоскости, соответственно параллельные координат-

ным плоскостям. Тогда параллелепипед разобьется на восемь параллелепипедов, а его объем  $V$  можно считать объединением объемов образующих его параллелепипедов  $\Pi_k$  ( $k=1, \dots, 8$ ). Следовательно

$$\Phi^{\sim h}(V) = \sum_{k=1}^8 \Phi^{\sim h}(\Pi_k), \quad A^{\sim} = \sum_{k=1}^8 A_k^{\sim}$$

где  $A_k^{\sim}$  — оператор  $A^{\sim}$  в  $k$ -й вершине. Аналогично, на гранях оператор  $A^{\sim}$  равен сумме четырех, а на ребрах — сумме двух операторов  $A_k^{\sim}$ , соответствующих тем вершинам, которые принадлежат данной грани или данному ребру. Функцию  $f^h$  найдем из соотношений (2.3), (2.4): во внутренних узлах  $f^h = X^h$ ; на гранях, перпендикулярных оси  $x_\alpha$ , функция  $f^h = X^h + 2s_\alpha^h/h_\alpha$ ; на ребрах, параллельных оси  $x_\alpha$  ( $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ), будем иметь  $f^h = X^h + 2(s_\beta^h/h_\beta + s_\gamma^h/h_\gamma)$ ; в вершинах

$$f^h = X^h + 2 \sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha^h/h_\alpha$$

Здесь  $s_\alpha^h$  — поверхностная нагрузка, действующая на грань, перпендикулярную оси  $x_\alpha$ .

Использование вариационно-разностного метода для построения разностной схемы обеспечивает ее устойчивость [12]. Поскольку  $\Phi^{\sim h}$  — квадратичная форма, то из (2.4) получим

$$2\Phi^{\sim h}(u^h) = [-A^{\sim}u^h, u], \quad 2\Phi^{\sim h}(u^h, \varphi^h) = [-A^{\sim}u^h, \varphi^h] \quad (2.5)$$

где  $\Phi^{\sim h}(u^h, \varphi^h)$  — симметричная билинейная форма, соответствующая квадратичной форме  $\Phi^{\sim h}(u^h)$ . Из (2.5) следуют самосопряженность оператора  $A^{\sim}$  и положительная определенность оператора  $-A^{\sim}$ :

$$[A^{\sim}u^h, \varphi^h] = [A^{\sim}\varphi^h, u^h], \quad [-A^{\sim}u^h, u^h] \geq 0 \quad (2.6)$$

Выше была рассмотрена вторая краевая задача теории упругости. Однако на части границы  $\Sigma$  могут быть заданы некоторые компоненты вектора перемещений  $u$ . Тогда в таких узлах по соответствующим направлениям первые уравнения (2.4) не рассматриваются. В качестве граничных условий имеем заданные компоненты вектора перемещений. Можно получить также разностный аналог краевой задачи теории малых упруго-пластических деформаций [9]. Для этого в (2.4) достаточно положить

$$C_{ijkl} = \lambda(\epsilon_u) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\epsilon_u) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \epsilon_u = (e_{ij} e_{ij})^{1/2} \quad (2.7)$$

$$\mu(\epsilon_u) = \mu(1 - \omega(\epsilon_u)), \quad \lambda(\epsilon_u) = K - 2/3 \mu(\epsilon_u), \quad e_{ij} = \epsilon_{ij}^{-1/3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

где  $K$  — модуль объемного сжатия,  $\epsilon_u$  — интенсивность деформаций,  $\omega(\epsilon_u)$  — функция пластичности Ильюшина [9].

3. Для решения разностной задачи (2.4) используем итерационный метод (1.6). Известно [13], что если  $-A^{\sim}$  и  $B^{\sim}$  — самосопряженные и положительно-определенные операторы, то наибольшая скорость сходимости итераций достигается при

$$\tau_n = 2 / \left\{ (\gamma_2 + \gamma_1) - (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2N} \right\} \quad (n=1, \dots, N) \quad (3.1)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  — постоянные эквивалентности операторов  $-A^{\sim}$  и  $B^{\sim}$  [13]:

$$\gamma_1 [B^{\sim}u^h, u^h] \leq [-A^{\sim}u^h, u^h] \leq \gamma_2 [B^{\sim}u^h, u^h] \quad (3.2)$$

Итерации проводятся циклами по  $N$  итераций в цикле. Скорость сходимости итерационного метода (1.6), (3.2) определяется величиной  $q_N$  [13]:

$$\|u^{h*} - u^{h(N)}\| \leq q_N \|u^{h*} - u^{h(0)}\| \quad (3.3)$$

$$q_N = 2\rho^N / (1 + \rho^{2N}), \quad \rho = (1 - \sqrt{\eta}) / (1 + \sqrt{\eta}), \quad \eta = \gamma_1 / \gamma_2$$

Поэтому оператор  $B^\sim$  должен быть достаточно легко обратим и его выбирают таким, чтобы отношение  $\eta$  не было слишком мало.

Здесь используется факторизованный оператор

$$B^\sim = \prod_{\alpha=1}^3 (E^\sim + \kappa R_\alpha^\sim), \quad R_\alpha^\sim = \begin{bmatrix} -\Lambda_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_\alpha \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

который обращается тремя последовательными прогонками по направлениям  $x_1, x_2, x_3$ . Вводя оператор  $R^\sim = \sum R_\alpha^\sim$  ( $\alpha=1, 2, 3$ ), получим, что  $\gamma_1 = \gamma_1^\circ c_1$ ,  $\gamma_2 = \gamma_2^\circ c_2$ , где константы  $\gamma_1^\circ, \gamma_2^\circ, c_1, c_2$  определяются из неравенств

$$c_1 [R^\sim u^h, u^h] \leq [-A^\sim u^h, u^h] \leq c_2 [R^\sim u^h, u^h] \quad (3.5)$$

$$\gamma_1^\circ [B^\sim u^h, u^h] \leq [R^\sim u^h, u^h] \leq \gamma_2^\circ [B^\sim u^h, u^h]$$

Константы  $c_1, c_2$  зависят от характера анизотропии тела, а также от вида граничных условий. Например, в случае первой краевой задачи для однородного изотропного параллелепипеда  $c_1 = \mu$ ,  $c_2 = \lambda + 2\mu$  [13]. Выбор оптимального итерационного параметра  $\kappa$  (при котором отношение  $\gamma_1^\circ / \gamma_2^\circ$  максимально) известен [13].

Описанный метод был реализован в виде программ на ФОРТРАНЕ (ЭВМ БЭСМ-6) для решения задач теории упругости о равновесии параллелепипеда, а также для решения плоской задачи теории упругости в прямоугольнике.

Рассмотрим решение задачи М. М. Филоненко-Бородича [14] о сжатии параллелепипеда  $l_{1,2}=1, l_3=2, N_{1,2}=9, N_3=17$  с упругими постоянными  $\nu=1/3, E=1$  ( $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона) куполообразной нагрузкой

$$s_{1,2}=0, s_3 = [1 - \cos(2\pi x_1)] [1 - \cos(2\pi x_2)] \text{ при } x_3=0$$

$$s_{1,2}=0, s_3 = -[1 - \cos(2\pi x_1)] [1 - \cos(2\pi x_2)] \text{ при } x_3=2$$

остальные грани свободны. Итерации по схеме (1.6), (3.1), (3.4) проводились циклами по  $N=8$  итераций в цикле. О сходимости итераций можно судить по значениям перемещений после каждого цикла итераций для некоторых точек параллелепипеда, которые приведены ниже

$n$	$h(n)$		$h(n)$	
	$u_1$ (1, 1, 1)	$u_3$ (1, 1, 1)	$u_1$ (9, 9, 1)	$u_3$ (9, 9, 1)
8	0,0406	0,3712	0,0004	1,2870
16	-0,0011	0,3883	0,0006	1,2652
24	-0,0002	0,3856	0,0006	1,2992
32	-0,0003	0,3879	0,0007	1,3027
40	-0,0003	0,3877	0,0007	1,3058
48	-0,0003	0,3879	0,0007	1,3062

Если ограничиться точностью до трех значащих цифр, то для получения решения достаточно четырех-пяти циклов. Отметим, что каждый цикл из восьми итераций занимает 60–62 с. Порядок решаемой при этом системы равен 4131. Проведем сравнение напряжений  $\sigma_{33}$  при  $x_3=1$  с дру-

гими решениями этой задачи [14—16]:

$x_1=0$	$x_1=0,25$	$x_1=0,5$	$x_1=0,25$	$x_1=0,5$	$x_1=0,5$
$x_2=0$	$x_2=0$	$x_2=0$	$x_2=0,25$	$x_2=0,25$	$x_2=0,5$
0,00	1,12	0,97	1,07	1,10	1,47
0,90	0,94	0,89	1,03	1,036	1,10
0,95	—	1,00	0,97	1,03	1,06
0,92	0,96	1,01	1,00	1,047	1,10

Первая строка соответствует решению М. М. Филоненко-Бородича [14], вторая — Л. Е. Мальцева, Н. П. Матвеева, В. П. Нетребко [15], третья — М. Мишонова [16], а последняя — предлагаемому решению.

Решение данной задачи подтверждает принцип Сен-Венана: при  $x_3=1$  распределение напряжений  $\sigma_{33}$  почти равномерно. Заметим, что в решении М. М. Филоненко-Бородича напряжение  $\sigma_{33}$  при  $x_3=1$  отличается от среднего напряжения, равного единице, на 47%. Для остальных решений это отличие не превышает 10%. Необходимо учесть, что поверхностные силы распределены существенно неравномерно: на гранях  $x_3=0$ ,  $x_3=2$  напряжение  $\sigma_{33}$  отличается от среднего значения на 300%.

4. Рассмотрим задачу о сжатии упругого кубика ( $l_x=l=1$ ,  $\alpha=1, 2, 3$ ) жесткими плитами без проскальзывания. Боковая поверхность свободна, граничные условия в этой задаче имеют вид

$$u=0, x_3=0, u_{1,2}=0, u_3=u_0, x_3=1 \tag{4.1}$$

Задача рассматривалась ранее для объяснения характера разрушения при сжатии [17—19].

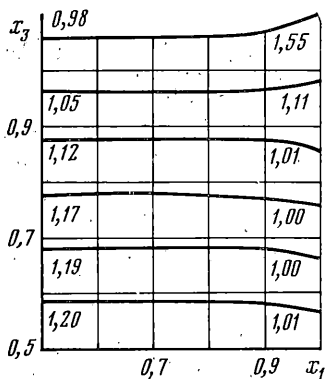
В опытах на сжатие каменных кубиков при отсутствии смазки между плитами и кубиком перемещения точек кубика вдоль плит затруднены вследствие больших сил трения. Поэтому решение задачи должно приблизительно описывать напряженно-деформированное состояние сжатого кубика. Известно [20], что характер разрушения существенно зависит от наличия или отсутствия смазки. В случае наличия смазки напряженное состояние близко к одноосному сжатию. Разрушение происходит от отрыва, и кубик распадается на ряд призм. При отсутствии смазки напряженное состояние неоднородно и кубик распадается на куски пирамидальной формы [20]. Интересно, что сопротивление сжатию, т. е. сжимающая сила, при которой происходит разрушение, в первом случае в два — четыре раза меньше, чем во втором [20].

Для объяснения различия в характере разрушения рассмотрим распределение напряжений в задаче о сжатии кубика без проскальзывания. Ниже приведены напряжения  $\sigma_{33}$  в некоторых точках кубика, полученные описанным в п. 2, 3 методом (верхняя строка), а также найденные Е. С. Кононенко [18] методом М. М. Филоненко-Бородича (нижняя строка). ( $\sigma_{33}^{(1)}$  соответствует точкам с координатой  $x_3=0,1$ , а  $\sigma_{33}^{(2)}$  — точками с координатой  $x_3=0,5$ .)

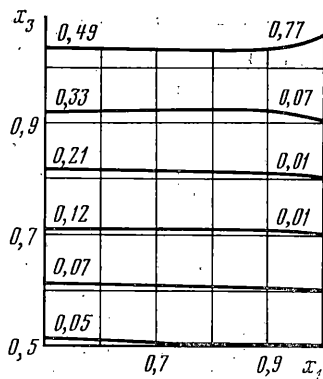
$x_1$	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5
$x_2$	0	0,125	0,25	0,5	0,25	0,5	0,5
$\sigma_{33}^{(1)}$	2,08	1,64	1,56	1,55	1,02	1,01	0,98
$\sigma_{33}^{(2)}$	1,00	1,19	1,42	1,21	0,71	0,94	1,01
$\sigma_{33}^{(1)}$	0,89	—	1,00	1,02	1,15	1,17	1,20
$\sigma_{33}^{(2)}$	1,00	—	0,99	0,97	0,98	1,21	1,11

Здесь напряжения отнесены к  $Eu_0/l$ . Напряжения  $\sigma_{33}$  в обоих решениях заметно различаются при  $x_3=0,1$ .

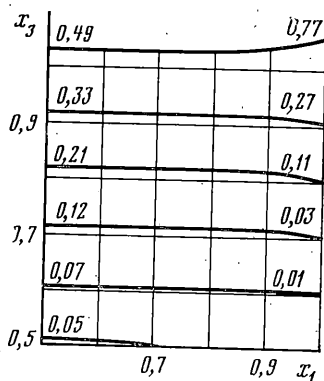
Графики  $\sigma_{33}(x_1)$ ,  $\sigma_{11}(x_1)$ ,  $\sigma_{22}(x_1)$ ,  $\sigma_{13}(x_1)$  при  $x_2=0,5$  для различных значений  $x_3$  приведены на фиг. 1—4. Характер распределения напряжений подтверждается решением аналогичной задачи в двумерном случае



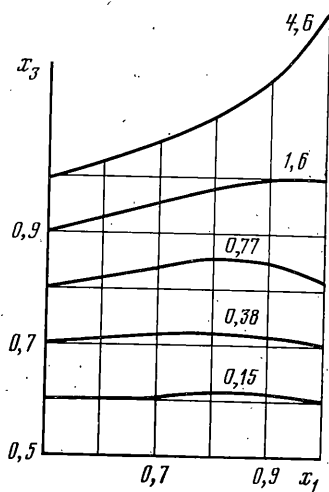
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

[19]. На контуре площадки давления напряжения имеют особенность (при численном решении напряжения при стремлении к границе площадки давления резко возрастают).

На фиг. 5, 6 показано распределение интенсивности напряжений  $\sigma_u$  и максимального удлинения  $\epsilon_{\max}$ . В кубике образуются две пирамидальные области (основаниями пирамид служат сжимающие плиты), в которых  $\epsilon_{\max}$  существенно меньше значений этой величины в средней части кубика. При приближении к границе площадки давления  $\sigma_u$  резко возрастает. Поэтому разрушение начинается на контуре площадки давления, по-видимому, от сдвиговых напряжений и развивается в косом направлении.

Итак, в случае однородного напряженного состояния наблюдается разрушение от растягивающих деформаций в поперечном направлении. В случае же неоднородного напряженного состояния разрушение, по-видимому, происходит от сдвиговых напряжений. При этом в средней части кубика растягивающие деформации при одинаковой сжимающей силе почти такие же (отличаются на 7%), как при однородном напряженном состоянии. Поэтому при применении классических теорий прочности [21], вероятно, нужно пользоваться различными критериями в зависи-

мости от того, является напряженное состояние однородным или неоднородным.

5. Как уже отмечалось, решение трехмерных задач теории упругости сопряжено со значительными трудностями. Так, решение конечно-разностным методом задачи о равновесии куба на БЭСМ-6 занимает около 4–5 мин, если количество узлов на ребре равно 11. Решение же плоской задачи о равновесии квадрата при том же количестве узлов на стороне занимает около 15–20 с. В ряде случаев нет необходимости решать трехмерную задачу. Ниже будет рассмотрен один случай, когда решение трехмерной задачи сводится к решению двух более простых задач. Однако

Таблица 1

$x_3$	0,5	0,375	0,25	0,125	0	$-\sigma_{11}^\circ, -\varepsilon_{11}^\circ$	$\Delta\sigma_{11}, \Delta\varepsilon_{11}$
$x_1=0,25, x_2=0,75$							
$-\sigma_{11}$	0,570	0,570	0,566	0,560	0,548	0,563	2,6%
$-\varepsilon_{11}$	0,448	0,446	0,443	0,437	0,426	0,437	2,5%
$x_1=0,25, x_2=0,5$							
$-\sigma_{11}$	0,264	0,264	0,261	0,256	0,245	0,25	5,6%
$-\varepsilon_{11}$	0,219	0,219	0,216	0,209	0,195	0,203	7,9%

сначала рассмотрим случай, когда в кубе возникает напряженное состояние, близкое к плоскому.

Пусть поверхностная нагрузка действует на грани куба, занимающего область  $0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha=1, 2, 3$ , параллельные оси  $x_3$ , причем эта нагрузка действует в плоскости  $x_1, x_2$  и не зависит от координаты  $x_3$ . Если при этом поверхностные силы являются линейными функциями координат  $x_1, x_2$ , то напряженное состояние куба будет плоским [22]. Однако, если поверхностные силы не являются линейными функциями, то напряженное состояние будет близко к плоскому. Покажем это на примере следующей задачи. Пусть поверхностная нагрузка имеет вид

$$\begin{aligned} s_1 &= x_2^2, & s_2 &= 0, & s_3 &= 0 & \text{при } x_1 &= 0 \\ s_1 &= 0, & s_2 &= x_1^2, & s_3 &= 0 & \text{при } x_2 &= 0 \\ s_1 &= -x_2^2, & s_2 &= 0, & s_3 &= 0 & \text{при } x_1 &= 1 \\ s_1 &= 0 & s_2 &= -x_1^2, & s_3 &= 0 & \text{при } x_2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

В табл. 1 приведено распределение напряжений и деформаций вдоль оси  $x_3$ . Здесь  $\varepsilon_{ij}^\circ, \sigma_{ij}^\circ$  — решение плоской задачи

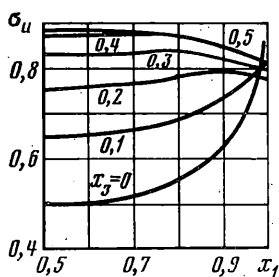
$$\Delta\varepsilon_{ij} = \max \left| \frac{\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^\circ}{\varepsilon_{ij}^\circ} \right|, \quad \Delta\sigma_{ij} = \max \left| \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\circ}{\sigma_{ij}^\circ} \right| \quad (5.2)$$

Напряжения  $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$  на два порядка меньше напряжений  $\sigma_{\alpha\alpha}, \alpha=1, 2$ . Напряженное состояние отличается от плоского не более чем на 8%.

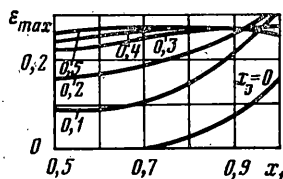
Далее рассмотрим прямую призму. Пусть на ее боковой поверхности также действует нагрузка, параллельная плоскости основания и равномерно распределенная по высоте. Напряженно-деформированное состояние в этом случае можно получить в виде суммы двух решений

$$\sigma_{ij}^\circ = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2, \quad \varepsilon_{ij}^\circ = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 \quad (5.3)$$





Фиг. 5



Фиг. 6

Первое — решение задачи плоского деформирования. При этом граничные условия на торцах не удовлетворяются. Пусть

$$P = \iint \sigma_{33}^1 dx_1 dx_2, \quad M_\alpha = E_{\alpha i} \iint x_i \sigma_{33}^1 dx_1 dx_2 \quad (\alpha, i=1,2) \quad (5.4)$$

Тогда второе решение в (5.3) будет решением задачи о растяжении и изгибе призмы торцевой нагрузкой  $s_3 = ax_1 + bx_2 + c$ , статически эквивалентной силе  $P = \{0, 0, P\}$  и моменту  $M = \{M_1, M_2, 0\}$ . Полученное решение удовлетворяет интегральным граничным условиям на торцах. При некотором удалении от торцов полученное решение по принципу Сен-Венана будет совпадать с точным.

Таблица 2

$x_3$	1	0,875	0,75	0,5	0,25	0	$-\epsilon_{11}^\circ, -\sigma_{33}^\circ$
$x_1=0,75, x_2=0,5$							
$-\epsilon_{11}$	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,32	0,33
$-\sigma_{33}$	0,019	0,019	0,017	0,013	0,004	0,000	0,021
$x_1=0,5, x_2=0,75$							
$-\epsilon_{11}$	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,46	0,48

В табл. 2 приведено сравнение полученного решения с решением трехмерной задачи теории упругости для призмы с квадратным основанием и высотой, равной удвоенной стороне основания. Нагрузка та же, что и в предыдущей задаче. Как видно из табл. 2, при удалении от оснований на расстояние около  $3/4$  длины стороны основания оба решения почти совпадают. В [23] решение рассматриваемой задачи предлагается искать в виде суммы двух решений: решения задачи в условиях плоской деформации и решения задачи об одноосном растяжении или сжатии (т. е. не учитывается изгибающий момент).

6. Существенным ограничением на возможность применения описанного метода решения как трехмерных, так и двумерных задач теории упругости является недостаточный объем оперативной памяти ЭВМ. В этой связи весьма эффективным является предложенный А. А. Ильиным метод блоков. Суть этого метода заключается в следующем: упругое тело сложной формы разбивается на тела (блоки) более простой формы; для каждого блока строится матрица (матрица: Ильюшина), связывающая значения поверхностных сил и перемещений в выбранных узлах границы данного блока; при помощи таких матриц задача теории упру-

гости с линейными граничными условиями для всего тела, сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

Выберем на границе блока конечное множество узлов  $x^k$  ( $k=1, \dots, M$ ) и введем векторы:  $U = \{u_1(x^1), \dots, u_r(x^1), \dots, u_r(x^M)\}$  — вектор перемещений,  $S = \{s_1(x^1), \dots, s_r(x^1), \dots, s_r(x^M)\}$  — вектор поверхностной нагрузки, в которых перечислены значения перемещений и поверхностных сил в выбранных узлах,  $r$  — размерность блока. Тогда при помощи матрицы Ильюшина  $A$  приближенно выразим вектор  $U$  через вектор  $S$  [3]:  $U=AS$ .

Матрица  $A$  может рассматриваться как дискретный аналог тензора Грина второй краевой задачи теории упругости. В [3] показано, что матрица  $A$  является неединственной, вырожденной, обоснован способ ее построения, определена зависимость от коэффициента Пуассона в случае плоской задачи. Если получены две матрицы  $A(v_1)$  и  $A(v_2)$  для двух различных коэффициентов Пуассона  $v_1$  и  $v_2$ , то матрица  $A(v)$  для произвольного коэффициента Пуассона  $v$  будет равна [3]:

$$A(v) = aA(v_1) + (1-a)A(v_2), \quad a = (v-v_2)/(v_1-v_2) \quad (6.1)$$

Отметим, что матрицы  $A(v_1)$ ,  $A(v_2)$ ,  $A(v)$  для плоского напряженного состояния соответствуют одному модулю Юнга, а для плоской деформации — одному модулю сдвига. Зависимость матрицы Ильюшина от коэффициента Пуассона в случае трехмерной задачи определить трудно. Однако в некоторых случаях напряжения  $\sigma_{ij}$  второй краевой задачи можно аппроксимировать выражением [24]:

$$\sigma_{ij} = a_{ij}(x) + \frac{1}{1+\beta_1\omega^*} b_{ij}(x) + \frac{1}{1+\beta_2\omega^*} c_{ij}(x) \quad (6.2)$$

$$\omega^* = (1-2\nu)/(1+\nu), \quad \beta_1 = 1/2, \quad \beta_2 = 2$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  — некоторые функции координат. После несложных преобразований получим следующую приближенную зависимость напряжений от коэффициента Пуассона в трехмерных задачах:

$$\sigma_{ij} = a_{ij}'(x) + b_{ij}'(x)\nu + c_{ij}'(x)/(1-\nu) \quad (6.3)$$

Зная напряжения, по закону Гука

$$\varepsilon_{ij} = [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}]/E \quad (6.4)$$

найдем деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ a_{ij}''(x) + b_{ij}''(x)\nu + c_{ij}''(x) \frac{1}{1-\nu} + d_{ij}(x)\nu^2 \right] \quad (6.5)$$

В [3] показано, что каждый столбец матрицы  $A$  является вектором перемещений  $U$  под действием определенно выбранной самоуравновешенной поверхностной нагрузки. Следовательно, приближенную зависимость матрицы Ильюшина от коэффициента Пуассона в случае трехмерной задачи можно представить в виде

$$A(v, E) = \frac{1}{E} \left( A_1 + A_2\nu + A_3\nu^2 + A_4 \frac{1}{1-\nu} \right) \quad (6.6)$$

где  $A_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, 4$ ) — некоторые постоянные матрицы.

Были построены две матрицы  $A$  для квадрата размерности  $80 \times 80$  (в случае плоской деформации матрицы соответствуют  $\nu=1/3$  и  $\nu=1/4$ ) и матрица  $A$  для куба размерности  $294 \times 294$  разностным методом, описанным в п. 2, 3. При помощи матрицы Ильюшина для квадрата в [5] определены осредненные модули композита, составленного в виде шахматной доски. Однако используемый в [5] метод позволяет найти и флуктуации напряжений [4].

Таблица 3

$\xi_1$	0+	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\xi_2=0^+$						
$\sigma_{11}$		-0,33	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37
$\sigma_{22}$		0,89	0,84	0,82	0,81	0,81
$\sigma_{12}$		0,17	0,08	0,03	0,01	0,00
$\xi_2=0,2$						
$\sigma_{11}$	-0,06	0,05	0,15	0,17	0,16	0,15
$\sigma_{22}$	2,46	1,69	1,20	0,99	0,89	0,86
$\sigma_{12}$	0,21	0,36	0,25	0,12	0,05	0,00
$\xi_2=0,5$						
$\sigma_{11}$	-0,04	0,09	0,19	0,28	0,34	0,35
$\sigma_{22}$	2,03	1,74	1,41	1,16	1,00	0,95

Таблица 4

$\xi_1$	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0-
$\xi_2=0^+$						
$\sigma_{22}$	0,81	0,81	0,82	0,84	0,89	
$\sigma_{11}$	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,04	
$\sigma_{12}$	0,00	0,01	0,03	0,08	0,17	
$\xi_2=0,2$						
$\sigma_{11}$	-0,13	-0,13	-0,13	-0,12	-0,10	-0,06
$\sigma_{22}$	0,79	0,79	0,77	0,74	0,66	0,48
$\sigma_{12}$	0,00	0,01	0,04	0,08	0,14	0,21
$\xi_2=0,5$						
$\sigma_{11}$	-0,18	-0,18	-0,17	-0,14	-0,09	-0,04
$\sigma_{22}$	0,77	0,76	0,72	0,65	0,54	0,40

Выберем начало декартовой системы координат в углу одного из квадратов, а оси  $x_1, x_2$  направим вдоль его сторон. В уравнении равновесия (1.1), (1.7) рассматриваемой среды коэффициенты

$$C_{ijkl}(x) = \lambda(x) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(x) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

будут кусочно-постоянными, периодическими функциями координат. Выделим ячейку периодичности  $\Omega$ , состоящую из четырех квадратов, примыкающих к началу координат. Пусть ее сторона, отнесенная к размеру всего тела, равна  $2\varepsilon$ . В [4] решение уравнений равновесия ищется в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , причем в нулевом приближении перемещения и напряжения имеют вид

$$u_i = v_i + \varepsilon N_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad \sigma_{ij} = H_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \quad (ijpq=1,2) \quad (6.7)$$

$$H_{ijpq} = C_{ijpq} + C_{ijkl} \frac{\partial N_{pqk}}{\partial \xi_l}, \quad \xi_i = \frac{x_i}{\varepsilon} \quad (6.8)$$

Функции  $N_{pqk}$ , входящие в (6.7), (6.8), определяются как решение уравнений

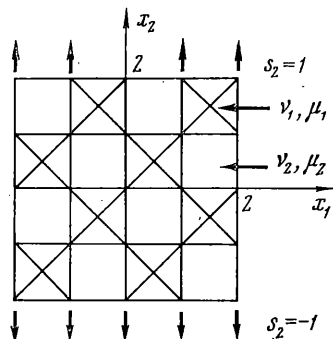
$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial N_{pqk}}{\partial \xi_l} \right) = - \frac{\partial C_{ijpq}}{\partial \xi_j} \quad (6.9)$$

а функция  $v$  удовлетворяет уравнению

$$h_{ijkl} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_l} + X_i = 0, \quad h_{ijkl} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} H_{ijkl}(\xi) d\Omega \quad (6.10)$$

Функция  $v$  представляет перемещение однородной анизотропной среды с эффективным тензором модулей упругости  $h_{ijkl}$  и является гладкой составляющей перемещения  $u$ . Так как модули  $C_{ijkl}$  — кусочно-постоянные функции координат, то правая часть в уравнении (6.9) представляет собой объемные силы, распределенные вдоль границ квадратов. Следовательно, напряжения терпят разрыв на этих границах, причем величина скачка напряжений в каждой точке границы определяется правой частью уравнения (6.9). Таким образом, для решения уравнений (6.9) надо решить в каждом из отдельных квадратов однородные уравнения Ламе при заданном на границе между ними скачке напряжений и условии непрерывности перемещений. Эта задача в [5] решена при помощи матрицы Ильюшина. На границе каждого квадрата ячейки периодичности были определены функции  $N_{pqk}$ ,  $p, q, k=1, 2$ , а затем найдены эффективные модули  $h_{ijkl}$  (в (6.10) интегрирование по  $\Omega$  сводится к интегрированию по границам четырех квадратов ячейки периодичности).

Для определения напряжений найдем функции  $N_{pqk}$  во внутренних точках квадратов, используя формулы Сомильяны. Это можно сделать, так как на границе каждого квадрата известны и перемещения и поверхностные силы. Тогда напряжения  $\sigma_{ij}$  найдем по формулам (6.7), (6.8). В табл. 3, 4 приведены напряжения, возникающие при растяжении рас-



Фиг. 7

Таблица 5

$x_1$	0+	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x_2=0+$		1,36	0,91	0,79	0,76	0,75
$x_2=0,2$	2,67	1,69	1,25	1,03	0,93	0,90
$x_2=0,5$	2,11	1,74	1,42	1,19	1,04	1,00

Таблица 6

$x_1$	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0-
$x_2=0$	0,83	0,83	0,83	0,83	0,82	
$x_2=0,2$	0,80	0,80	0,77	0,74	0,66	0,49
$x_2=0,5$	0,77	0,76	0,72	0,65	0,55	0,39

сматриваемой среды вдоль оси  $x_2$  равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности, равной единице, удаленной в бесконечность. Для этой задачи нулевое приближение (6.7) является точным решением. Упругие постоянные материалов равны  $\nu_1=0,3$ ,  $\mu_1=4$  и  $\nu_2=0,1$ ,  $\mu_2=1$ .

В табл. 5, 6 для сравнения приведены напряжения  $\sigma_{22}$ , возникающие при растяжении неоднородного квадрата, показанного на фиг. 7. Это решение получено описанным в п. 2, 3 разностным методом. Сравнение пока-

зывает, что напряжения в задаче, показанной на фиг. 7, достаточно хорошо совпадают с напряжениями, определяемыми формулой (6.7).

Таким образом, нулевое приближение (6.7) хорошо описывает напряженное состояние неоднородной среды на расстоянии порядка размера ячейки периодичности от границы области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций. М.: Высшая школа, 1972. 752 с.
2. Сулова Н. Н. Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда.— В кн.: Итоги науки и техники. Т. 13. Сер. механика твердого деформированного тела. М.: ВИНТИ АН СССР, 1980. с. 187.
3. Победря В. Е., Шешенин С. В. О матрице влияния.— Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1979, № 6, с. 76.
4. Победря В. Е., Горбачев В. И. О статических задачах упругих композитов.— Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1977, № 5, с. 101.
5. Шешенин С. В. Осредненные модули одного композита.— Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1980, № 6, с. 78.
6. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 286 с.
7. Победря В. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 214 с.
8. Победря В. Е. Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела.— ПММ, 1979, т. 43, № 3, с. 531.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. М.—Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 376 с.
10. Ильюшин А. А., Победря В. Е. Математическая теория термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 270 с.
12. Белузина И. Г. Разностные схемы для решения некоторых задач статической теории упругости в анизотропном случае.— В сб.: Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1972, вып. 19. с. 123.
13. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
14. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях.— ПММ, 1951, т. 15, № 2, с. 137.
15. Мальцев Л. Е., Матвеев Н. П., Петребко В. П. Об одном видоизменении вариационного метода Папковича—Филоненко-Бородича решения пространственных задач теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6, с. 133.
16. Мишонов М. Общ метод за решение на пространственота задача на еластичността за параллелепипеда.— В кн.: Изв. Техн. ин-та Бълг. АН. София, 1960, кн. 9—10, с. 15.
17. Фепплъ А., Фепплъ Л. Сила и деформация. Т. 1. Прикладна теория упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1933. 420 с.
18. Кононенко Е. С. Расчет напряжений в кубическом образце при сжатии между плитами.— В сб.: Исследования по теории сооружений. М.: Госстройиздат, 1957, вып. 7. 437 с.
19. Гончаров И. Г. Прочность каменных материалов в условиях различных напряженных состояний. М.—Л.: Госстройиздат, 1960. 124 с.
20. Фепплъ А. Техническая механика. Т. 3. Сопrotивление материалов. М.—Л.: ОНТИ, 1937. 336 с.
21. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопrotивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
22. Ильюшин А. А., Ломакин В. А., Шмаков А. П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1979. 200 с.
23. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 1. Справочник. / Под ред. Биргера И. А., Пановко Я. Г. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
24. Победря В. Е. О зависимости решения задачи теории упругости от упругих постоянных.— Проблемы прочности, 1972, № 3, с. 63.

Поступила в редакцию  
6.VIII.1980