

УДК 531.8

ВЛИЯНИЕ НАКЛОНА РУЛЕВОЙ ОСИ И ВЫНОСА ПЕРЕДНЕГО КОЛЕСА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ВЕЛОСИПЕДА

ДИКАРЕВ Е. Д., ДИКАРЕВА С. Б., ФУФАЕВ Н. А.

(Горький)

В работе [1] выведены уравнения движения управляемого и неуправляемого велосипеда и исследована устойчивость движения упрощенных моделей. Упрощение модели состояло в пренебрежении углом наклона рулевой оси λ и выносом переднего колеса σ . Так как у реального велосипеда угол наклона λ и вынос σ обычно не равны нулю, представляет интерес исследовать устойчивость движения неуправляемого велосипеда в зависимости от величины этих параметров.

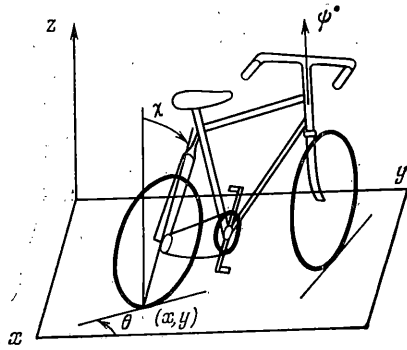
В предлагаемой работе уточняются уравнения движения неуправляемого велосипеда [1]. В результате исследования этих уравнений в пространстве параметров σ , λ , V , где V — скорость движения велосипеда, выделяется область устойчивого движения.

В отношении динамики качения велосипед и мотоцикл являются однотипными машинами, поэтому все рассмотрение применимо и к мотоциклу.

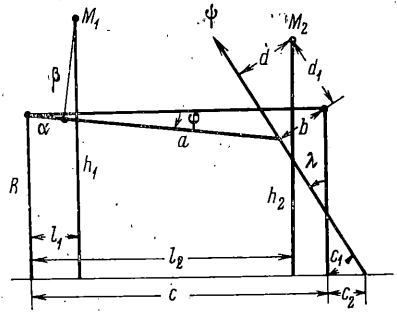
1. Рассмотрим модель велосипеда с жесткими колесами. Согласно обозначениям на фиг. 1 и 2, координаты центров масс задней M_1 и передней M_2 частей велосипеда выражаются через обобщенные координаты x , θ , χ , ψ с точностью до малых членов второго порядка:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + h_1 \chi - l_1 \theta \\ y_1 &= y + h_1 \chi \theta + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) l_1 + (h_1 - R) \left(\frac{\sin \lambda}{2} \psi^2 - \chi \psi\right) \frac{c_1}{c} \\ z_1 &= h_1 \left(1 - \frac{\chi^2}{2}\right) - l_1 \frac{c_1}{c} \left(\frac{\sin \lambda}{2} \psi^2 - \chi \psi\right) \\ x_2 &= x + h_2 \chi - l_2 \theta - d \psi \\ y_2 &= y + h_2 \chi \theta + l_2 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - d \psi \theta + \left[(h_2 - R) \frac{c_1}{c} \sin \lambda - d \cos \lambda\right] \frac{\psi^2}{2} - \\ &\quad - (h_2 - R) \frac{c_1}{c} \chi \psi \\ z_2 &= h_2 \left(1 - \frac{\chi^2}{2}\right) - \left(l_2 \frac{c_1}{c} + d\right) \left(\frac{\sin \lambda}{2} \psi^2 - \chi \psi\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь использованы обозначения: R — радиус колеса [м], c — база велосипеда [м], d — расстояние от центра масс передней части велосипеда до рулевой оси [м], b — расстояние от центра переднего колеса до рулевой оси [м], δ — коэффициент вязкого трения в рулевой колонке [$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$], λ — угол наклона рулевой оси относительно вертикали [рад], V — скорость движения велосипеда [$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$], c_2 — вынос переднего колеса, $c_1 = c_2 \cos \lambda$ [м], $\sigma = c_2 \cdot c^{-1}$ — безразмерный вынос переднего колеса, g — ускорение свободного падения [$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$], F — функция диссипации Рэлея, U — потенциальная энергия велосипеда с седоком, m_1 — масса задней части велосипеда с седоком [кг], l_1 , h_1 — координаты центра масс M_1 задней части [м], A_1 , B_1 — центральные моменты инерции относительно горизонтальной оси и перпендикулярной к ней оси, которые лежат в плоскости заднего колеса [$\text{кг} \cdot \text{м}^2$], D_1 — центробеж-



Фиг. 1



Фиг. 2

ный момент инерции относительно этих осей [кг·м²], C_1 — момент инерции заднего колеса относительно его оси собственного вращения [кг·м²], T_1 — кинетическая энергия задней части велосипеда с седлом.

Параметры передней части велосипеда обозначены теми же буквами с двойкой в индексе.

$$\begin{aligned} l_1 &= \alpha \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0, & h_1 &= R - \alpha \sin \varphi_0 + \beta \cos \varphi_0 \\ l_2 &= a \cos \varphi_0 + d \cos \lambda - d_1 \sin \lambda, & h_2 &= R - a \sin \varphi_0 + d \sin \lambda + d_1 \cos \lambda \\ d &= h_2 \sin \lambda + (l_2 - c) \cos \lambda - c_1 \end{aligned}$$

Уточнение уравнений движения велосипеда и мотоцикла, полученных в [1], связано с тем, что в выражении угла φ через ψ , χ следует принять во внимание члены разложения в степенной ряд по ψ , χ с точностью до малых величин второго порядка. В этом приближении угол φ выражается соотношением

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{c_1}{2c} (\psi^2 \sin \lambda - 2\psi\chi) \quad (1.2)$$

Заметим, что в работах [1, 2] выражение φ было получено лишь с точностью до малых членов первого порядка включительно. Но из (1.2) следует, что в этом приближении угол φ оказывается постоянным.

С учетом (1.2) кинетическая энергия T_1 задней и T_2 передней частей велосипеда имеет вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left[(\dot{x} - l_1 \dot{\theta} + h_1 \dot{\chi})^2 - 2V(l_1 \dot{\theta} - h_1 \dot{\chi}) \dot{\theta} + 2Vh_1 \dot{\chi} \dot{\theta} + \right. \\ &+ 2V \frac{c_1}{c} (h_1 - R) (\sin \lambda \psi \dot{\psi} - \dot{\psi} \dot{\chi} - \dot{\chi} \dot{\psi}) \left. \right] + \frac{1}{2} (A_1 \dot{\chi}^2 - 2D_1 \dot{\chi} \dot{\theta} + B_1 \dot{\theta}^2) + \\ &+ \frac{VC_1}{R} \dot{\chi} \dot{\theta} \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} + h_2 \dot{\chi} - l_2 \dot{\theta} - d \dot{\psi})^2 + m_2 V \left\{ (h_2 \dot{\chi} - l_2 \dot{\theta} - d \dot{\psi}) \dot{\theta} + \right. \\ &+ \left[\left(\frac{c_1 (h_2 - R)}{c} \sin \lambda - d \cos \lambda \right) \psi - d \dot{\theta} - \frac{c_1 (h_2 - R)}{c} \dot{\chi} \right] \dot{\psi} + \\ &+ \left[h_2 \dot{\theta} - \frac{c_1 (h_2 - R)}{c} \dot{\psi} \right] \dot{\chi} \left. \right\} + \frac{1}{2} [A_2 (\dot{\chi} - \dot{\psi} \sin \lambda)^2 + \\ &+ 2D_2 (\dot{\chi} - \dot{\psi} \sin \lambda) (\dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \lambda) + B_2 (\dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \lambda)^2] - \\ &- \frac{C_2 V}{R} [\dot{\psi} \dot{\chi} \cos \lambda + \dot{\theta} (\dot{\psi} \sin \lambda - \dot{\chi})] \end{aligned}$$

С той же степенью приближения потенциальная энергия велосипеда определяется выражением

$$U = -\frac{g}{2} \left[h\chi^2 + \left(m_2 d + \frac{lc_1}{c} \right) (\psi^2 \sin \lambda - 2\psi\chi) \right]$$

Функция Лагранжа $L = T_1 + T_2 - U$. Введем оператор $L_q = (d/dt) (\partial L / \partial \dot{q}) - (\partial L / \partial q)$ и вычислим $L_x, L_\chi, L_\theta, L_\psi$:

$$L_x = m\ddot{x} - l\ddot{\theta} + h\ddot{\chi} - m_2 d\ddot{\psi}, \quad L_\chi = h\ddot{x} - J_{12}\ddot{\theta} - V(C_1^\circ + C_2^\circ)\dot{\theta} + J_4\ddot{\chi} - gh\chi - J_3\ddot{\psi} - VC_2^\circ \cos \lambda \dot{\psi} + g \left(m_2 d - \frac{lc_1}{c} \right) \dot{\psi} \quad (1.3)$$

$$L_\theta = -l\ddot{x} + J_2\ddot{\theta} - J_{12}\ddot{\chi} + V(C_1^\circ + C_2^\circ)\dot{\chi} + J_4\dot{\psi} - \dot{\psi} C_2^\circ V \sin \lambda$$

$$L_\psi = -m_2 d\ddot{x} + J_4\ddot{\theta} + VC_2^\circ \sin \lambda \dot{\theta} - J_3\ddot{\chi} + C_2^\circ V \cos \lambda \dot{\chi} + g \left(m_2 d + \frac{lc_1}{c} \right) \dot{\chi} + J\ddot{\psi} - g \left(m_2 d + \frac{lc_1}{c} \right) \sin \lambda \dot{\psi}$$

Здесь введены следующие обозначения: $m = m_1 + m_2$ — масса всей системы (велосипед, седок)

$$l = m_1 l_1 + m_2 l_2, \quad h = m_1 h_1 + m_2 h_2$$

$$J = m_2 d^2 + A_2 \sin^2 \lambda - D_2 \sin 2\lambda + B_2 \cos^2 \lambda$$

$$J_1 = m_1 h_1^2 + A_1 + m_2 h_2^2 + A_2, \quad J_2 = m_1 l_1^2 + B_1 + m_2 l_2^2 + B_2$$

$$J_3 = m_2 h_2 d + A_2 \sin \lambda - D_2 \cos \lambda, \quad J_4 = m_2 d l_2 - D_2 \sin \lambda + B_2 \cos \lambda$$

$$J_{12} = m_1 h_1 l_1 + D_1 + m_2 h_2 l_2 - D_2, \quad C_1^\circ = C_1 R^{-1}, \quad C_2^\circ = C_2 R^{-1}$$

Согласно уравнениям кинематических связей, отражающих качение колес без проскальзывания

$$\dot{x} + V\dot{\theta} = 0, \quad c\dot{\theta} = c_1\dot{\psi} + \dot{\psi} V \cos \lambda \quad (1.4)$$

уравнения динамики рассматриваемой модели велосипеда можно записать в виде

$$L_x = 0, \quad c \left(L_\psi + \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}} \right) + c_1 L_\theta = 0$$

Используя выражения (1.3), можно исключить из них параметры x и θ при помощи уравнений неголономных связей (1.4), после чего уравнения движения примут вид

$$a_0 \ddot{\chi} - a_1 \dot{\chi} - a_2 \ddot{\psi} - a_3 V \dot{\psi} + (a_4 - a_5 V^2) \dot{\psi} = 0$$

$$b_0 \ddot{\psi} + b_1 V \dot{\psi} + (b_2 V^2 - b_3) \dot{\psi} - b_4 \ddot{\chi} + b_5 V \dot{\chi} + b_6 \chi = 0 \quad (1.5)$$

Здесь выражения коэффициентов a_i, b_i совпадают с соответствующими выражениями в работе [1]. Исключение составляют только коэффициенты a_4, b_3, b_6 , в которых сомножитель $m_2 d$ заменяется на $m_2 d + lc_1 / c$. В этом и состоит уточнение уравнений движения велосипеда.

2. Исследуем устойчивость прямолинейного движения неуправляемого велосипеда. Уравнения (1.5) описывают движение изображающей точки в пространстве конфигураций χ, ψ , в котором состояние равновесия в начале координат $\chi = \psi = 0$ соответствует прямолинейному движению неуправляемого велосипеда. Устойчивость этого состояния определяется корнями характеристического уравнения четвертого порядка

$$\alpha_0 p^4 + \alpha_1 p^3 + (\alpha_2 - \varepsilon \alpha_3) p^2 + (\alpha_4 - \varepsilon \alpha_5) p + \varepsilon (\varepsilon \alpha_6 - \alpha_7) = 0 \quad (2.1)$$

$$\alpha_0 = a_0 b_0 - a_2 b_4, \quad \alpha_1 = a_0 b_1 + a_2 b_5 - a_3 b_4$$

$$\alpha_2 = a_0 b_2 + a_3 b_5 - a_5 b_4, \quad \alpha_3 = a_1 b_0 + a_0 b_3 - a_2 b_6 - a_4 b_4$$

$$\alpha_4 = a_5 b_5, \quad \alpha_5 = a_1 b_1 + a_4 b_5 - a_3 b_6, \quad \alpha_6 = a_1 b_3 - a_4 b_6$$

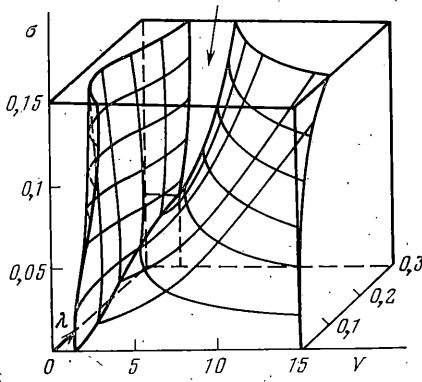
$$\alpha_7 = a_1 b_2 - a_5 b_6, \quad \varepsilon = 1 / V$$

Величины a_i, b_i определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= cJ_1, & a_1 &= cgh, & a_2 &= cJ_3 + c_1J_{12} \\
 a_3 &= (J_{12} + cC_2^\circ) \cos \lambda + c_1(h + C_1^\circ + C_2^\circ), & a_4 &= cg \left(m_2d + \frac{c_1}{c} l \right) \\
 a_5 &= (h + C_1^\circ + C_2^\circ) \cos \lambda, & b_0 &= cJ + 2c_1J_4 + \frac{c_1^2}{c} J_2, & b_1 &= J_4 \cos \lambda + \\
 & + c_1 \left(m_2d + \frac{1}{c} J_2 \cos \lambda \right) + \frac{lc_1}{c} + c\delta_1, & b_2 &= \left(m_2d + C_2^\circ \sin \lambda + \frac{lc_1}{c} \right) \cos \lambda \\
 b_3 &= cg(m_2d + lc_1/c) \sin \lambda, & b_4 &= cJ_3 + c_1J_{12} \\
 b_5 &= cC_2^\circ \cos \lambda + c_1(C_1^\circ + C_2^\circ), & b_6 &= cg \left(m_2d + \frac{lc_1}{c} \right), & \delta_1 &= \frac{\delta}{V}
 \end{aligned}$$

Зафиксируем все параметры рассматриваемой системы, за исключением угла наклона рулевой оси λ , выноса переднего колеса σ и скорости движения велосипеда V , которые будем изменять в следующих пределах: $0 < \lambda < 0,3$ рад, $0 < \sigma < 0,15$, $0 < V < 15$ м/с.

Пусть остальные параметры имеют значения: $R=0,35$ м, $l_1=0,4$ м, $c=1,04$ м, $l_2=0,9$ м, $g=9,8$ м/с², $A_1=3,3$ кг·м², $m_1=80$ кг, $A_2=0,036$ кг·м², $m_2=2,7$ кг, $B_1=6,7$ кг·м², $h_1=0,9$ м, $B_2=0,22$ кг·м², $h_2=0,5$ м, $C_1=C_2=0,5$ кг·м².



Фиг. 3

При помощи критерия Рауса — Гурвица с использованием ЭЦВМ М-220 в пространстве параметров λ, σ, V были построены границы области устойчивости, изображенные на фиг. 3, где стрелка указывает область устойчивости.

При построении границ находились значения величин V, σ, λ , удовлетворяющие уравнениям

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 - \varepsilon \alpha_3 = 0 \quad (2.2)$$

$$\alpha_4 - \varepsilon \alpha_5 = 0, \varepsilon \alpha_6 - \alpha_7 = 0$$

$$(\alpha_4 - \varepsilon \alpha_5) [\alpha_1 (\alpha_2 - \varepsilon \alpha_3) - \alpha_0 (\alpha_4 - \varepsilon \alpha_5)] - \varepsilon (\varepsilon \alpha_6 - \alpha_7) \alpha_1^2 = 0$$

которые получаются при обращении условий Рауса — Гурвица в равенства.

Приведенные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Прямолинейное движение неуправляемого велосипеда устойчиво при любых соотношениях физических параметров лишь на конечном интервале скоростей $V_1 < V < V_2$, где минимальное V_1 и максимальное V_2 значения скоростей определяются на фиг. 3 как точки пересечения прямой $\lambda = \text{const}, \sigma = \text{const}$ с границами области устойчивости.

2. Для того чтобы получить движение, устойчивое на наибольшем интервале скоростей, необходимо стремиться уменьшить угол λ наклона рулевой оси, сохраняя при этом достаточно большой величину выноса σ переднего колеса.

3. Полученные границы области устойчивости дают возможность конструктору выбрать для данной модели велосипеда значения наклона рулевой оси λ и выноса переднего колеса σ так, чтобы обеспечить наиболь-

ший запас устойчивости. Велосипед с такими параметрами будет обладать, по-видимому, и наилучшей управляемостью.

4. Построение границ области устойчивого движения при различных значениях коэффициента вязкого трения в рулевой колонке δ показало, что его величина не оказывает существенного влияния на поведение границ области устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость неуправляемого и управляемого велосипеда и мотоцикла.— Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 2, с. 12.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

Поступила в редакцию
5.II.1979