

УДК 531.3

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ МАЯТНИКОМ

ЗАРЕМБА А. Т.

(Москва)

Рассматривается задача об оптимальном по быстродействию перемещении маятника, управляемого по скорости, из произвольного начального состояния с гашением колебаний в конце процесса. Предполагается, что на скорость точки подвеса маятника наложено ограничение общего вида. С использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина [1] в трехмерном фазовом пространстве строится поверхность переключений — множество точек, в которых изменяется управляющая переменная.

Ранее задача синтеза линейной системы третьего порядка с двумя комплексно-сопряженными корнями рассматривалась в [2–8]. Квазиоптимальные поверхности переключений: «внутренняя» — в окрестности начала координат и «внешняя», построены в [2], где также для ряда примеров был исследован вопрос о близости решений при строго оптимальном и квазиоптимальном управлении. Задача синтеза для системы третьего порядка общего вида рассматривалась в [3]. Вблизи начала координат строилась оптимальная поверхность переключений для системы с колебательным звеном. Оптимальные по быстродействию процессы перехода в установившееся состояние системы третьего порядка с двумя комплексно-сопряженными полюсами при произвольных начальных условиях были исследованы в [4].

Задача синтеза оптимального по быстродействию управления для линейных дискретных систем третьего порядка решается в [5]. Обоснование предельного перехода, позволяющего получить уравнения для предельной поверхности переключений, которая соответствует оптимальной синтезирующей функции для непрерывной системы, описываемой дифференциальными уравнениями, а также изучение поведения поверхности переключений в фазовом пространстве проведено в [6, 7].

Области достижимости системы с консервативным звеном для времен $T=2\pi/k$ построены в [8], где также был предложен квазиоптимальный способ управления системой и дано двухпараметрическое представление поверхности переключений.

Задача об оптимальном по быстродействию перемещении маятника из состояния покоя с гашением колебаний в конце процесса была решена в [9]. Асимптотическое решение задачи оптимального управления для произвольных начальных условий в предположении малости управления — максимальной скорости перемещения точки равновесия, по сравнению с характерной скоростью колебаний, построено в [10].

В публикуемой работе получено аналитическое однопараметрическое представление поверхности переключений и исследована ее структура при ограничении на управление общего вида. В трехмерном фазовом пространстве произведено графическое построение поверхности переключений для двух наиболее важных в прикладных задачах типов ограничений: симметричного $-1 \leq v \leq 1$ и несимметричного $0 \leq v \leq 1$. Построен численный алгоритм, позволяющий по известному положению фазовой точки определять значение управляющего воздействия.

1. Рассмотрим маятник, точка подвеса которого может перемещаться с ограниченной скоростью вдоль горизонтальной направляющей. Движение маятника в безразмерных переменных описывается системой уравнений и ограничений [8]:

$$\psi'' + \psi = v, \quad x' = v, \quad -\gamma \leq v \leq 1 \quad (\gamma \geq 0) \quad (1.1)$$

где x — координата точки подвеса маятника, v — скорость точки подвеса маятника, ψ — безразмерная абсолютная скорость маятника. В фазовых координатах $x, \psi, \dot{\psi}$ уравнения (1.1) можно представить в виде следую-

щей системы:

$$\dot{\psi} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = -\psi + v, \quad \dot{x} = v, \quad -\gamma \leq v \leq 1 \quad (1.2)$$

Для фазовой точки, движущейся по закону (1.2), рассмотрим задачу о быстрейшем попадании в начало фазового пространства $(0, 0, 0)$ из заданного начального состояния a, ψ_0, φ_0 .

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина [4]. Оптимальное управление, удовлетворяющее принципу максимума, имеет вид

$$v(t) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \operatorname{sign}[\sin(t+\theta) + \lambda] + \frac{1}{2}(1-\gamma) \quad (1.3)$$

где θ, λ — постоянные интегрирования сопряженной системы. Согласно (1.3), оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $+1$ и $-\gamma$. За исключением первого и последнего интервалов, сумма двух соседних интервалов постоянства управления составляет 2π , и все интервалы, на которых управление имеет одно и то же значение, равны между собой.

Интегрируя систему (1.2) из начала фазового пространства в обратном времени с управлением (1.3) и отмечая на каждой траектории точки переключения управления $v(t)$, получим двухпараметрическое семейство точек поверхности переключений

$$x = - \int_0^{t_k(\lambda, \theta)} v d\tau, \quad \psi = \int_0^{t_k(\lambda, \theta)} v \sin(t-\tau) d\tau, \quad \varphi = - \int_0^{t_k(\lambda, \theta)} v \cos(t-\tau) d\tau \quad (1.4)$$

где $t_k(\lambda, \theta)$ — точки переключения управления (1.3).

Построение поверхности переключений, задаваемой соотношениями (1.4), позволит разделить фазовое пространство на области, где управление постоянно, т. е. решить задачу синтеза оптимальных управлений. Однако графическое построение в трехмерном фазовом пространстве двухпараметрической поверхности переключений, определяемой соотношениями (1.4), оказывается затруднительным. Для упрощения задачи найдем управление, удовлетворяющее принципу максимума и переводящее фазовую точку из начала фазового пространства в плоскость $x = \alpha = \text{const}$.

Пусть n — число точек переключения управления (1.3), а δ — значение управления на первом участке. В момент t_n последнего переключения управления должно быть выполнено условие $x(t_n) = \alpha$. Управление, удовлетворяющее условию попадания в момент t_n на плоскость $x = \alpha$, будет зависеть от двух параметров: α и θ . Рассмотрим случай четного числа точек переключения управления $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и пусть $\delta = -\gamma$. Тогда, выполняя условие попадания на плоскость $x = \alpha$, находим

$$t_{n-1} = (\pi - 2\theta) \frac{k + (k-1)\gamma}{n + (n-1)\gamma} + \frac{\alpha}{n + (n-1)\gamma} \quad (1.5)$$

где параметр θ изменяется в пределах

$$K_1 \leq \theta \leq -2\pi(k-1) + \frac{1}{2}\pi \frac{k - (k-1)\gamma}{k + (k-1)\gamma} + \frac{\alpha}{2(k + (k-1)\gamma)} \quad (1.6)$$

при $-\pi\gamma \leq \alpha \leq (n-2)\pi\gamma$

$$K_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{при } (n-2)\pi\gamma < \alpha \leq n\pi\gamma$$

$$K_1 = -(n-1)\pi - \frac{1}{2}\pi \frac{1-\gamma}{1+\gamma} - \frac{\alpha}{n(1+\gamma)}$$

Зная t_{n-1} и θ , легко определить остальные точки переключения искомого управления. Интегрируя соотношения (1.4) с управлением, получаемым из (1.3) и (1.5), находим часть сечения поверхности переключения плоскостью $x=\alpha$:

$$\begin{aligned}\psi &= k(1+\gamma) [1 + \cos 2(\theta + t_{n-1})] - \gamma [1 + \cos(2\theta + t_{n-1})] \\ \varphi &= -k(1+\gamma) \sin 2(\theta + t_{n-1}) + \gamma \sin(2\theta + t_{n-1})\end{aligned}\quad (1.7)$$

где t_{n-1} — определяется из (1.5), а θ изменяется в пределах (1.6). Для случая нечетного числа точек переключения управления $n=2k+1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) и $\delta=1$ находим

$$t_{n-1} = -\pi \frac{k\gamma + k - 1}{n + (n-1)\gamma} - 2\theta \frac{k\gamma + k + 1}{n + (n-1)\gamma} + \frac{\alpha}{n + (n-1)\gamma}\quad (1.8)$$

$$K_2 \leq \theta \leq -(n-2)\pi - \frac{1}{2}\pi \frac{1-\gamma}{1+\gamma} - \frac{\alpha}{(n-1)(1+\gamma)}$$

$$\text{при } -(n-1)\pi \leq \alpha \leq (n-1)\pi\gamma$$

$$K_2 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + \alpha \text{ при } -(n+1)\pi \leq \alpha < -(n-1)\pi$$

$$K_2 = -2\pi k + \frac{1}{2}\pi \frac{k+1-k\gamma}{k+1+k\gamma} + \frac{\alpha}{2(k+1+k\gamma)}$$

и соответственно

$$\begin{aligned}\psi &= k(1+\gamma) [1 + \cos 2(\theta + t_{n-1})] + 1 + \cos(2\theta + t_{n-1}) \\ \varphi &= -k(1+\gamma) \sin 2(\theta + t_{n-1}) - \sin(2\theta + t_{n-1})\end{aligned}\quad (1.9)$$

Аналогично для $n=2k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) и $\delta=1$ будем иметь

$$t_{n-1} = (\pi - 2\theta) \frac{k\gamma + k - 1}{n\gamma + n - 1} - \frac{\alpha}{n\gamma + n - 1}\quad (1.10)$$

$$K_3 \leq \theta \leq -2\pi(k-1) + \frac{1}{2}\pi \frac{k\gamma - k + 1}{k\gamma + k - 1} - \frac{\alpha}{2(k\gamma + k - 1)}$$

$$\text{при } -\pi(n-2) < \alpha \leq n\pi\gamma$$

$$K_3 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha \text{ при } -n\pi \leq \alpha \leq -(n-2)\pi$$

$$K_3 = -(n-1)\pi + \frac{1}{2}\pi \frac{1-\gamma}{1+\gamma} + \frac{\alpha}{n(1+\gamma)}$$

и, следовательно, часть поверхности переключений, построенной при помощи управлений с $n=2k$ и $\delta=1$, задается соотношениями

$$\begin{aligned}\psi &= -k(1+\gamma) [1 + \cos 2(t_{n-1} + \theta)] + 1 + \cos(2\theta + t_{n-1}) \\ \varphi &= k(1+\gamma) \sin 2(t_{n-1} + \theta) - \sin(2\theta + t_{n-1})\end{aligned}\quad (1.11)$$

Если $n=2k+1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) и $\delta=-\gamma$, то получим

$$t_{n-1} = -\pi \frac{k+(k-1)\gamma}{n\gamma+n-1} - 2\theta \frac{k+(k+1)\gamma}{n\gamma+n-1} - \frac{\alpha}{n\gamma+n-1}$$

$$K_i \leq \theta \leq -(n-2)\pi + \frac{1}{2}\pi \frac{1-\gamma}{1+\gamma} + \frac{\alpha}{(n-1)(1+\gamma)}$$

при $-(n-1)\pi \leq \alpha \leq (n-1)\pi$

(1.12)

$$K_i \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{\gamma} \text{ при } (n-1)\pi\gamma < \alpha \leq (n+1)\pi\gamma$$

$$K_i = -(n-1)\pi + \frac{1}{2}\pi \frac{(k+1)\gamma - k}{(k+1)\gamma + k} - \frac{\alpha}{2[k+(k+1)\gamma]}$$

$$\psi = -k(1+\gamma)[1 + \cos 2(\theta + t_{n-1})] - \gamma[1 + \cos(2\theta + t_{n-1})]$$

$$\varphi = k(1+\gamma) \sin 2(\theta + t_{n-1}) + \gamma \sin(2\theta + t_{n-1})$$
(1.13)

Заменяя во всех соотношениях (1.5) – (1.13) α на x , получаем однопараметрическое представление поверхности переключений.

Таким образом, поверхность переключений состоит из отдельных участков, построенных при помощи управлений с различным числом переключений n (четным или нечетным) и с различным значением на первом участке δ (1 или $-\gamma$).

Определим линии склейки отдельных участков поверхности переключений. Линии склейки разделяют участки поверхности переключений, построенные управлениями с $n=2m$ числом переключений и $n=2m+1$ числом переключений, где $m=1, 2, 3, \dots$ – номер кривой склейки. Минимальное время, за которое можно попасть из начала фазового пространства на кривую склейки, $T=2\pi m$. Используя сказанное выше, а также вид оптимального управления (1.3), легко получить следующие выражения для кривых склейки:

$$\psi = m(1+\gamma) \left(1 - \cos \frac{2\pi + x/m}{1+\gamma} \right)$$
(1.14)

$$\varphi = m(1+\gamma) \sin \frac{2\pi + x/m}{1+\gamma}$$

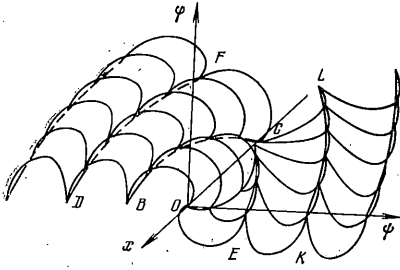
для полупространства $\psi > 0$ и

$$\psi = -m(1+\gamma) \left(1 - \cos \frac{2\pi\gamma - x/m}{1+\gamma} \right)$$
(1.15)

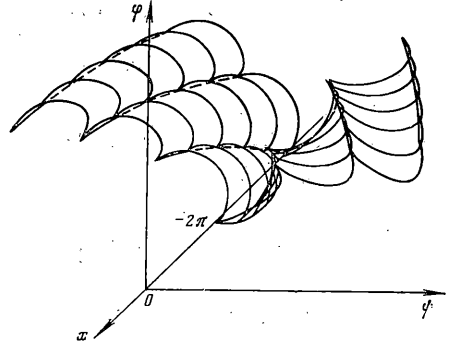
$$\varphi = -m(1+\gamma) \sin \frac{2\pi\gamma - x/m}{1+\gamma}$$

для полупространства $\psi < 0$. В выражениях (1.14), (1.15) $m=1, 2, 3, \dots$ – номер кривой склейки, $\gamma \geq 0$. Соотношения (1.5) – (1.15) полностью определяют оптимальную поверхность переключений. Отметим, что уравнения (1.5) – (1.9), (1.14) переходят в уравнения (1.10) – (1.13), (1.15) при помощи преобразования $x = -\gamma x'$, $\psi = -\gamma \psi'$, $\varphi = -\gamma \varphi'$, $\gamma = (\gamma')^{-1}$, с последующим опусканием штрихов.

2. Построим оптимальную поверхность переключений в трехмерном фазовом пространстве для случая $\gamma=1$. Для фиксированного значения $x=\alpha$ сечение поверхности переключений плоскостью $x=\alpha$ задается соотношениями (1.7), (1.9), (1.14), (1.13). Для графического изображения поверхности переключений каждое сечение $x=\alpha$ проектируем на плоскость при



Фиг. 1



Фиг. 2

помощи формул

$$\psi^1 = \psi - x / \sqrt{2}, \quad \varphi^1 = \varphi - x / \sqrt{2} \quad (2.1)$$

где ψ , φ , x — координаты точек сечения в фазовом пространстве, а ψ^1 и φ^1 — координаты точек сечения на плоскости.

Часть поверхности переключений при изменении α от 0 до -2π показана на фиг. 1. Над поверхностью переключений управление принимает значение $v = -1$, под поверхностью $v = +1$. Поверхность переключений склеивается из участков, которые задаются соотношениями (1.7), (1.9), (1.11), (1.13) при $\gamma = 1$. Каждый из этих участков строится при помощи управлений с различным числом точек переключения n и с различным значением δ на первом интервале. Обозначим управление с n -точками переключений и со значением δ на первом интервале постоянства управления через $v_{n,\delta}$ (δ принимает значение ± 1). Тогда выпуклый вверх участок поверхности переключений, ограниченный линиями OC и BC , построен управлением $v_{2,1}$. Выпуклый вниз участок поверхности переключений, ограниченный линиями BC и DF , построен управлениями $v_{3,-1}$ и $v_{4,1}$. Соответственно выпуклый вниз участок поверхности переключений, ограниченный линиями OC и EC , построен управлением $v_{2,-1}$, а выпуклый вниз участок между линиями EC и KL — управлениями $v_{3,1}$ и $v_{4,-1}$. На фиг. 1 показана часть поверхности переключений, построенная управлениями, имеющими не более восьми точек переключений $n \leq 8$. Винтовая линия OC , склейки выпуклого вверх и выпуклого вниз участков поверхности переключений, описывается уравнениями

$$\psi = 1 - \cos x, \quad \varphi = \sin x \quad \text{при } x \leq 0 \quad (2.2)$$

$$\psi = -\gamma(1 - \cos x / \gamma), \quad \varphi = \gamma \sin x / \gamma \quad \text{при } x > 0$$

Она является траекторией системы, выходящей из начала фазового пространства. Остальные линии склейки отдельных участков поверхности переключений получаются из соотношений (1.14), (1.15) и имеют вид

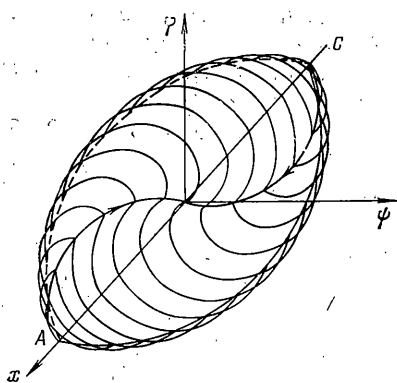
$$\psi = 2m[1 + \cos(x/2m)], \quad \varphi = -2m \sin(x/2m) \quad (2.3)$$

для полупространства $\psi > 0$ и $\psi < 0$:

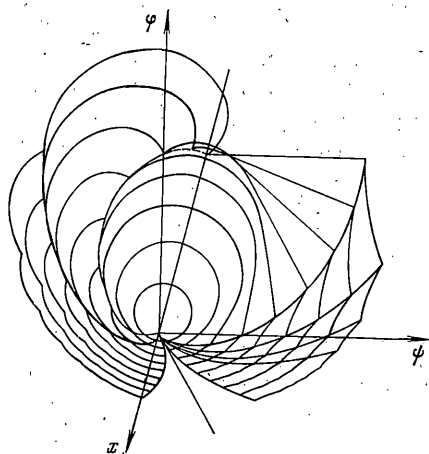
$$\psi = -2m[1 + \cos(x/2m)], \quad \varphi = -2m \sin(x/2m) \quad (2.4)$$

Так, например, кривая BC описывается уравнениями (2.4) с $m = 1$, проходит через точку $x = 0, \psi = -4, \varphi = 0$ и попадает на ось x при $x = -2\pi$.

Нулевое сечение $\alpha = 0$ поверхности переключений обладает свойством



Фиг. 3



Фиг. 4

центральной симметрии относительно точки $x=\psi=\varphi=0$. При изменении α от 0 до -2π участки поверхности переключений, построенные управлениями $v_{2,1}$, $v_{2,-1}$, $v_{3,-1}$, уменьшаются и при $\alpha=-2\pi$ исчезают, сливаясь в точку $x=-2\pi$, $\psi=\varphi=0$. При $\alpha=-2\pi$ к оси x примыкают участки, построенные управлениями $v_{3,1}$, а также $v_{4,1}$.

На фиг. 2 изображена часть поверхности переключений для $n \leq 10$ при изменении α от -2π до -4π . Структура этой части поверхности переключений аналогична изображенной на фиг. 1. При изменении α от -2π до -4π участки поверхности переключений, построенные управлениями $v_{3,1}$, $v_{4,-1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,-1}$, уменьшаются и при $\alpha=-4\pi$ исчезают, сливаясь в точку $x=-4\pi$, $\psi=\varphi=0$. В сечении $\alpha=-4\pi$ к оси x примыкают участки, построенные управлениями $v_{5,1}$ и $v_{6,1}$. Линиями склейки являются винтовая линия (2.2) и кривые, определяемые соотношениями (2.3), (2.4). Дальнейшее построение поверхности переключений при $x < 0$ производится аналогично по формулам (1.7), (1.9), (1.11), (1.13).

Рассмотрим случай $x > 0$. Так как ограничение на управление симметрично, то нет необходимости производить отдельно построение поверхности переключений для $x > 0$. Пусть x° , ψ° , φ° — некоторая точка в полупространстве $x < 0$, принадлежащая поверхности переключений, тогда точка $-x^\circ$, $-\psi^\circ$, $-\varphi^\circ$ будет принадлежать поверхности переключений в полупространстве $x > 0$, т. е. для симметричного ограничения на управление поверхность переключений для $x > 0$ получается простым преобразованием $x' = -x$, $\psi' = -\psi$, $\varphi' = -\varphi$ из поверхности переключений для $x < 0$.

На фиг. 3 показана часть поверхности переключений, построенная при помощи управлений с двумя точками переключений. Следует отметить, что этот участок поверхности переключений является двумерным многообразием, «сотканным» из траекторий системы, т. е. фазовая точка при попадании на него продолжает двигаться по поверхности переключений до попадания в начало фазового пространства. Линия AC — единственная линия, ведущая в начало фазового пространства.

3. Построим поверхность переключений для несимметричного ограничения на управление. Для случая несимметричного ограничения на управление областью допустимых начальных значений будет область достижимости системы (1.2), представляющая собой конус, расположенный в полупространстве $x < 0$ и образованный вращением прямой $\varphi=x$, $\psi=0$ во-

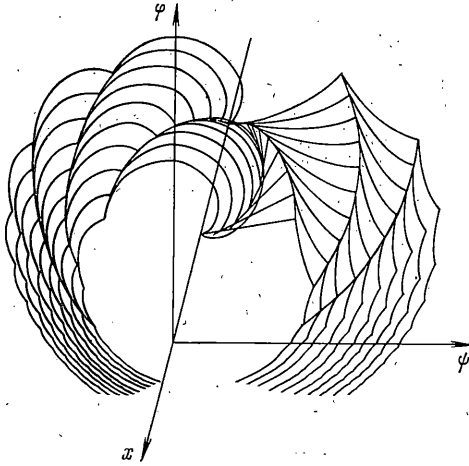
круг оси x [8]. Поверхность переключений (фиг. 4) располагается внутри конуса и делит его на две области. Внутри области, ограниченной поверхностью переключений, управление принимает значение $v=+1$, вне $v=0$. Поверхность переключений склеивается из отдельных участков, построенных по формулам (1.7), (1.9), (1.11), (1.13) при $\gamma=0$. Проектирование на плоскость производилось по формулам $\psi^1 = \psi - x / (4\sqrt{2})$, $\varphi^1 = \varphi - x / \sqrt{2}$. Линиями склейки являются винтовая линия (2.2) и кривые, полученные при $\gamma=0$ из (1.14), (1.15):

$$\begin{aligned} \psi &= m[1 - \cos(x/m)], \\ \varphi &= m \sin(x/m) \end{aligned} \quad (3.1)$$

для полупространства $\psi > 0$ и $\psi < 0$:

$$\begin{aligned} \psi &= -m[1 - \cos(x/m)], \\ \varphi &= m \sin(x/m) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1), (3.2) следует, что при $m \rightarrow \infty$ линии склейки стремятся к прямой $\varphi = x$, $\psi = 0$, лежащей на конусе достижимости, и, следовательно, с конуса достижимости можно попасть в начало фазового пространства только за бесконечное



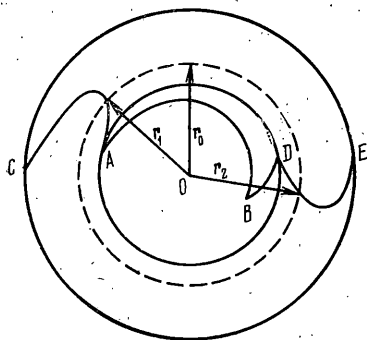
Фиг. 5

число переключений. Прямая $\varphi = x$, $\psi = 0$ — также единственная общая линия поверхности переключений и конуса достижимости; на ней смыкаются при $n \rightarrow \infty$ части поверхности переключений, лежащие в полупространствах $\psi > 0$ и $\psi < 0$ соответственно.

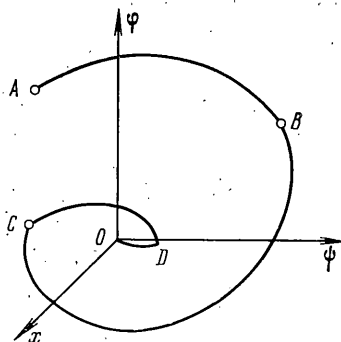
На фиг. 4 показана часть поверхности переключений при $x > -2\pi$ и построенная управлениями, имеющими не более $n \leq 30$ точек переключения. На фиг. 5 изображена часть поверхности переключений при изменении x от -2π до -4π и $n \leq 30$.

4. Поверхность переключений, задаваемая соотношениями (1.5) — (1.15), разделяет трехмерное фазовое пространство x , ψ , φ на две области, где управление постоянно. Над поверхностью переключений управление принимает значение $v = -\gamma$, под поверхностью переключений — $v = 1$. Так как оптимальная поверхность переключений имеет довольно сложную структуру, возникает вопрос об определении с помощью ЭЦВМ по заданному положению фазовой точки значения управляющего воздействия.

В [8] показано, что области достижимости системы (1.2), построенные для времен $T = 2\pi k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), представляют собой поверхности, получаемые вращением относительно оси x . На этих поверхностях расположены кривые «склейки» (1.14), (1.15) отдельных участков поверхности переключений. В сечении $x = x_0 = \text{const}$ области достижимости — окружности (фиг. 6), причем i -й окружности соответствует время $T = 2\pi k$, $k = k_0 + i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), необходимое для попадания на нее из начала фазового пространства, где $k_0 = \lceil -x_0 / (2\pi) \rceil$ при $x_0 \leq 0$ и $k_0 = \lceil x_0 / (2\pi\gamma) \rceil$ при $x_0 > 0$. Определим по известному положению фазовой точки x_0 , ψ_0 , φ_0 слой, в котором находится фазовая точка. Пусть она находится между i -й и $(i+1)$ -й окружностью, т. е. $|r_0| = (\psi_0^2 + \varphi_0^2)^{1/2}$ превышает радиус i -й окружности. На фиг. 6 фазовой точке соответствует вектор r_0 . Оптимальная поверх-



Фиг. 6



Фиг. 7

ность переключений в сечении $x=x_0$ представляет линию $CABDE$ и разделяет слой между i -й и $(i+1)$ -й окружностью на две области. Определим точки пересечения окружности с радиусом $|r_0|$ с линиями CA и DE . Пусть это будут векторы r_1 и r_2 . Выбор управления зависит от взаимной ориентации векторов r_0, r_1, r_2 . Если при обходе по часовой стрелке вектора ориентированы в последовательности r_1, r_0, r_2 , то $v=-\gamma$, если в последовательности r_1, r_2, r_0 , то $v=1$. Возможен случай, когда фазовая точка находится вблизи оси x и окружность с радиусом $|r_0|$ не имеет точек пересечения с линией $CABDE$. Это имеет место при $|r_0| < OB$, где $OB^2 = 4 \sin^2(x/2)$ при $x \leq 0$ и $OB^2 = 4\gamma^2 \sin^2 1/2(x/\gamma)$ при $x > 0$. В этом случае $v=1$ при $x_0 < 0$ и $v=-\gamma$ при $x_0 > 0$. Данный алгоритм был реализован в виде программы на языке *HPL*. По известному положению системы x_j, ψ_j, ϕ_j программа определяет управление v_j и с данным управлением интегрирует систему (1.2) с некоторым шагом по времени. При изменении значения управления на $(j+1)$ -м шаге производится уточнение момента «протыкания» фазовой траекторией поверхности переключений. Отметим, что при попадании на двумерное многообразие (фиг. 3) фазовая точка в дальнейшем будет скользить вдоль поверхности переключений и по винтовой линии AC придет в начало фазового пространства. На фиг. 7 показана фазовая траектория системы (1.2) при начальном состоянии $x_0=-1, \psi_0=-4, \phi_0=4$, рассчитанная программой для случая $\gamma=1$.

Оптимальное управление является редейным с моментами переключений $t_1=1,7750, t_2=6,0952, t_3=8,7383$ и значением на первом участке $v=-1$. Оптимальное время быстрогодействия $T=9,8362$. Точки B, C и D на фиг. 7 соответствуют моментам переключения оптимального управления t_1, t_2 и t_3 . Часть траектории DO — винтовая линия (2.2).

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и Л. Д. Акуленко за обсуждение результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 392 с.
2. Флюгге-Лотц И., Тигус Г. Оптимальное и квазиоптимальное управление системами третьего и четвертого порядка. — В кн.: Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965, с. 140.
3. Сакава И., Хаяси Т. Синтез оптимальных систем управления на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина. — В кн.: Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965, с. 107.
4. Михайлов Н. Н., Новосельцева Ж. А. Оптимальные процессы в системе третьего порядка с комплексными полюсами. — Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 9, с. 1502.

5. Мороз А. И. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка.— Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 2, с. 193; № 3, с. 410; № 8, с. 1324.
6. Мороз А. И. К задаче синтеза оптимального по времени управления для дискретных объектов.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 11, с. 52.
7. Мороз А. И. Синтез оптимального по времени управления для линейных систем третьего порядка.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 5, с. 5; № 7, с. 18; № 9, с. 5.
8. Мамалыга В. М. Построение синтеза оптимального по быстродействию управления колебательной системой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 37.
9. Черноусько Ф. Л. Оптимальное перемещение маятника.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 806.
10. Акуленко Л. Д. Управление движением нелинейной колебательной системы смещением положения равновесия.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4, с. 3.

Поступила в редакцию
5.XII.1979