

УДК 521.1

О МНОЖЕСТВЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ НАМАГНИЧЕННОГО ЕСТЕСТВЕННОГО СПУТНИКА ПРИ РЕЗОНАНСЕ 2 : 1

МАЛЫШКИН Г. Н., ХЕНТОВ А. А.

(Горький)

Исследуются стационарные вращения динамически симметричного намагниченного естественного спутника, центральный эллипсоид инерции которого мало отличается от сферы, при условии, что средняя угловая скорость вращения спутника около его центра масс близка к удвоенной средней скорости обращения. Предполагается, что центр масс спутника описывает круговую траекторию, не зависящую от его вращения (ограниченная задача), а вращательное движение определяется сравнимыми по величине гравитационным и магнитным моментами, а также приливным трением. На основе полученных результатов оценивается возможность существования рассмотренных стационарных вращений у естественного небесного тела. Некоторые аспекты этого вопроса обсуждались в [1, 2].

Как известно [3], между средними угловыми скоростями вращений и обращений некоторых небесных тел существуют целочисленные соотношения. У большинства из этих тел средняя угловая скорость вращения близка к средней угловой скорости обращения — синхронизм 1 : 1 (такое движение обнаружено у Луны, у спутников Марса — Фобоса и Деймоса, у спутников Юпитера — Ио, Европа, Каллисто, у спутника Сатурна — Янеты). Синхронизм 3 : 2 (утроенная средняя скорость вращения близка к удвоенной средней угловой скорости обращения) обнаружен у Меркурия. Вращение Венеры, возможно, синхронизировано не только с ее обращением по орбите, но и с обращением Земли.

В далеком прошлом угловые скорости перечисленных тел могли быть много большими, чем существующие, а их уменьшение в процессе эволюции, по-видимому, в основном определялось приливным трением [3].

Наблюдаемое сейчас «обратное» вращение Венеры также, вероятно, можно объяснить действием приливного трения, если предположить [4], что в какой-то период своей истории Венера имела спутник. В [5], развивающей гипотезу, предложенную в [4], показано, что спутник Венеры мог не только вызвать ее захват в существующее вращательное движение, но и даже обратить первоначально «прямое» вращение в «обратное». Недавно выяснилось, что гипотеза о существовании в прошлом спутника у Венеры, возможно, поможет объяснить аномальные (по сравнению с земными) физические условия на Венере¹.

Тем не менее в теоретическом обосновании наблюдаемого сейчас вращения Венеры еще много пробелов (неясно даже, является ли это вращение в действительности резонансным). Согласно некоторым результатам² можно предполагать, что вращение Венеры (так же как и Урана) всегда было «обратным». Показано также³, что под действием весьма малого приливного момента со стороны Солнца это вращение могло оставаться «обратным» и резонансным на космогонически большом интервале времени, несмотря на пространственную неустойчивость такого движения.

Однако, пренебрежимо малая вероятность захвата в предполагаемое существующим сейчас резонансное вращение Венеры и наличие нескольких близких к нему синхронизмов заставляет серьезно сомневаться в случайном возникновении резонансного вращения (если оно вообще существует) при наличии только приливного момента со стороны Солнца.

¹ Барсуков В. Л. В зеркале соседней планеты. — Правда, 1979, 14 января.

² Козлов Н. Н., Энеев Т. М. Численное моделирование процесса образования планеты из протопланетного облака. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1977, № 134. 80 с.

³ Белецкий В. В., Левин Е. М., Погорелов Д. Ю. К теории вращения Венеры. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1979, № 75. 31 с.

В ходе эволюции своего вращения небесные тела проходили через многочисленные соизмеримости между угловыми скоростями вращательного и орбитального движений. Возникает естественный вопрос, почему не происходил захват тел в эти резонансные вращения?

Одним из важных факторов, влияющих на захват в синхронизм, является величина так называемой резонансной зоны (области притяжения устойчивого синхронизма). Можно показать [4], что для синхронизмов, возникающих при воздействии на небесное тело гравитационного момента со стороны притягивающего центра, размеры резонансных зон быстро уменьшаются с увеличением порядка синхронизма, если эксцентриситет орбиты тела невелик (малый эксцентриситет орбиты имеют большинство тел в Солнечной системе, подвергшихся существенной приливной эволюции своего вращения).

Сравнение размеров резонансных зон у синхронизмов разных порядков позволяет понять, почему при наличии возмущений (например, приливного момента) в Солнечной системе не реализуются синхронизмы высокого порядка. Однако указанное сравнение не дает ответа на вопрос, почему одни из родственных с точки зрения размеров резонансных зон синхронизмов (например, 1:1 и 2:1, 3:2 и 3:1 и т. д.) реализуются, а другие нет?

Возможное объяснение было предложено в [1, 2], где показано, что с учетом приливного трения для устойчивости резонансных вращений небесных тел в гравитационном поле притягивающего центра угол между осью вращения тела и нормалью к его орбите должен превышать некоторое (вообще говоря, возрастающее с увеличением порядка синхронизма) достаточно большое значение. Такое ограничение на указанный угол отсутствует для синхронизмов 1:1 и 3:2, что и создает более благоприятные условия для их реализации в рамках квазиплоской структуры Солнечной системы [6].

Как отмечалось в [7], возникновению у естественных небесных тел синхронизма 2:1 могут способствовать магнитные моменты, поскольку некоторые планеты, подобно Земле, могут иметь магнитное поле. Данная статья посвящена подробному исследованию стационарных вращений естественного небесного тела в синхронизме 2:1 при наличии приливного трения. Такое исследование позволяет, с одной стороны, уточнить условия реализуемости этих вращений в Солнечной системе при наличии только гравитационного момента, а с другой — оценить влияние на эти условия магнитных моментов.

1. Вращательное движение спутника будем описывать [8] переменными $L, \rho, \Sigma, \psi, \varphi, \theta$. Здесь L — модуль вектора \mathbf{L} кинетического момента спутника относительно его центра масс, углы ρ и Σ (фиг. 1) определяют положение этого вектора по отношению к осям XYZ неизменной ориентации (ось Y параллельна нормали к плоскости орбиты тела, а ось Z параллельна направлению из притягивающего центра в перигентр орбиты). Углы Эйлера ψ, φ, θ (фиг. 2) определяют положение главных центральных осей инерции xuz спутника относительно осей L_1L_2L , связанных с вектором кинетического момента \mathbf{L} .

Будем считать, что на спутник со стороны центрального тела действует гравитационный момент, имеющий силовую функцию U_1 , причем

$$U_1 = \frac{3}{2}(A - C)\gamma^2\mu/r^3 \quad (1.1)$$

Здесь μ — гравитационная постоянная, r — модуль радиус-вектора \mathbf{r} центра масс спутника, γ — косинус угла между осью динамической симметрии z спутника и вектором \mathbf{r} ; A и C — моменты инерции спутника относительно осей x и z соответственно. Орбита спутника предполагается кеплеровской и не зависящей от его вращения относительно своего центра масс.

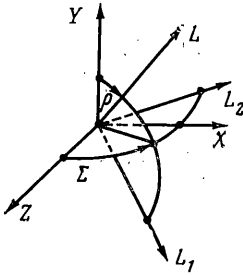
Предположим еще, что центральное тело создает в пространстве дипольное (будем считать, что ось диполя совпадает с осью вращения этого тела) магнитное поле с напряженностью \mathbf{H} , а спутник имеет постоянный (в теле спутника) магнитный момент \mathbf{J} , расположенный вдоль оси симметрии z . Тогда на спутник кроме гравитационного будет действовать еще и магнитный момент. Определим этот момент силовой функцией

$$U_2 = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{H}) \quad (1.2)$$

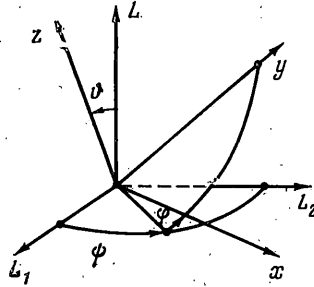
Действующий на спутник приливный момент M зададим [3, 9] следующим образом:

$$M = k \{ [(\omega - \Omega) \times r] \times r \} / r^3 \quad (1.3)$$

Здесь k — постоянная, ω — угловая скорость вращения тела, Ω — угловая скорость его обращения. В дальнейшем предполагается, что приливный момент существенно меньше гравитационного.



Фиг. 1



Фиг. 2

Дифференциальные уравнения, описывающие вращение спутника, можно [8] представить в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} \cos \rho - \frac{\partial U}{\partial \Sigma} \right) + \frac{M_1}{L} \quad (1.4)$$

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{M_2}{L \sin \rho}, \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \psi} + M_3$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{L \sin \theta} \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \psi} + \frac{M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi}{L}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{A} - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial U}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \rho \right) - \frac{M_2}{L} \operatorname{ctg} \rho - \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L} \operatorname{ctg} \theta$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = (1 - e^2)^{-3/2} \omega_0 (1 + e \cos \theta)^2, \quad U = U_1 + U_2$$

Здесь через M_1 , M_2 и M_3 обозначены проекции на оси L_1 , L_2 и L соответственно момента (1.3), e — эксцентриситет орбиты, u — истинная аномалия, θ — аргумент широты, ω_0 — средняя угловая скорость обращения спутника.

Если центральный эллипсоид инерции спутника близок к сфере и $|U| \ll L^2/A$, то в системе (1.4) переменные ψ и u будут «быстрыми» [10], а остальные — «медленными». Поскольку синхронизм 2 : 1 может существовать при любом эксцентриситете орбиты спутника, будем рассматривать случай круговой орбиты.

Введем в системе (1.4) расстройку κ с помощью замены переменных $\psi = 2u + \kappa$ и усредним [10] ее правые части по истинной аномалии. Выпишем усредненные таким образом значения некоторых выражений, содержащихся в системе (1.4):

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & \frac{3}{8} \omega_0^2 (A - C) [2 \sin^2 \theta + \sin^2 \rho (3 \cos^2 \theta - 1) + \sin 2\theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin (\kappa + 2\Sigma)] + \\ & + J_2 \mu e r^{-3} [-\frac{3}{4} \sin I \sin \theta (1 + \cos \rho) \cos (\kappa + \Sigma) - \frac{1}{2} \sin I \cos \theta \sin \rho \sin \Sigma + \\ & + \cos I \cos \theta \cos \rho] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle M_1 \rangle &= kr^{-6} \{ -\omega_0 \sin \rho + \frac{1}{4} L \sin \vartheta \cos \vartheta (1/C - 1/A) \cos \rho (1 + \cos \rho) \sin (\kappa + 2\Sigma) + \\
&\quad + \frac{1}{2} L \sin \rho \cos \rho (\sin^2 \vartheta / A + \cos^2 \vartheta / C) \} \\
\langle M_2 / L \sin \rho \rangle &= \frac{1}{4} kr^{-6} \sin^{-1} \rho \sin \vartheta \cos \vartheta (1/C - 1/A) (1 + \cos \rho) \cos (\kappa + 2\Sigma) \\
\langle M_3 \rangle &= kr^{-6} \{ \omega_0 \cos \rho + L(-1 + \sin^2 \rho / 2) (\sin^2 \vartheta / A + \cos^2 \vartheta / C) + \frac{1}{4} L \sin \rho (1 + \cos \rho) \times \\
&\quad \times \sin \vartheta \cos \vartheta (1/C - A/A) \sin (\kappa + 2\Sigma) \} \\
\langle M_1 \cos \psi \rangle &= kr^{-6} \{ \sin \rho \cos \rho L (\sin^2 \vartheta / A + \cos^2 \vartheta / C) \cos (\kappa + 2\Sigma) \} / 4 \\
\langle M_1 \sin \psi \rangle &= \frac{1}{4} L kr^{-6} \{ \sin \vartheta \cos \vartheta (\cos^2 \rho - 2) (1/C - 1/A) + \sin \rho \cos \rho (\sin^2 \vartheta / A + \\
&\quad + \cos^2 \vartheta / C) \sin (\kappa + 2\Sigma) \} \\
\langle M_2 \sin \psi \rangle &= \frac{1}{4} kr^{-6} L (\sin^2 \vartheta / A + \cos^2 \vartheta / C) \cos (\kappa + 2\Sigma) \sin \rho \\
\langle M_2 \cos \psi \rangle &= \frac{1}{4} kr^{-6} \{ \sin \vartheta \cos \vartheta (1/C - 1/A) - \sin \rho (\sin^2 \vartheta / A + \cos^2 \vartheta / C) \times \\
&\quad \times \sin (\kappa + 2\Sigma) \}
\end{aligned}$$

Здесь J — проекция вектора \mathbf{J} на ось z спутника, I — угол между плоскостью орбиты спутника и экваториальной плоскостью центрального тела, μ_e — постоянная.

Без учета приливного момента усредненная система, получающаяся из (1.4), имеет следующие интегралы:

$$\frac{1}{2} L^2 (\sin^2 \vartheta / A + \cos^2 \vartheta / C) - 2\omega_0 L - \langle U \rangle = C_1 \quad (1.5)$$

$$L \cos \vartheta = C_2$$

а в случаях $I=0$, либо $J=0$ еще и интеграл

$$L(2 - \cos \rho) = C_3 \quad (1.6)$$

В выражениях (1.5), (1.6) величины C_i ($i=1-3$) постоянные.

Как показано в [7], стационарные решения ($\rho = \rho_0$, $\Sigma = \Sigma_0$, $L = L_0$, $\kappa = \kappa_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, где ρ_0 , Σ_0 , L_0 , κ_0 , ϑ_0 — некоторые постоянные) усредненной системы (1.4) без учета приливного момента существуют при выполнении условий

$$\cos \Sigma_0 = \cos (\kappa_0 + 2\Sigma_0) = \sin (\kappa_0 + \Sigma_0) = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \rho_0} = 0, \quad -2\omega_0 + \frac{L_0}{A} - \frac{1}{L_0} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \vartheta_0} \operatorname{ctg} \vartheta_0 = 0$$

Нижний индекс нуль при переменных в выражениях частных производных от силовой функции здесь и в дальнейшем означает, что эти производные вычисляются на стационарных решениях. В [7] показано, что можно рассматривать только два динамически различных стационарных решения

$$\kappa_0 = 3\pi/2, \quad \Sigma_0 = \pi/2; \quad \kappa_0 = \pi/2, \quad \Sigma_0 = 3\pi/2 \quad (1.8)$$

Из системы уравнений (1.7) следует, что величины ρ_0 и ϑ_0 , одна из которых может быть выбрана произвольно, связаны соотношением

$$\begin{aligned}
&\sin 2\rho_0 (3 \cos^2 \vartheta_0 - 1) + \sin 2\vartheta_0 (\cos \rho_0 + \cos 2\rho_0) \sin (\kappa_0 + 2\Sigma_0) + \\
&+ \delta [3 \sin I \sin \vartheta_0 \sin \rho_0 \cos (\kappa_0 + 2\Sigma_0) - 2 \sin I \cos \vartheta_0 \cos \rho_0 \sin \Sigma_0 - \\
&- 4 \cos I \cos \vartheta_0 \sin \rho_0] = 0, \quad \delta = 4J\mu_e / [3\mu(A - C)]. \quad (1.9)
\end{aligned}$$

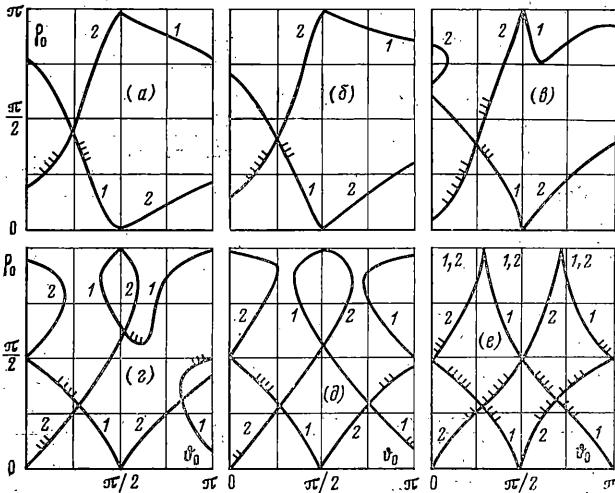
Можно показать, что каждому фиксированному значению ϑ_0 для каждого из решений (1.8), вообще говоря, может соответствовать до четырех действительных значений ρ_0 , удовлетворяющих уравнению (1.9).

Если $\delta = 0$ (на спутник действует только гравитационный момент), из уравнения (1.9) можно найти

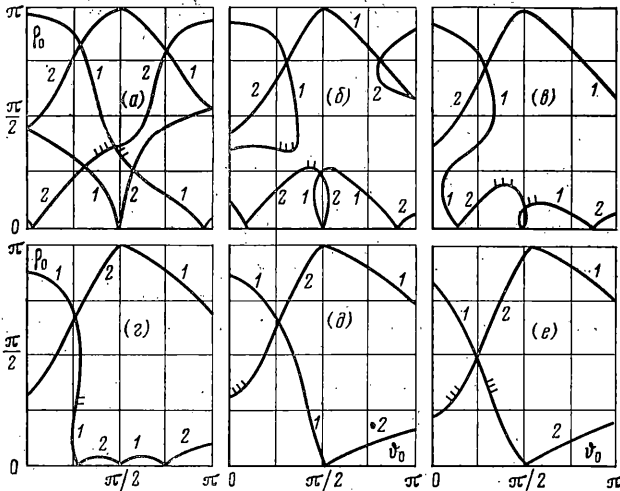
$$\cos 2\vartheta_0 = \frac{-3 \pm \sqrt{\xi^2 (8 + \xi^2)}}{9 + \xi^2}, \quad \xi = \frac{2(\cos \rho_0 + \cos 2\rho_0)}{\sin 2\rho_0} \quad (1.10)$$

График зависимости $\vartheta_0 = \vartheta_0(\rho_0)$, построенный согласно выражению (1.10), показан на фиг. 3, *e*. Кривые симметричны относительно прямой $\vartheta_0 = \pi/2$. Цифрами 1 здесь, а также на других графиках фиг. 3, 4, отмечены участки кривых, соответствующие решениям первого из двух семейств (1.8), а цифрами 2 — участки кривых, соответствующие решениям второго семейства (1.8).

В случае $\delta \neq 0$ решения уравнения (1.9) определялись численными методами на ЭЦВМ. Характерные графики показаны на фиг. 3, 4 для случая



Фиг. 3

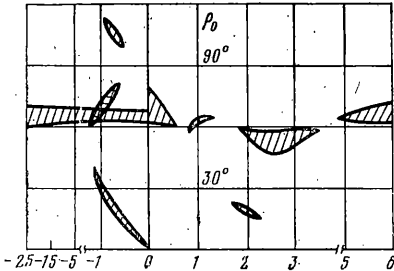


Фиг. 4

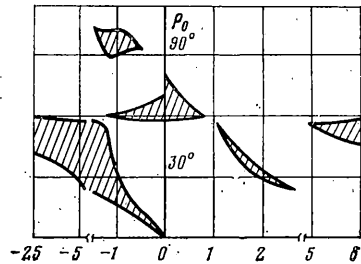
$I=1$ рад. На фиг. 3, *a-d* параметр δ равен соответственно $-25, -5, -1,4, -0,7, -0,2$. На фиг. 4, *a-e* параметр δ равен $-0,5, 1,1, 1,7, 3,5, 5, 25$.

При наличии приливного трения в малой (порядка отношения максимума модуля гравитационного момента к максимальному модулю приливного момента) окрестности решений системы уравнений (1.7), вообще говоря, существуют стационарные решения усредненной системы урав-

нений, соответствующей системе (1.4). Для решения вопроса о возможности существования таких решений у естественных небесных тел важное значение имеют условия устойчивости стационарных решений усредненной системы, соответствующей (1.4).



Фиг. 5



Фиг. 6

Характеристическое уравнение системы уравнений в вариациях для стационарных решений такой системы можно привести к виду

$$\lambda^5 + A_1 \lambda^4 + A_2 \lambda^3 + A_3 \lambda^2 + A_4 \lambda + A_5 = 0 \quad (1.11)$$

$$A_1 = -(b_1 + b_2 + b_3), \quad A_2 = -a_{45} a_{54}, \quad A_3 = a_{45} (b_1 a_{54} - b_4 a_{14})$$

$$A_4 = a_{45} a_{21} (a_{12} a_{54} - a_{52} a_{14}), \quad A_5 = a_{23} b_5 (a_{12} a_{54} - a_{14} a_{52}) + a_{23} b_4 (a_{14} a_{32} - a_{12} a_{34})$$

$$a_{12} = -\frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \Sigma_0^2} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \Sigma_0}, \quad a_{21} = \frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \rho_0^2}, \quad a_{45} = \frac{1}{A}$$

$$a_{14} = -\frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \Sigma_0} + \frac{\operatorname{ctg} \rho_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0^2}, \quad a_{52} = \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \Sigma_0}, \quad a_{54} = \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0^2}$$

$$a_{32} = \frac{\operatorname{ctg} \vartheta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \Sigma_0}, \quad a_{34} = \frac{\operatorname{ctg} \vartheta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0^2}$$

$$b_1 = (2Ar^6)^{-1} k (-\cos \rho_0 + \cos 2\rho_0)$$

$$b_2 = (4Ar^6)^{-1} k \operatorname{ctg} \vartheta_0 \sin \rho_0 (1 + \cos \rho_0) \sin (\chi_0 + 2\Sigma_0)$$

$$b_3 = (2Ar^6)^{-1} k (-2 + \sin^2 \rho_0), \quad b_4 = (2Ar^6)^{-1} k L_0 (-\sin \rho_0 + \sin 2\rho_0)$$

$$b_5 = -(4Ar^6)^{-1} k (\cos \rho_0 + \cos 2\rho_0) \sin (\chi_0 + 2\Sigma_0)$$

Используя критерий Лъенара — Шипара [11] и известную теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению [12], достаточные условия устойчивости рассматриваемых стационарных резонансных решений можно свести к следующим неравенствам:

$$A_i > 0 \quad (i=1-5), \quad A_1 A_2 - A_3 > 0, \quad A_3 A_4 - A_2 A_5 > 0 \quad (1.12)$$

Если $\delta=0$, либо $I=0$, то полином (1.11) вырождается: два из его коэффициентов (A_4 и A_5) тождественно обращаются в нуль и соответственно полином получает два нулевых корня. Вырождение происходит потому, что в выделенных случаях в силовой функции U_2 отсутствуют резонансные члены, соответствующие синхронизму 2:1 (как раз эти члены и обеспечивают ненулевые значения коэффициентов A_4 и A_5). Легко показать, что найденное в [1] достаточное условие неустойчивости стационарных вращений спутника в этом синхронизме при наличии только гравитационного и приливного моментов ($\rho_0 < 41^\circ 24'$) сохраняется, и когда $\delta \neq 0$, но орбита спутника расположена в плоскости экватора центрального тела.

Неравенства (1.12) на стационарных решениях усредненной системы, соответствующей (1.4), исследовались численно. На фиг. 5, 6 (на отдельных участках оси абсцисс используется укрупненный масштаб) заштри-

хованные области соответствуют устойчивым вращениям спутника для характерного случая $I=1$ рад (стационарные вращения при остальных значениях параметров ρ_0 и δ неустойчивы).

Фиг. 5 построена для первого семейства стационарных решений (1.8), а фиг. 6 — для второго семейства этих решений. При положительных значениях параметра δ стационарные решения, соответствующие заштрихованным областям, устойчивы, если $A < C$, и неустойчивы, если $A > C$. При отрицательных значениях δ эти решения, вообще говоря, устойчивы, если $A > C$, и неустойчивы, если $A < C$ (кроме решений, соответствующих области, выделенной двойной штриховкой на фиг. 5, где устойчивость имеет место, когда $A < C$). На фиг. 3, 4 те участки кривых, которым соответствуют устойчивые вращения, выделены штриховыми линиями. Расположение областей устойчивости на плоскости (ρ_0, δ) и их размеры зависят от наклона орбиты, однако качественно картина остается такой, как показано на фиг. 5, 6 (естественно кроме уже обсуждавшегося случая $I=0$). Отсутствие непрерывности в условиях устойчивости при прохождении параметра δ через нуль объясняется вырождением полинома (1.11) при $\delta=0$.

При отсутствии магнитного момента устойчивыми могут быть стационарные вращения, соответствующие следующим интервалам значений углов ρ_0 и ϑ_0 (в этих интервалах корни вырожденного полинома (1.11) имеют отрицательные вещественные части):

1) $90^\circ < \rho_0 < 97,6^\circ$, а угол ϑ_0 может находиться в одном из двух интервалов $0 < \vartheta_0 < 13,8^\circ$, либо $166,2^\circ < \vartheta_0 < 180^\circ$;

2) $41^\circ 24' < \rho_0 < 79,19^\circ$, а угол ϑ_0 находится в интервале $38,5^\circ < \vartheta_0 < 77,925^\circ$, либо $102,075^\circ < \vartheta_0 < 141,5^\circ$;

3) $41^\circ 24' < \rho_0 < 67,7^\circ$, а угол ϑ_0 находится либо в интервале $45^\circ < \vartheta_0 < 68^\circ$, либо в интервале $112^\circ < \vartheta_0 < 135^\circ$.

2. Оценим возможность застревания естественного спутника в процессе приливной эволюции его вращения в одном из рассмотренных стационарных вращений, соответствующих синхронизму 2:1.

Как известно [9], при воздействии на спутник только приливного момента, создаваемого центральным телом (и пренебрежении всеми другими моментами), вращательное движение спутника эволюционирует и стремится к некоторому предельному движению, которое можно найти из условия обращения в нуль среднего приливного момента⁴. В процессе такой эволюции изменяется как угловая скорость вращения, так и углы ρ , Σ , ϑ , φ .

В частности для предельного вращения угол $\rho=0$, т. е. спутник стремится к вращению вокруг нормали к плоскости своей орбиты, происходящему в ту же сторону, в которую перемещается его центр масс («прямое» вращение). У спутника, первоначально вращавшегося в сторону, противоположную направлению своего обращения («обратное» вращение, имеющее место, когда $\rho > \pi/2$), угол ρ в процессе эволюции монотонно убывает и вращение становится прямым ($\rho < \pi/2$); а затем $\rho \rightarrow 0$. Если же исходное вращение спутника было прямым, то под действием приливного трения вращение всегда остается прямым, хотя угол ρ , вообще говоря, может превышать свое исходное значение. Этот важный для понимания эволюции вращения небесных тел (и, в частности, для оценки возможности их захватов в резонансные вращения) факт был установлен в [4] (в [9] он не был обнаружен из-за неточностей в содержащихся там уравнениях).

При воздействии на небесное тело гравитационного и приливного мо-

⁴ См. также *Белецкий В. В.* Приливная эволюция наклонов и вращений небесных тел. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1978, № 43. 22 с.

ментов, создаваемых центральным телом, эволюция вращения [4, 13] снова будет обуславливаться действием приливного момента, однако возникает возможность захвата в какое-либо резонансное вращение (для случая эллиптической орбиты тела существует счетное множество таких резонансных вращений). Анализ фиг. 3, е, 5 и 6 показывает, что тело, первоначальное вращение которого было обратным, вообще говоря, может быть захвачено в обратное вращение в синхронизме 2 : 1, причем как при воздействии на него только гравитационного момента, так и при взаимодействии этого момента с магнитным.

Как уже отмечалось, одна из возможных причин, препятствующих реализуемости большинства синхронизмов в Солнечной системе, состоит в том, что при воздействии на небесное тело, центр масс которого перемещается по эллиптической орбите с небольшим эксцентриситетом, только гравитационного и приливного моментов стационарные вращения, соответствующие этим синхронизмам, неустойчивы, если угол ρ_0 не достаточно велик.

Проведенный же в [6] анализ эволюции допланетного облака показал, что начальные значения угла ρ для многих больших тел Солнечной системы, вероятно, были малы. Поэтому в процессе приливной эволюции прямого вращения этих тел величина угла ρ могла, вообще говоря, и не достигать значений, нужных для устойчивости большинства стационарных вращений (даже с учетом возможного увеличения этого угла под действием приливного момента).

Чтобы оценить возможное увеличение угла ρ для тела, имевшего исходное прямое вращение, достаточно знать, во сколько раз начальная средняя угловая скорость вращения тела превосходила среднюю скорость его обращения. Чем больше это отношение и начальное значение угла ρ , тем большего значения этот угол может достичь в ходе эволюции. Например, можно показать, что если указанное отношение было равно 120 (заметим, что если эта оценка применяется к небесному телу, вращающемуся в нашу эпоху в синхронизме 1 : 1, то, следовательно, предполагается, что его исходная угловая скорость за время эволюции стала меньше на два порядка), а начальный угол ρ был равен 5° , то этот угол не сможет превзойти величины в 27° . Учитывая известное эмпирическое соотношение между начальной угловой скоростью вращения небесных тел и их массой [3], можно показать, что приведенная величина 120, по-видимому, имела место для начального вращения Меркурия, а для большинства других тел Солнечной системы, вращение которых могло быть существенно изменено приливным трением (Луна, находящиеся в резонансном вращении спутники Марса, Юпитера и Сатурна), это отношение должно было быть или близким к 100, или меньшим.

Очевидно поэтому, какое важное значение имеет определение того минимального значения угла ρ , при котором стационарные вращения тела в изучаемом синхронизме могут существовать и быть устойчивыми. Проведенное исследование выявило условия устойчивости стационарных вращений динамически симметричного тела в синхронизме 2 : 1. Обнаружилось, что если при наличии только гравитационного момента (либо при взаимодействии гравитационного и магнитного моментов в случае $I=0$) такие вращения неустойчивы, когда $\rho_0 < 41^\circ 24'$, то воздействие на тело магнитного момента (случай $I \neq 0$) обеспечивает возможность устойчивости некоторых из них даже при $\rho_0 = 0$. Следовательно, у планет, имеющих магнитное поле, вероятность обнаружить естественные спутники, вращающиеся в синхронизме 2 : 1, вообще говоря, выше, чем у планет, лишенных магнитного поля.

Информация, полученная при исследовании стационарных вращений

небесного тела в синхронизме 2 : 1 и представленная на фиг. 3–6, выявляет еще одну важную причину, препятствующую реализуемости таких (а также, по-видимому, и большинства других) стационарных резонансных вращений в Солнечной системе. Эти стационарные вращения возможны только при некоторых значениях угла Σ и определенным образом связанных между собой значениях углов ρ и ϕ (разумеется, у каждого естественного тела инерционные характеристики и параметр δ фиксированы). Более того, эти стационарные вращения при наличии приливного трения могут быть устойчивыми только в некоторых достаточно узких интервалах значений указанных углов.

Исходя из результатов [14] можно предполагать, что если центральный эллипсоид инерции тела близок к сфере и не симметричен, то для существования стационарных вращений этого тела в синхронизме 2 : 1 должны быть связаны между собой значения уже не двух, а трех углов: ρ , ϕ и φ . Аналогичная ситуация, вероятно, имеет место и для других синхронизмов. Очевидно, для захвата тела в некоторое стационарное резонансное вращение необходимо, чтобы каждый из углов Σ , ρ , ϕ , φ попадал, эволюционируя, в некоторый узкий интервал значений, обеспечивающих существование и устойчивость этого стационарного вращения, когда средняя скорость вращения тела достигает в процессе эволюции одного из своих значений, соизмеримых со средней угловой скоростью обращения тела по орбите.

В частности, в окрестности синхронизма 2 : 1 величина модуля кинетического момента L , а следовательно, и средняя угловая скорость вращения тела должна быть близка к значению, определяемому из системы уравнений (1.7), поскольку, согласно [4], в резонансной зоне разность $(L-L_0)$ — величина порядка квадратного корня из отношения $|A-C|/A$. Тогда интеграл $L \cos \phi = C_2$ показывает, что угол ϕ должен быть близок к значению ϕ_0 , а угол ρ — к значению ρ_0 (последнее следует либо из уравнения (1.9), либо непосредственно из интеграла (1.6), когда он существует). Величины ϕ_0 и ρ_0 , так же как и величина L_0 , определяются из системы (1.7).

Поскольку вероятность попадания каждого из углов ϕ , ρ , Σ , φ в определенный момент приливной эволюции в нужный интервал своих значений не может быть высока, то мала и вероятность захвата тела в стационарные резонансные вращения, равная, вообще говоря, произведению вероятностей нахождения каждого из отмеченных углов в соответствующем интервале. Если же захвата в одно из таких стационарных вращений не произойдет, то близкое к рациональному соотношение между средними угловыми скоростями вращения и обращения тела не может сохраняться в течение длительного времени.

Действительно, из-за малых (при близких моментах инерции небесных тел) размеров резонансных зон, соответствующих любому из синхронизмов, величина L , не являющаяся стационарной (даже в среднем), при своем изменении с течением времени, по-видимому, достигнет границы резонансной зоны и пересечет ее. Тогда угловая скорость тела благодаря приливному трению будет изменяться до достижения ею следующего резонансного значения.

Следовательно, если некоторое стационарное резонансное вращение небесного тела неустойчиво (ранее показано, что вероятность его устойчивости мала), то соответствующая такому вращению граница резонансной зоны является «опасной» в смысле близости средней угловой скорости вращения тела к ее значению в рассматриваемом синхронизме. Исключение в указанном смысле представляет ситуация, возникающая в финальной стадии процесса приливной эволюции вращательного движе-

ния, когда $\rho \sim 0$, а средняя угловая скорость вращения небесного тела стремится к некоторому предельному значению, возрастающему [3, 9] с увеличением эксцентриситета его орбиты.

Если эксцентриситет орбиты равен нулю, то предельное значение средней угловой скорости вращения соответствует синхронизму 1:1. Если же эксцентриситет орбиты достаточно велик, то это предельное значение может соответствовать при подходящем значении e любому из других синхронизмов (например, при использовании для моделирования приливного момента формулы (1.3) — синхронизму 3:2 при $e \approx 0,28$ и синхронизму 2:1 при $e \approx 0,4$).

Независимо от того, является ли средняя угловая скорость вращения тела в финальной стадии эволюции резонансной или нет, эта угловая скорость, так же как и угол ρ , в дальнейшем не имеют вековых уходов и все время остаются вблизи своих постоянных (при неизменных параметрах орбиты) значений, даже при возможных изменениях других переменных (в частности, углов Σ , ϑ , φ). Следовательно, если даже стационарные вращения, соответствующие какому-либо из синхронизмов, возникающих в финальной стадии приливной эволюции вращения небесных тел, не реализуются (по всем переменным) или неустойчивы (например, из-за «неподходящих» значений углов Σ , ϑ , φ), то тем не менее границы резонансных зон этих синхронизмов «безопасны» с точки зрения близости средней угловой скорости вращения тела к ее резонансному значению.

Приведенные соображения, по-видимому, в достаточной степени объясняют возникновение в процессе приливной эволюции наблюдаемых сейчас резонансных вращений некоторых небесных тел. Ни одно из них не имеет эксцентриситета орбиты, достаточного для реализации в финальной стадии эволюции других синхронизмов, кроме 1:1 и 3:2, вероятности же захватов этих тел в резонансные вращения при немалых значениях угла ρ ничтожны по указанным ранее причинам.

В заключение отметим, что у естественных небесных тел, вероятно, не могут существовать и режимы магнитно-гравитационной стабилизации, изучавшиеся в [7], если только основным действующим на них диссипативным моментом является момент приливного трения. Можно показать, что одно из необходимых условий устойчивости этих режимов при наличии приливного трения сводится к следующему неравенству:

$$a_{23} \left(\frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \kappa_0^2} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \Sigma_0^2} - \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \kappa_0 \partial \Sigma_0} \right) \left(\frac{\text{ctg } \vartheta_0}{L_0} b_4 - b_3 \right) > 0 \quad (2.1)$$

Численное исследование неравенства (2.1) показывает, что для стационарных решений, выделенных в [7], оно всегда выполнено с обратным знаком и, следовательно, при наличии приливного трения эти решения неустойчивы.

Этот результат, однако, не означает, что рассмотренные в [7] решения разрушаются под действием любой диссипации. Напротив, можно показать, что при наличии, например, момента линейного трения, возникающего за счет перемещения спутника относительно сильно намагниченного шара, помещенного в сферической полости в корпусе спутника (известная схема «магнитного» демпфера), эти решения становятся асимптотически устойчивыми, и поэтому вращения спутника, им соответствующие, могут быть использованы в системах стабилизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хенгов А. А. Об одном режиме синхронизации движений небесных тел.— Астрон. ж., 1976, т. 53, вып. 6, с. 1325.
2. Хенгов А. А. Об одном условии устойчивости резонансных вращений небесных тел.— Астрон. ж., 1978, т. 55, вып. 6, с. 1308.
3. Приливы и резонансы в солнечной системе. Сб. статей./ Под ред. Жаркова В. Н. М.: Мир, 1975, 288 с.
4. Хенгов А. А. Синхронизация спутников.— В сб.: Динамика систем. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1974, вып. 4, с. 51.
5. Хенгов А. А. К вопросу о захвате некоторых небесных тел в резонансные вращения.— Астрон. ж., 1976, т. 53, вып. 5, с. 1120.
6. Сафронов В. С. Допланетное облако и его эволюция.— Астрон. ж., 1966, т. 43, вып. 4, с. 817.
7. Белецкий В. В., Хенгов А. А. Магнитно-гравитационная стабилизация спутника.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 22.
8. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
9. Белецкий В. В., Трушин С. И. Резонансы во вращении небесных тел и обобщенные законы Кассини.— В сб.: Механика твердого тела. Киев: Наукова думка, 1974, вып. 6, с. 50.
10. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
11. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966, 226 с.
12. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 62 с.
13. Хенгов А. А. Об эволюции вращательного движения некоторых небесных тел.— Астрон. ж., 1975, т. 52, вып. 5, с. 1066.
14. Огаркова Т. Н., Хенгов А. А. О магнитно-гравитационной стабилизации трехосного спутника.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 40.

Поступила в редакцию
26.II.1979