

УДК 531.38

**О СОЗДАНИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕЖЕСТКИХ  
УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ**

**ГАНИЕВ Р. Ф., ЗАКРЖЕВСКИЙ А. Е.**

(Москва, Киев)

В работах [1–3] построены законы управления с обратной связью, обеспечивающие выполнение абсолютно твердым телом, перемещающимся в центральном поле сил, широкого класса программных движений вокруг центра масс. В [4] задача создания сканирующих движений твердого тела решена на основании резонансного принципа возбуждения пространственных движений. В отличие от указанных выше в публикуемой работе сделана попытка решить задачу создания программных угловых движений управляемых объектов в центральном ньютоновском поле сил с учетом специфики, вносимой в их динамику присоединенными упругими элементами. Изложены три метода решения поставленной задачи и проведен их сравнительный анализ.

1. Рассмотрим объект общей массой  $m$ , изображенный на фиг. 1, содержащий жесткое несущее тело и присоединенные к нему упругие элементы. Свяжем с несущим телом систему главных центральных осей недеформированного объекта  $Ox_1x_2x_3$ . Введем также базовую систему координат  $C\xi_1\xi_2\xi_3$ , связанную с мгновенным положением центра масс объекта и поступательно перемещающуюся относительно инерциальной системы  $C_1X_1X_2X_3$  при движении точки  $C$  по орбите вокруг притягивающего центра  $C_1$ . С точкой  $C$  свяжем систему осей  $Cy_1y_2y_3$ , параллельных осям  $Ox_1x_2x_3$ , и орбитальную систему координат  $Cz_1z_2z_3$  (фиг. 2). Ориентацию связанной системы осей относительно базовой определим при помощи самолетных углов (фиг. 3).

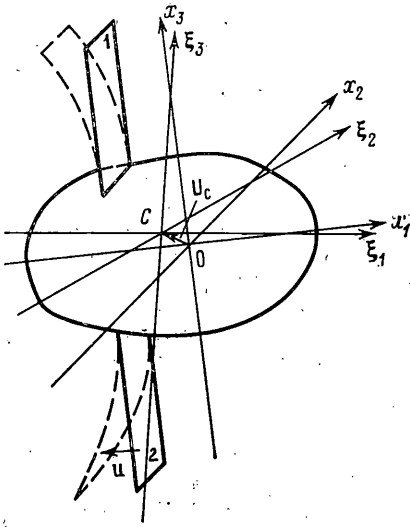
Наличие упругих элементов существенно меняет динамические свойства объекта по сравнению с абсолютно твердым телом. В общем случае мгновенное положение центра масс в системе осей  $Ox_1x_2x_3$  переменное. Предположим наличие на несущем теле датчиков углоразориентации и угловых скоростей, линейных акселерометров, блока формирования управляющих моментов и исполнительных органов в виде трех одноступенчатых гироскопов. Все измерительные приборы и исполнительные органы предположим ориентированными соответствующим образом вдоль осей  $Ox_i$ . Дополнительные требования к измерительному комплексу будут рассмотрены при решении конкретных задач управления.

Перейдем к построению математической модели объекта. Примем, что орбита круговая и движение вокруг центра масс не связано с орбитальным.

В предположении о том, что размеры объекта существенно меньше расстояния  $C_1O$ , момент  $m_e^o$  внешних сил относительно точки  $O$  может быть записан в виде

$$m_e^o = \frac{3\mu}{r_c^3} \int_m (\rho + u) \times [(\rho + u - U_c) \cdot k_c] k_c dm$$

$$U_c = \frac{1}{m} \int_m u dm \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Здесь  $\mu$  — гравитационная постоянная,  $r_c$  — расстояние от притягивающего центра до центра масс объекта,  $\mathbf{k}_c$  — орт, направленный из центра  $C_1$  в точку  $C$ ,  $\rho$  — радиус-вектор точек недеформированного объекта относительно точки  $O$ ,  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$  — вектор упругих перемещений относительно недеформированного состояния,  $\mathbf{U}_c$  — радиус-вектор мгновенного положения центра масс объекта относительно точки  $O$ .

Выражение (1.1) может быть приведено к виду

$$\mathbf{m}_G^\circ = \frac{3\mu}{r_c^3} \mathbf{k}_c \times \left\{ (\Theta_T^\circ + \Theta_Y^\circ) \cdot \mathbf{k}_c + \int [2(E\rho \cdot \mathbf{u} - \rho\mathbf{u} - \rho\mathbf{u}) + E\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}\mathbf{u}] dm \cdot \mathbf{k}_c \right\} \quad (1.2)$$

Здесь  $\Theta_T^\circ$  и  $\Theta_Y^\circ$  — тензоры инерции относительно точки  $O$  соответственно твердого несущего тела с заторможенными роторами гироскопов и упругих элементов в недеформированном состоянии,  $E$  — единичный тензор,  $\rho\mathbf{u}$  — диадное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\rho$ .

Введем обозначения

$$\mathbf{m}_T^\circ = \frac{3\mu}{r_c^3} \mathbf{k}_c \times \Theta_T^\circ \cdot \mathbf{k}_c \quad (1.3)$$

$$\mathbf{m}_Y^\circ = \frac{3\mu}{r_c^3} \mathbf{k}_c \times \left\{ \Theta_Y^\circ \cdot \mathbf{k}_c + \int [2(E\rho\mathbf{u} - \rho\mathbf{u} - \rho\mathbf{u}) + E\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}\mathbf{u}] dm \cdot \mathbf{k}_c \right\} \quad (1.4)$$

Эти величины определяют моменты внешних сил относительно точки  $O$ , действующие соответственно на несущее твердое тело и на упругие элементы.

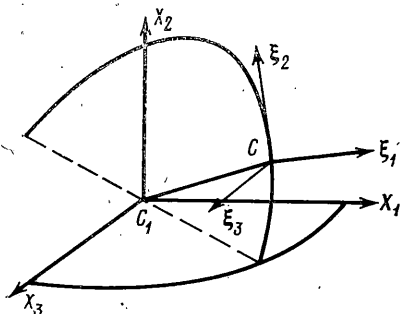
Момент внешних сил  $\mathbf{m}_G^c$  относительно мгновенного положения центра масс объекта можно записать в виде

$$\mathbf{m}_G^c = \mathbf{m}_T^\circ + \mathbf{m}_Y^\circ - \mathbf{k}_c \times (E\mathbf{U}_c^2 - \mathbf{U}_c\mathbf{U}_c) \cdot \mathbf{k}_c \frac{3\mu m r_c^{-3}}{r} \quad (1.5)$$

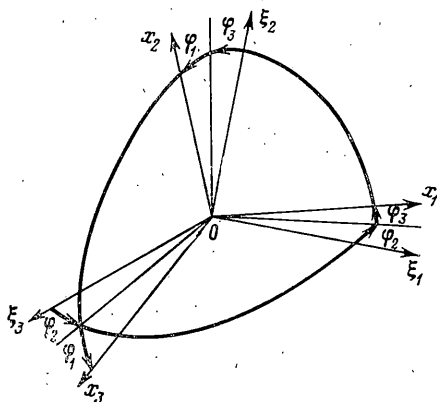
В результате уравнение движения объекта вокруг центра масс может быть представлено следующим образом:

$$\Theta_T^c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\Theta_T^c)' \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_T^c \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = (\Theta_Y^c)' \cdot \boldsymbol{\omega} - \Theta_T^c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \Theta_Y^c \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}_T^\circ + \mathbf{m}_Y^\circ + \mathbf{m}_{Y_0}^\circ - \mathbf{k}_c \times (E\mathbf{U}_c^2 - \mathbf{U}_c\mathbf{U}_c) \cdot \mathbf{k}_c \frac{3\mu m}{r^3} \quad (1.6)$$

Здесь  $\Theta_T^c$  и  $\Theta_Y^c$  — тензоры инерции несущего тела с заторможенными роторами гироскопов и недеформированных упругих элементов относительно точки  $C$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор абсолютной угловой скорости несущего тела,  $\mathbf{m}_T^\circ$  — гравитационный момент,  $\mathbf{m}_{Y_0}^\circ$  — момент, вызываемый упругими перемещениями элементов системы относительно точки  $O$  и измеряемый в совокупности с  $\mathbf{m}_Y^\circ$  и величиной  $\Theta_Y^c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \Theta_Y^c \cdot \boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{H}$  — вектор кинетического момента гироскопов системы управления, штрих означает дифференцирование по времени в системах осей  $Ox_1x_2x_3$  и  $Cy_1y_2y_3$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнения движения гироскопов системы управления имеют вид

$$H_i \dot{\omega}_i = -I_i \dot{\omega}_i - \tau_i H_i + M_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.7)$$

где  $I_i$ ,  $\tau_i$ ,  $M_i$  — соответственно момент инерции, коэффициент трения и управляющий момент  $i$ -го гироскопа,  $H_i$ ,  $\omega_i$  — проекции кинетического момента  $i$ -го гироскопа в относительном движении и вектора абсолютной угловой скорости несущего тела соответственно на ось  $Ox_i$ .

Проекции угловых скоростей на оси связанной системы координат в соответствии с принятой последовательностью поворотов определяются следующими кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_3, & \omega_2 &= \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 + \varphi_3 \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_1 \\ \omega_3 &= \varphi_3 \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_1 - \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнения относительного движения упругих элементов в общем виде можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) + l_i [u_n] = 0 \quad (i, n=1, 2, 3) \quad (1.9)$$

$$B_j [u_n] \cdot B_k [u_n] = 0 \text{ на } S \quad (n=1, 2, 3; j=1, 2; k=3, 4) \quad (1.10)$$

Здесь  $L$  — плотность кинетического потенциала,  $l_i$  — дифференциальные операторы, определенные в области, допускающей упругие деформации,  $u_i$  — компоненты вектора  $u$  в связанных осях,  $B_i$  — дифференциальные векторные операторы, определенные на поверхности  $S$ , ограничивающей упругие элементы. При построении кинетического потенциала следует учитывать, что потенциальная энергия упругих элементов в их движении относительно недеформированного состояния определяется упругими и гравитационными силами. Таким образом, система уравнений (1.6)–(1.10) определяет управляемое движение упругого объекта в центральном поле сил.

Рассмотрим возможные способы решения задачи построения управляющих моментов  $M_i$ , обеспечивающих устойчивое выполнение несущим телом заданных пространственных движений

$$\varphi_i = \psi_i(t) \in P, \quad t \in [t_0, T] \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.11)$$

где  $P$  — множество допустимых программ, ограничения на которое определяются видом соотношений (1.8) и в данном случае сводятся к условию  $|\psi_3| < 1/2\pi$ .

Выражения (4.11) можно рассматривать как задаваемую часть частного решения системы уравнений (4.6) — (4.10). Таким образом приходим к задаче замыкания системы дифференциальных уравнений управлением по заданному частному решению [5]. Ниже излагаются три метода решения этой задачи.

2. Суть первого метода состоит в построении управления, обеспечивающего заданный вид уравнений в возмущениях. Наличие в системе упругих элементов делает в общем случае число ее фазовых переменных неограниченным. Однако движение несущего тела может быть полностью определено, если кроме упомянутых выше измерительных приборов на объекте установить датчики силовых воздействий упругих элементов.

В результате все силовые воздействия на несущее тело от гравитационного поля и от упругих перемещений гибких элементов могут быть либо вычислены, либо измерены. Определив компоненты орта  $k_c$  в связанных осях как функции заданных параметров орбитального движения и измеряемых угловых координат  $\varphi_i$ , получим возможность вычислить проекции вектора  $m_T^\circ$  на связанные оси в любой момент времени. Вектор  $m_T^\circ$  может быть определен также в результате измерений в сумме с другими моментами от упругих элементов. Вектор

$$m_G^\circ - m_G^c = k_c \times (E u c^2 - U_c U_c) \cdot k_c 3 \mu m r c^{-3}$$

может быть определен на основе двойного интегрирования сигналов линейных акселерометров.

Воздействие упругих элементов на несущее тело при произвольных пространственных движениях полностью определяется моментом, по предположению измеряемым

$$M_T^\circ = m_T^\circ + m_{T0}^\circ - \Theta_T^\circ \cdot \omega^\circ - \omega^\circ \times \Theta_T^\circ \cdot \omega - (\Theta_T^\circ)' \cdot \omega$$

и моментом, который может быть вычислен по показаниям датчиков

$$\Delta M_T^\circ = -(\Theta_T^c - \Theta_T^\circ) \cdot \omega^\circ - (\Theta_T^c)' \cdot \omega - \omega^\circ \times (\Theta_T^c - \Theta_T^\circ) \cdot \omega$$

Покажем построение искомого управления для простого случая, когда в силу ряда ограничений на геометрию упругомассовых характеристик объекта и класс взаимных движений упругих элементов можно считать  $U_c = 0$ .

Как показано в [6], построение множества уравнений по заданному частному решению выполняется с точностью до произвольных аддитивных функций, которые обращаются в нуль на частном решении. Воспользовавшись произволом, допускаемым при выборе аддитивных функций, определим законы формирования управляющих моментов  $M_i$ . При этом потребуем, чтобы уравнения в возмущениях для угловых движений были линейными и независимыми. В частности, уравнение может быть таким, чтобы в возмущенном относительно программного движения отклонения угловых координат  $\alpha_i = \varphi_i - \psi_i$  удовлетворяли уравнениям

$$\alpha_i'' = d_{1i} \alpha_i' - d_{2i} \alpha_i = \Phi_i(\alpha_i', \alpha_i) \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

где  $d_{ji}$  — некоторые положительные постоянные коэффициенты.

Продифференцируем по времени кинематические соотношения (1.18). В каждом из полученных выражений для  $\omega_i'$  вторые производные от  $\varphi_i$  представим в виде  $\varphi_i'' = \psi_i'' + \alpha_i''$ .

Подставим полученные соотношения, а также (1.7) и (1.8) в уравнение (1.6), спроектируем его на оси  $Ox_1x_2x_3$  и разрешим полученные уравнения с номером  $i$  относительно  $\alpha_i''$ . Приравнявая правую часть  $i$ -го уравнения функции  $\Phi_i(\alpha_i', \alpha_i)$ , получаем следующие выражения для управ-

ляющих моментов  $M_i$ , обеспечивающих выполнение условий (2.1):

$$\begin{aligned}
 M_1 &= (C_2 - C_3) \omega_2 \omega_3 - \omega_2 H_3 + \omega_3 H_2 + H_1 \tau_1 + C_1^M \{ -\psi_1'' + \Phi_1(\alpha_1', \alpha_1) - \\
 &\quad - [\psi_2'' - \Phi_2(\alpha_2', \alpha_2)] \sin \varphi_3 - \varphi_2' \varphi_3' \cos \varphi_3 \} + m_{B1}^c + M_{Y1}^\circ \\
 M_2 &= (C_3 - C_1) \omega_1 \omega_3 - \omega_3 H_1 + \omega_1 H_3 + H_2 \tau_2 + C_2^M \{ [-\psi_2'' + \Phi_2(\alpha_2', \alpha_2)] \times \\
 &\quad \times \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \varphi_2' \varphi_3' \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 + \varphi_1' \varphi_2' \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \varphi_1' \varphi_2' \sin \varphi_1 \times \\
 &\quad \times \cos \varphi_3 - [\psi_3'' - \Phi_3(\alpha_3', \alpha_3)] \sin \varphi_1 - \varphi_1' \varphi_3' \cos \varphi_1 \} + m_{B2}^c + M_{Y2}^\circ \\
 M_3 &= (C_1 - C_2) \omega_1 \omega_2 - \omega_1 H_2 + \omega_2 H_1 + H_3 \tau_3 + C_3^M \{ [\psi_2'' - \Phi_2(\alpha_2', \alpha_2)] \times \\
 &\quad \times \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \varphi_2' \varphi_3' \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + \varphi_1' \varphi_2' \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \\
 &\quad + \varphi_1' \varphi_3' \sin \varphi_1 [\psi_3'' - \Phi_3(\alpha_3', \alpha_3)] \cos \varphi_1 \} + m_{B3}^c + M_{Y3}^\circ \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Здесь  $C_i$  — моменты инерции твердого несущего тела с заторможенными роторами гироскопов в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ ,  $C_i^M = C_i - I_i$ .

Как следует из (2.2), найденные управляющие моменты определяются заданными функциями  $\psi_i(t)$ , измеряемыми текущими (возмущенными) значениями  $H_i$ ,  $\omega_i$ ,  $M_{Yi}^\circ$ , вычисляемыми значениями  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i'$ ,  $m_{Bi}^c$  ( $i=1, 2, 3$ ). Функции  $\Phi_i(\alpha_i', \alpha_i)$ , используемые для формирования управления (2.2), обращаются в нуль на частном решении (1.11). При любых значениях коэффициентов  $d_{1i}$ ,  $d_{2i}$  это частное решение существует. При положительных значениях  $d_{1i}$ ,  $d_{2i}$  программные движения несущего тела будут асимптотически устойчивы по  $\varphi_i$  и  $\varphi_i'$  при условии ограниченности величин  $H_i$  и  $M_{Yi}^\circ$ .

Исходя из физических соображений можно утверждать, что в течение конечного промежутка времени  $[t_0, T]$  решения системы уравнений (1.9) должны оставаться конечными во всей области деформируемых элементов, включая ее границу. Следовательно, любые аналитические функции решений на границе, в том числе и силовые факторы, будут ограничены. То же можно утверждать и относительно изменения величин  $H_i$ . Отсюда следует, что на любом конечном интервале времени управление (2.2) обеспечивает устойчивость программного движения по переменным  $\varphi_i$ ,  $\varphi_i'$  ( $i=1, 2, 3$ ), причем характер устойчивости соответствует асимптотическому затуханию возмущений угловых координат и угловых скоростей несущего твердого тела.

3. Второй метод состоит в построении управления в виде суммы двух слагаемых. Первое из них гарантирует существование у системы уравнений движения частного решения (1.11), а второе обеспечивает его устойчивость. Такой метод требует определения состояния системы конечным числом фазовых переменных, поскольку при создании управляющих моментов используются не измеряемые величины, а вычисляемые. Поэтому относительно упругих элементов объекта предположим, что смещение частицы, находящейся в недеформированном состоянии в точке  $M(x_1, x_2, x_3)$ , задается вектором  $\mathbf{u}$ , зависящим от координат точки и от времени. Считаем, что время входит в  $\mathbf{u}$  только через параметры  $q_\alpha$ , которые можно рассматривать как обобщенные координаты. Число этих параметров принимаем конечным и обозначим  $N$ . Оставаясь в рамках методов аналитической механики с конечным числом степеней свободы, будем считать также, что зависимость  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, q_1, \dots, q_N)$  может быть описана конечным рядом по степеням  $q_\alpha$ . Для определенности ограничимся представлением

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha \mathbf{u}^\alpha(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N q_\alpha q_\beta \mathbf{u}^{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3)$$

Как уже было сказано, поставленная задача сводится к замыканию системы уравнений движения (1.6) — (1.10) управлением по частному решению, заданному для части переменных. Для обеспечения устойчивости такого решения к найденным управляющим моментам  $M_i$  следует добавить определенным образом выбранные стабилизирующие моменты  $M_{ci}$ . Они должны обращаться в нуль на частном решении (1.11) и, следовательно, могут быть функциями только возмущений угловых координат и их производных:  $M_{ci} = M_{ci}(\alpha_k, \dot{\alpha}_k)$ , ( $i, k=1, 2, 3$ ).

Суть предлагаемого метода состоит в том, чтобы построить основную часть управляющих моментов  $M_i$  в функции от программных, т. е. заданных заранее значений углов ориентации  $\psi_i$  и квазискоростей  $p_i = \dot{\psi}_i(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ , а стабилизирующую часть управления сделать с обратной связью, т. е. формировать моменты  $M_{ci}$  на основе текущих показаний принятых датчиков.

Для построения функций  $M_i(\psi_k, p_k)$  ( $i, k=1, 2, 3$ ) воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы.

Предполагая невозмущенность орбиты и, следовательно, неизменность кинетического момента системы в переносном движении, получаем

$$dK^c/dt = m^c \quad (3.1)$$

где  $K^c$  — вектор кинетического момента системы в ее движении относительно центра масс,  $m^c$  — момент внешних сил относительно центра масс.

Введем матрицы перехода для принятых систем координат:

$$j_k = \sum_{i=1}^3 a_{ki} j_i^x, \quad j_L^c = \sum_{k=1}^3 b_{Lk} j_k = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 b_{Lk} a_{ki} j_i^x$$

где  $j_L^c, j_k, j_i^x$  — орты системы координат  $CX_1X_2X_3, C\xi_1\xi_2\xi_3$  и  $Ox_1x_2x_3$  соответственно.

Суммарный кинетический момент  $K^c$  рассматриваемого объекта можно представить в виде

$$\begin{aligned} K^c = & \omega \cdot \left( \Theta^0 + 2 \sum_{\alpha=1}^N \Lambda^\alpha q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N Q^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \right) + \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha G^\alpha + \\ & + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N q_\alpha q_\beta \left( \Gamma^{\alpha\beta} - \int_m U^\alpha dm \times \int_m U^\beta dm \right) + H \\ \Lambda^\alpha = & \int_m \left[ E \rho U^\alpha - \frac{1}{2} (\rho U^\alpha + U^\alpha \rho) \right] dm, \quad \Gamma^{\alpha\beta} = \int_m U^\alpha \times U^\beta dm \\ Q^{\alpha\beta} = & \int_m \left[ E U^\alpha U^\beta - \frac{1}{2} (U^\alpha U^\beta - U^\beta U^\alpha) + E \rho U^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\rho U^{\alpha\beta} + U^{\alpha\beta} \rho) \right] dm \\ G^\alpha = & \int_m \rho \times U^\alpha dm \end{aligned}$$

где  $\rho$  — радиус-вектор точки объекта в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ ,  $E$  — единичный тензор. Знак интеграла здесь применяется в смысле интеграла Стильтьеса — суммирование может вестись по распределенным и по сосредоточенным величинам.

В соответствии с (3.1) величина и направление  $K^c$  в процессе выполнения объектом пространственных движений могут изменяться только

под действием внешнего момента

$$\mathbf{m}^c = \sum_{i=1}^3 m_i^c \mathbf{j}_i^x$$

Пусть при  $t=t_0$  известны  $\varphi_i = \psi_{i0}$ ,  $\omega_i = p_{i0}$ ,  $H_i = H_{i0}$ ,  $q_\alpha = q_{\alpha 0}$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ). Запишем суммарный начальный кинетический момент объекта в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Обозначив ее орты при  $t=t_0$  через  $\mathbf{j}_{h0}^x$ , получим

$$\mathbf{K}_0^c = \sum_{h=1}^3 (H_{h0} + L_{h0}) \mathbf{j}_{h0}^x$$

Здесь  $L_{h0}(\psi_{i0}, p_{i0}, q_{\alpha 0})$  — проекции в связанных осях вектора  $\mathbf{L} = \mathbf{K}^c - \mathbf{H}$  при  $t=t_0$ .

Выражение для вектора кинетического момента системы в начальный момент времени в осях  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  имеет вид

$$\mathbf{K}_0^c = \sum_{i=1}^3 \sum_{h=1}^3 (H_{h0} + L_{h0}) a_{hi}^\circ \mathbf{j}_i$$

где  $\|a_{hi}^\circ\|$  — матрица перехода от связанных осей к осям  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  в их начальном положении, получаемая из матрицы  $\|a_{hi}\|$  заменой в ней значений  $\varphi_i$  на  $\psi_{i0}$ .

Переходя к инерциальной системе координат, получим

$$\mathbf{K}_0^c = \sum_{n=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{h=1}^3 (H_{h0} + L_{h0}) a_{hi}^\circ b_{nh} \mathbf{j}_n^c = \sum_{n=1}^3 K_{n0} \mathbf{j}_n^c \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) в той же системе координат принимает вид

$$\sum_{n=1}^3 \frac{dK_{nc}}{dt} \mathbf{j}_n^c = \sum_{n=1}^3 m_{nc} \mathbf{j}_n^c \quad (3.3)$$

где  $K_{nc}$ ,  $m_{nc}$  — проекции векторов кинетического момента и момента внешних сил на оси  $C_1X_1X_2X_3$ . Интегрируя (3.3), получим

$$K_{nc} = K_{n0} + \int_{t_0}^t m_{nc}(\tau) d\tau \quad (n=1,2,3) \quad (3.4)$$

Предполагая  $m_k^\circ$  — проекции вектора  $\mathbf{m}^c$  на оси  $Ox_1x_2x_3$  в программном движении — известными функциями времени, представим

$$\mathbf{m}^c = \sum_{h=1}^3 m_h^\circ(t) \mathbf{j}_h^x$$

Тогда в инерциальных осях

$$\mathbf{m}^c = \sum_{n=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{h=1}^3 m_h^\circ a_{hi} b_{nh} \mathbf{j}_n^c = \sum_{n=1}^3 m_{nc} \mathbf{j}_n^c, \quad m_{nc} = \sum_{i=1}^3 \sum_{h=1}^3 m_h^\circ a_{hi} b_{nh} \quad (3.5)$$

Следовательно, в программном движении

$$K_{nc} = K_{n0} + \int_{t_0}^t m_{nc}(\tau) d\tau \quad (n=1,2,3)$$

Вектор суммарного кинетического момента объекта в программном движении в проекциях на оси  $Ox_1x_2x_3$  имеет вид

$$K^c = \sum_{m=1}^3 (H_m + L_m) j_m^x$$

где  $H_m$  и  $L_m$  — проекции векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{L}$  соответственно на связанные оси.

Проектируя составляющие  $K_{nc} j_n^c$  вектора  $K^c$  на связанные оси, находим выражение для кинетических моментов управляющих гироскопов в программном движении

$$H_p = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 K_{nc} b_{ni} a_{ip} - L_p \quad (p=1,2,3) \quad (3.6)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 K_{nc} b_{ni} a_{ip} = m_{pc}(t) \quad (p=1,2,3)$$

и  $b_{ni} = 0$ , так как по предположению система координат  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  движется поступательно в инерциальном пространстве, из (3.6) получим закон изменения  $H_p$  во времени в процессе выполнения программного движения:

$$H_p = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 K_{nc} b_{ni} a_{ip} - L_p + m_{pc} \quad (p=1,2,3)$$

Для формирования программных управляющих моментов воспользуемся уравнениями движения маховиков. Из (1.7) следует

$$M_k = H_k + I_k p_k + \tau_k H_k \quad (k=1, 2, 3)$$

В результате

$$M_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 (K_{nc} b_{ni} a_{ik} + \tau_k K_{nc} b_{ni} a_{ik}) - L_k \tau_k - L_k + I_k p_k + m_{kc} \quad (k=1,2,3) \quad (3.7)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при замыкании системы уравнений (1.6)–(1.10) управлением (3.7) она будет иметь частное решение (1.11) по переменным  $\varphi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). По остальным переменным частное решение, соответствующее решению (1.11), может быть получено в результате интегрирования соответствующих уравнений. Найденные таким образом зависимости  $q_\alpha = q_\alpha(t)$ , ( $\alpha=1, \dots, N$ ) используются для определения функций  $L_k(q_\alpha)$ .

Ограничения, налагаемые на частные решения по переменным  $H_i, q_\alpha$  ( $i=1, 2, 3; \alpha=1, \dots, N$ ), можно свести к установлению верхних границ модулей этих величин, исходя из требований практики.

Функции  $M_{ck}$  выберем в виде

$$M_{ck} = r_{1k} \alpha_k + r_{2k} \alpha_k \quad (k=1, 2, 3)$$



Это наиболее простая структура функций  $M_{ck}$ , позволяющая обеспечить устойчивость программных движений.

Формирование управлений  $U_k$  в виде

$$U_k = M_k + M_{ck} \quad (k=1, 2, 3) \quad (3.8)$$

не меняет частного решения (1.11).

Проводя аналитическое исследование устойчивости частного решения (1.11), придем к системе нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Только для некоторых частных программных движений коэффициенты уравнений возмущенного движения будут периодическими. Отсутствие регулярных аналитических методов исследования устойчивости тривиальных решений таких систем уравнений и громоздкость численных реализаций для них прямого метода Ляпунова приводят к тому, что предпочтительным в ряде случаев оказывается прямое численное интегрирование системы уравнений движения, замкнутых управлением.

В качестве иллюстрации изложенного метода приведем построение управления, обеспечивающего существование и устойчивость частного решения  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=\psi_2(t)$ ,  $\varphi_3=\psi_3(t)$ , для случая, когда упругие элементы расположены вдоль оси  $Ox_3$  в плоскости  $Ox_1x_2$  и  $u=u(x_1, q_1, \dots, q_N)$  (фиг. 1).

Выбирая матрицу  $\|a_{ih}\|$  в соответствии с принятой последовательностью поворотов в случае задания ориентации связанной системы осей самолетными углами [7] и приняв для определенности компоненты матрицы  $\|b_{ih}\|$  в виде  $b_{ih}=\delta_{ih}$ , где  $\delta_{ih}$  — символ Кронекера, приходим к следующим выражениям для управляющих моментов:

$$\begin{aligned} U_1 &= K_{1c}(\psi_2^* \sin \psi_2 \cos \psi_3 + \psi_3^* \cos \psi_2 \sin \psi_3) + \\ &+ K_{2c}(\psi_3^* \cos \psi_3 - K_{3c}(\psi_2^* \cos \psi_2 \cos \psi_3 - \psi_3^* \sin \psi_2 \sin \psi_3) + m_1^0 - (C_1 - I_1)p_1^* + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^N t_2^\alpha [(q_1^\alpha - q_2^\alpha) p_3^* + (q_1^\alpha - q_2^\alpha) p_3^*] + \tau_1 (K_{1c} \cos \psi_2 \cos \psi_3 + K_{2c} \sin \psi_3 - \\ &- K_{3c} \sin \psi_2 \cos \psi_3 - C_1 p_1^* + \sum_{\alpha=1}^N (q_1^\alpha - q_2^\alpha) t_2^\alpha p_3^* + r_{11} \alpha_1^* + r_{21} \alpha_1, \\ U_2 &= K_{1c}(\psi_2^* \sin \psi_2 \sin \psi_3 - \psi_3^* \cos \psi_2 \cos \psi_3) - K_{2c} \psi_3^* \sin \psi_3 + \\ &+ K_{3c}(\psi_2^* \cos \psi_2 \sin \psi_3 + \psi_3^* \sin \psi_2 \cos \psi_3) + m_2^0 - (C_2 - I_2)p_2^* - \\ &- \sum_{\alpha=1}^N t_2^\alpha (q_1^\alpha - q_2^\alpha) p_2^* + \tau_2 [-K_{1c} \cos \psi_2 \sin \psi_3 + K_{2c} \cos \psi_3 + \\ &+ K_{3c} \sin \psi_2 \sin \psi_3 - C_2 p_2^* + \sum_{\alpha=1}^N (q_2^\alpha - q_1^\alpha) t_2^\alpha] + r_{12} \alpha_2^* + r_{22} \alpha_2, \\ U_3 &= K_{1c} \psi_2^* \cos \psi_2 - K_{3c} \psi_2^* \cos \psi_2 + m_3^0 - (C_3 - I_3)p_3^* + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^N t_2^\alpha [(q_1^\alpha - q_2^\alpha) p_1^* + (q_1^\alpha - q_2^\alpha) p_1^*] + \tau_3 [K_{1c} \sin \psi_2 + \\ &+ K_{3c} \cos \psi_2 - C_3 p_3^* + \sum_{\alpha=1}^3 t_2^\alpha (q_1^\alpha - q_2^\alpha) p_1^* + r_{13} \alpha_3^* + r_{23} \alpha_3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$t_2^\alpha = m_p D \int_0^1 \varphi_\alpha(s) (s + RD^{-1}) ds$$

Здесь  $m_p$  — масса одного упругого элемента,  $D$  — его длина,  $R$  — аппликата точки крепления упругого элемента к несущему телу,  $\varphi_\alpha(s)$  — собственные формы изгибных колебаний упругого элемента,  $s$  — безразмерная координата,  $q_1^\alpha, q_2^\alpha$  — обобщенные координаты, соответствующие изгибным перемещениям упругих элементов 1 и 2 (фиг. 1).

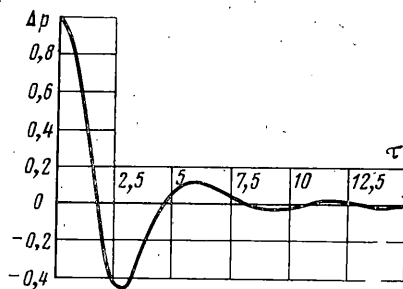
Зададимся соотношением моментов инерции недеформированного объекта  $C_1 : C_2 : C_3 = 3 : 3,5 : 4$ , значением коэффициентов  $\omega_{r_{21}} = 0,016$ ,  $\omega_{r_{22}} = 0,020$ ,  $\omega_{r_{23}} = 0,024$ ,  $a = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $r_{1i} = 0,5$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $t_2^{(1)} : C_3 = 0,075$ ,  $t_2^{(2)} : C_3 = 0,0375$ ,  $t_2^{(3)} : C_3 = 0,01875$ ,  $t_2^\alpha : A^{\alpha\alpha} = 1,5$  ( $\alpha=1, 2, 3$ ),  $t_1 = 20$  и предположим существование конструкционного демпфирования с обобщенным коэффициентом диссипации 0,01.

В качестве программного движения выберем сканирование осью  $Ox_1$  спирали на интервале  $\omega t \in [0, t_1]$

$$\psi_2(t) = at \sin \omega t, \quad \psi_3(t) = at \cos \omega t \quad (3.10)$$

Для суждения об устойчивости выполнения программы (3.10) проведем численный эксперимент, интегрируя методом Рунге — Кутты уравнения (1.6) — (1.8), (3.9), а также (1.9), (1.10), дискретизированные в соответствии с [7] на основе принятых выше представлений упругих перемещений, при наличии возмущений начальных условий.

На фиг. 4 показано изменение в функции от  $\tau = \omega t$  величины погрешности выполнения программного движения



Фиг. 4

$$\Delta p = \{ [\varphi_2^2(\tau) + \varphi_3^2(\tau)]^{1/2} - [\psi_2^2(\tau) + \psi_3^2(\tau)]^{1/2} \} \varphi_{30}^{-1}$$

при ликвидации начальных возмущений по углу  $\varphi$ . На фиг. 5 показано развитие и ликвидация возмущений по  $\varphi$ , а на фиг. 6 — развитие и затухание возмущений обобщенных координат  $q_1^\alpha$  для  $\alpha=1, 2, 3$ , отнесенных к максимальной величине возмущения  $q_1^\alpha$  при  $\tau \in [0, t_1]$ . Эти величины на фиг. 6 обозначены соответственно цифрами 1, 2, 3. Как видно из приведенных графиков, начальные возмущения и порождаемые ими отклонения от программы со временем ликвидируются и движение системы асимптотически стремится к программному. На конечном интервале времени такая картина соответствует технической устойчивости движения.

4. Для построения управлений программными угловыми движениями исследуемого объекта может быть использован также метод создания пространственных угловых движений основанный на возбуждении объекта по одному из каналов управления с последующим перераспределением энергии по другим каналам в условиях резонансного взаимодействия между ними. Основы этого подхода изложены в [8], где показана возможность существования в условиях нелинейных резонансов стационарных пространственных режимов движения твердых тел.

Применив дискретизацию движения упругих элементов, описанную в [7], и считая, что перемещения упругих элементов настолько малы, что могут быть описаны линейными членами относительно обобщенных координат  $q_1^\alpha, q_2^\alpha$ , представим уравнения движения объекта относительно мгновенного положения центра масс в виде

$$\Theta^{\circ} \cdot \omega^{\circ} + \omega \times \Theta^{\circ} \cdot \omega + H' + \omega \times H = m^{\circ} g - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^2 [2q_k^{\alpha} (\Lambda_k^{\alpha} \cdot \omega + \omega \times \Lambda_k^{\alpha} \cdot \omega) - (q_k^{\alpha})^{\circ} (2\omega \cdot \Lambda_k^{\alpha} + \omega \times G_k^{\alpha} - (q_k^{\alpha})^{\circ} G_k^{\alpha})] \quad (4.1)$$

Уравнения (1.9), (1.10) примут вид

$$\sum_{\beta=1}^N A_k^{\alpha\beta} (q_k^{\beta})^{\circ} = - \sum_{\beta=1}^N c^{\alpha\beta} q_k^{\beta} + \omega \cdot \left( \Lambda_k^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^N Q_k^{\alpha\beta} q_k^{\beta} \right) \cdot \omega + \omega \times \Lambda_k^{\alpha} \cdot \omega - (q_k^{\alpha})^{\circ} (2\omega \cdot \Lambda_k^{\alpha} + \omega \times G_k^{\alpha}) - (q_k^{\alpha})^{\circ} G_k^{\alpha} \quad (k=1,2; \alpha=1, \dots, N) \quad (4.2)$$

В качестве закона управления, позволяющего реализовать с определенной погрешностью широкий класс пространственных угловых движений, можно выбрать следующий ( $\delta_{ii}$  — символ Кронекера):

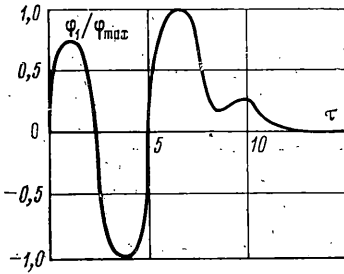
$$M_i = C_i \lambda_i^2 \varphi_i + C_i r_i \dot{\varphi}_i + \tau_i H_i + I_i \omega_i^{\circ} - C_i a \delta_{ii} \sin \omega t \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.3)$$

В результате уравнения (1.7) могут быть переписаны в виде

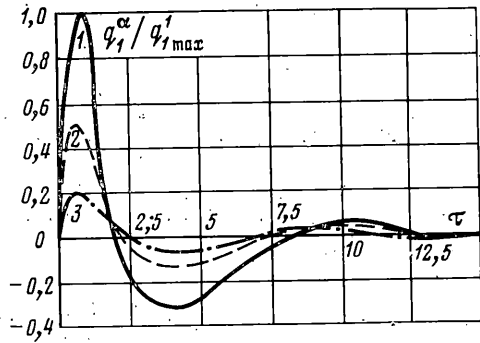
$$h_i^{\circ} = \lambda_i^2 \varphi_i + r_i \dot{\varphi}_i - a \delta_{ii} \sin \omega t \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.4)$$

где  $h_i = H_i / C_i$ ;  $a$ ,  $\omega$ ,  $\lambda_i$ ,  $r_i$  — параметры системы управления.

Как видно из (4.3) и (4.4), возбуждение системы происходит лишь по каналу управления, соответствующего углу  $\varphi_i$ . Задача замыкания системы уравнений движения сводится к определению параметров системы управления  $a$ ,  $\omega$ ,  $\lambda_i$ ,  $r_i$ , обеспечивающих существование заданных частных решений вида (1.11).



Фиг. 5



Фиг. 6

При исследовании реализации программных движений углы ориентации и их производные будем считать не малыми, но такими, что в уравнениях движения с приемлемой точностью могут быть сохранены только члены не выше третьего порядка относительно угловых координат и их производных. В выражениях для гравитационных моментов ограничимся лишь линейными членами относительно угловых координат и обобщенных координат  $q_1^{\alpha}$ ,  $q_2^{\alpha}$ . Учитывая принятую точность, уравнения колебательного движения рассматриваемого объекта можно представить в виде

$$\varphi_1^{\circ\circ} + \lambda_1^2 \varphi_1 = a \sin \omega t + \left\{ -r_1 \dot{\varphi}_1 - \frac{C_3}{C_1} h_{03} \varphi_2^{\circ} + \frac{C_2}{C_1} h_{02} \varphi_3^{\circ} - \varphi_2^{\circ} \varphi_3 - \frac{C_1 + C_2 - C_3}{C_1} \varphi_2^{\circ} \varphi_3 - \left[ \varphi_3^{\circ} \varphi_1 h_{03} + \varphi_2^{\circ} \left( \int \lambda_3^2 \varphi_3 dt + r_3 \varphi_3 \right) \right] \frac{C_3}{C_1} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \varphi_3 \cdot \left( \lambda_2^2 \int \varphi_2 dt + r_2 \varphi_2 \right) - h_{02} \varphi_2 \cdot \varphi_1 \right] \frac{C_2}{C_1} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{2t_2^\alpha}{C_1} [y^\alpha \varphi_3 \cdot \cdot + 2(y^\alpha) \cdot \varphi_3 \cdot] + \\
& + \frac{C_3 - C_2}{C_1} [(\varphi_2 \cdot)^2 \varphi_1 - (\varphi_3 \cdot)^2 \varphi_1] + h_{03} \frac{C_3}{C_1} \varphi_2 \cdot \frac{\varphi_3^2 + \varphi_1^2}{2} - \frac{C_2}{2C_1} h_{02} \varphi_1^2 \varphi_3 \cdot - \\
& - \frac{C_3}{C_1} \varphi_3 \cdot \varphi_1 \left( \lambda_3^2 \int \varphi_3 dt + r_3 \varphi_3 \right) - \frac{C_2}{C_1} \varphi_2 \cdot \varphi_1 \left( \lambda_2^2 \int \varphi_2 dt + r_2 \varphi_2 \right) + \\
& + \frac{3\mu}{r^3} \frac{C_3 - C_2}{C_1} [s_7 c_0 + (c_0^2 - s_7^2) \varphi_1 + s_6 s_7 \varphi_2 - s_6 c_0 \varphi_3] \Big\} = a \sin \omega t + \varepsilon \Phi_1^\circ \\
\varphi_2 \cdot \cdot + \lambda_2^2 \varphi_2 - \sum_{\alpha=1}^N \frac{2}{C_2} t_2^\alpha (y^\alpha) \cdot \cdot = -r_2 \varphi_2 \cdot - h_{01} \varphi_3 \cdot \frac{C_1}{C_2} + h_{03} \frac{C_3}{C_2} \varphi_1 \cdot - \varphi_3 \cdot \frac{C_1 a}{C_2 \omega} \cos \omega t - \\
- \varphi_3 \cdot \cdot \varphi_1 - \frac{C_1 + C_2 - C_3}{C_2} \varphi_1 \cdot \varphi_3 \cdot + \frac{C_1}{C_2} h_{01} \varphi_2 \cdot \varphi_1 - \frac{C_1}{C_2} \varphi_3 \cdot \left( \lambda_1^2 \int \varphi_1 dt + r_1 \varphi_1 \right) + \\
+ \frac{C_1 a}{C_2 \omega} \varphi_2 \cdot \varphi_1 \cos \omega t - \varphi_1 \cdot \left( \lambda_3^2 \int \varphi_3 dt + r_3 \varphi_3 \right) \frac{C_3}{C_2} + h_{03} \varphi_2 \cdot \varphi_3 \frac{C_3}{C_2} + \\
+ \varphi_2 \cdot \cdot \varphi_3^2 \frac{C_1 + C_2 - C_3}{2C_2} \varphi_1 \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot + \varphi_3 \cdot \varphi_1^2 \frac{C_1}{2C_2} h_{01} + \frac{C_1 a}{2C_2 \omega} \varphi_3 \cdot \varphi_1^2 \cos \omega t + \\
+ \varphi_1 \varphi_2 \cdot \left( \lambda_1^2 \int \varphi_1 dt + r_1 \varphi_1 \right) \frac{C_1}{C_2} + \varphi_2 \cdot \varphi_3 \left( \lambda_3^2 \int \varphi_3 dt + r_3 \varphi_3 \right) \frac{C_3}{C_2} + \\
+ \frac{3\mu(C_1 - C_3)}{r^3 C_2} \left[ s_6 c_0 - s_6 s_7 \varphi_1 + (s_6^2 - c_0^2) \varphi_2 + s_7 c_0 \varphi_3 - (s_6^2 - c_0^2) 2 \sum_{\alpha=1}^N y^\alpha t_2^\alpha \right] = \varepsilon \Phi_2^\circ \\
\varphi_3 \cdot \cdot + \lambda_3^2 \varphi_3 = -r_3 \varphi_3 \cdot - \frac{C_2}{C_3} h_{02} \varphi_1 \cdot + \frac{C_1}{C_3} h_{01} \varphi_2 \cdot + \frac{C_1 a}{C_3 \omega} \varphi_2 \cdot \cos \omega t + \varphi_1 \varphi_2 \cdot \cdot + \\
+ \frac{C_1 - C_2 + C_3}{C_3} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot - \varphi_2 \cdot \varphi_3 \frac{C_2}{C_3} h_{02} + \varphi_1 \varphi_3 \cdot \frac{C_1}{C_3} h_{01} - \varphi_1 \cdot \left( \lambda_2^2 \int \varphi_2 dt + r_2 \varphi_2 \right) \frac{C_2}{C_3} + \\
+ \varphi_1 \varphi_3 \cdot \frac{C_1 a}{C_3 \omega} \cos \omega t + \varphi_2 \cdot \frac{C_1}{C_3} \left( \lambda_1^2 \int \varphi_1 dt + r_1 \varphi_1 \right) + \sum_{\alpha=1}^N \frac{2}{C_3} y^\alpha t_2^\alpha \varphi_1 \cdot \cdot + \\
+ \frac{1}{2} \varphi_2 \varphi_3 \cdot \cdot + \frac{C_1 - C_2 + C_3}{C_3} \varphi_1 \varphi_1 \cdot \varphi_3 \cdot + \frac{C_1 - C_2}{C_3} (\varphi_2 \cdot)^2 \varphi_3 - \frac{C_2}{C_3} \left( \lambda_2^2 \int \varphi_2 dt + r_2 \varphi_2 \right) \varphi_2 \cdot \varphi_3 - \\
- \frac{C_1}{2C_3} \varphi_2 \cdot h_{01} (\varphi_3^2 + \varphi_1^2) - \frac{C_2}{C_3} \left( \lambda_1^2 \int \varphi_1 dt + r_1 \varphi_1 \right) \varphi_1 \varphi_3 \cdot + \\
+ \frac{3\mu(C_2 - C_1)}{r^3 C_3} \left[ c_0 s_6 \varphi_1 + s_7 s_6 - s_7 c_0 \varphi_2 + (s_7^2 - s_6^2) \varphi_3 - 2s_7 c_0 \sum_{\alpha=1}^N y^\alpha t_2^\alpha \right] = \varepsilon \Phi_3^\circ \quad (4.5) \\
y^\alpha = -q_1^\alpha + q_2^\alpha, \quad s_6 = \cos i \sin \omega_0 t, \quad s_7 = \sin i \sin \omega_0 t, \quad c_0 = \cos \omega_0 t
\end{aligned}$$

$\omega_0$  — угловая скорость вращения по орбите,  $i$  — угол наклона орбиты, функции  $\varepsilon \Phi_i^\circ$  ( $i=1, 2, 3$ ) содержат малые нелинейные члены второго и третьего порядков относительно координат и их производных, которые представляют нелинейные составляющие сил инерции и упругих сил. Сюда

включены малые линейные члены, отражающие действие сил сопротивления движению и гравитационных сил.

Уравнения (2.5) примут вид

$$\begin{aligned} (y^\alpha)'' + \frac{c^{\alpha\alpha}}{t_4^\alpha} y^\alpha - 2 \frac{t_2^\alpha}{t_4^\alpha} \varphi_2'' = -h^\alpha (y^\alpha)' + y^\alpha [(\varphi_2')^2 + (\varphi_3')^2] + \\ + 2 \frac{t_2^\alpha}{t_4^\alpha} (\varphi_3'' \varphi_1 + 2\varphi_3' \varphi_1' - \varphi_2'' \varphi_1) - \frac{\varphi_3^2 - \varphi_1^2}{2} - 2\varphi_1 \varphi_1' \varphi_2' + \frac{\mu}{r^3} \left[ y^\alpha (3s_6^2 - 1) - \right. \\ \left. - 6 \frac{t_2^\alpha}{t_4^\alpha} (c_0 s_6 - s_6 s_7 \varphi_1 + s_7 c_0 \varphi_3) \right] = \varepsilon \Phi_{\alpha+3}^\circ \quad (\alpha=1, \dots, N), \quad t_4^\alpha = m_p \int_0^1 \varphi_\alpha^2(s) ds \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $h^\alpha$  — обобщенные коэффициенты демпфирования,  $c^{\alpha\alpha}$  — коэффициенты изгибной жесткости.

Для иллюстрации предлагаемого метода создания заданных пространственных движений ограничимся удержанием конечного числа форм изгибных колебаний каждого упругого элемента.

Приведем систему уравнений (4.5), (4.6) к квазинормальным координатам. Для этого воспользуемся заменой переменных

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{N+1} \zeta_k, \quad y^\alpha = \sum_{k=1}^{N+1} k_{k,\alpha+1} \zeta_k \quad (\alpha=1, \dots, N)$$

где  $k_{ij}$  — коэффициенты распределения амплитуд. В новых переменных система (4.5), (4.6) примет вид

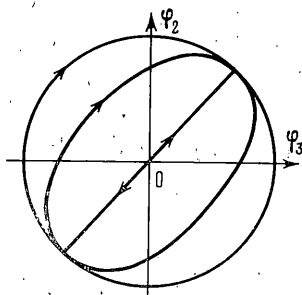
$$\begin{aligned} \varphi_1'' + \lambda_1^2 \varphi_1 = a \sin \omega t + \varepsilon \Phi_1^\circ, \quad \varphi_3'' + \lambda_3^2 \varphi_3 = \varepsilon \Phi_3^\circ \\ \zeta_1'' + \omega_{11}^2 \zeta_1 = \varepsilon \frac{1}{\beta_{11}} \left( \Phi_2^\circ + \sum_{\beta=1}^N \frac{t_4^\beta}{2C_2} \Phi_{3+\beta}^\circ k_{1,\beta+1} \right) \\ \zeta_{\alpha+1}'' + \omega_{\alpha+1}^2 \zeta_{\alpha+1} = \varepsilon \frac{1}{\beta_{\alpha+1,\alpha+1}} \left( \Phi_2^\circ + \sum_{\beta=1}^N \frac{t_4^\beta}{2C_2} \Phi_{3+\beta}^\circ k_{\alpha+1,\beta+1} \right) \quad (\alpha=1, \dots, N), \\ \beta_{jj} = \sum_{m,n=1}^{\alpha+1} \beta_{mn}^\circ k_{jm} k_{jn} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь  $\omega_{j1}$  —  $j$ -я собственная частота, соответствующая квазинормальным колебаниям системы,  $\beta_{jj}^\circ$  — коэффициенты инерционной связи в порождающей системе уравнений для (4.5), (4.6) при  $\varepsilon=0$ .

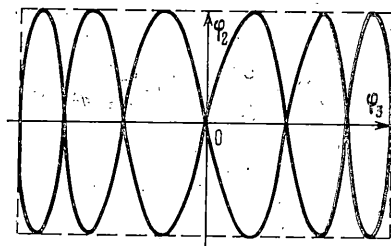
Для определенности положим, что заданными являются пространственные угловые движения оси  $Ox_1$ . Тогда широкий класс форм движения следа оси  $Ox_1$  на плоскости, параллельной плоскости  $C\xi_2\xi_3$ , можно записать в виде

$$\varphi_2 = C_3^\circ \sin \Omega_1 t + C_4^\circ \cos \Omega_1 t, \quad \varphi_3 = C_9^\circ \sin \Omega_2 t + C_{10}^\circ \cos \Omega_2 t \quad (4.8)$$

В случае рационального отношения частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  траектории следа оси  $Ox_1$  на плоскости  $\xi_1 = \text{const}$  замкнуты и представляют собой фигуры Лиссажу. В зависимости от отношений между частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  и фазами эти фигуры могут иметь форму эллипса, окружности, отрезка прямой



Фиг. 7



Фиг. 8

(фиг. 7). Если одна из частот значительно больше другой, получится фигура, соответствующая построчному сканированию прямоугольника (фиг. 8).

В соответствии с результатами, полученными в [8], в условиях резонансов могут возбуждаться пространственные формы движения несущего твердого тела.

Ниже будет показано, как, подбирая параметры системы управления, чтобы выполнялись резонансные соотношения между собственными частотами  $\omega_{11}$ ,  $\lambda_3$  и частотой возбуждения  $\omega$ , можно целенаправленно прийти к созданию требуемых пространственных движений объекта. Например, при  $\omega_{11} = \omega = \lambda_3$  след оси  $Ox_1$  на плоскости  $\xi_3 = \text{const}$  будет эллипсом или окружностью, при субгармоническом резонансе  $\omega_{11} = \omega = 1/2 \lambda_3$  это будет восьмерка. При комбинационном резонансе  $\omega_{11} \pm \lambda_3 = \omega$  (см. фиг. 8). При иррациональном соотношении между частотами  $\omega_{11}$  и  $\lambda_3$  фигуры представляют собою незамкнутые траектории, которые могут покрывать сплошь сканируемую площадь.

Остановимся подробнее на реализации программного сканирования окружности заданного углового радиуса. Учитывая возможные погрешности реализации резонансной настройки, введем расстройки частот по формулам  $\omega_{11}^2 = \omega^2 + \Delta_1$ ,  $\lambda_3^2 = \omega^2 + \Delta_2$ .

Приводя систему уравнений (4.7) к стандартной форме при помощи соответствующей замены переменных и применяя процедуру усреднения в соответствии с [8], в новых переменных  $C_i^\circ$  ( $i=1, 2, \dots, 2N+6$ ) получим систему уравнений первого приближения, из которой может быть выделена система четырех уравнений для определения амплитуд резонансных колебаний (4.8). Приравнявая правые части этой системы уравнений нулю, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно стационарных значений амплитуд  $C_3^\circ$ ,  $C_4^\circ$ ,  $C_9^\circ$ ,  $C_{10}^\circ$  с коэффициентами, зависящими от параметров системы управления. В случае, когда траектория (4.8) будет окружностью, ее уравнение можно записать в виде

$$C_3^\circ = C_{10}^\circ = W \cos \Delta, \quad C_4^\circ = -C_9^\circ = W \sin \Delta \quad (4.9)$$

где  $W$  — заданный радиус окружности,  $\Delta$  — фазовый сдвиг периодического движения оси  $Ox_1$  относительно гармонического возбуждения системы по каналу  $\phi_1$ .

В качестве параметров системы управления, подлежащих определению, примем  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  — коэффициенты демпфирования,  $a$  — амплитуда возбуждения,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  — расстройки частот и  $\Delta$  — фазовый сдвиг.

Подставляя решение в форме (4.9) в уравнения для определения стационарных решений, получим четыре уравнения, связывающих семь параметров системы управления. Задавая три из них, например  $r_1$ ,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ,

получим относительно величин  $r_2, r_3, a, \Delta$  следующую систему уравнений:

$$r_2 b_i + r_3 g_i + a^2 d_i + a s_i + f_i = 0 \quad (i=1, \dots, 4)$$

Коэффициенты этой системы уравнений выражаются через задаваемые величины, характеризующие упругомассовые характеристики объекта и параметры программного движения. Численное решение этой системы уравнений не содержит трудностей. Произвол в выборе параметров  $\Delta_1, \Delta_2, r_1$  можно исключить при помощи условий устойчивости (Рауса — Гурвица) стационарного решения.

5. Проведем сравнительную оценку изложенных методов создания программных движений. Основным достоинством первого метода является простота исследования устойчивости движения объекта и возможность использования для оценки воздействия упругих элементов на несущее твердое тело интегральных силовых характеристик, не прибегая к дискретизации и линеаризации соответствующих уравнений движения. К недостаткам его следует отнести высокие требования к измерительному комплексу и к блоку формирования управляющих моментов, что связано с необходимостью выполнения большого количества математических операций при формировании управляющих моментов.

Второй метод управления предъявляет значительно менее жесткие требования к измерительному комплексу (необходимо измерение всего шести величин  $\Phi_i, \Phi_i'$  ( $i=1, 2, 3$ )) и к блоку формирования законов управления. Количество математических операций в нем сведено к минимуму — к формированию только стабилизирующих моментов.

Основные части управляющих моментов гироскопов могут быть вычислены заранее и введены в запоминающие устройства. Недостатком этого метода является сложность исследования устойчивости программного движения и необходимость дискретизации движения упругих элементов. Для обеспечения высокой точности выполнения заданных движений может потребоваться большой объем вычислений, связанных с динамикой упругих элементов. Это будет иметь место и при определении программных движений упругих элементов, и при численном эксперименте по исследованию устойчивости, когда возникает необходимость учета высших форм собственных колебаний. В связи с тем, что основной объем вычислений может быть произведен заранее, указанный недостаток метода можно считать несущественным.

Метод, основанный на возбуждении заданных пространственных движений в условиях резонансных взаимодействий между каналами управления, может быть рассмотрен как разновидность второго метода, хотя стабилизирующая часть управляющих моментов в этом случае формируется иначе. Управление здесь не является точным решением задачи о замыкании системы уравнений движения управлением по частному решению, заданному для части переменных. Истинное частное решение, отвечающее принятому закону управления, может заметно отличаться от предполагаемого, что связано с пренебрежением ряда членов, входящих в уравнения движения. Отсюда и невысокая точность реализации программных движений. Кроме того, если первые два метода могут обеспечить движение для любых непрерывных функций  $\psi_i(t)$ , удовлетворяющих условию (1.11), метод резонансного возбуждения позволяет реализовать более узкий класс движений. Тем не менее в тех случаях, когда требуется не очень высокая точность ориентации, этот метод, позволяющий экономно расходовать энергоресурсы, может быть применен на практике.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сомов Е. И., Фатхуллин Э. Ф. Оптимальное управление гироскопом в программном движении. — Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1975, вып. 180, с. 37.
2. Фатхуллин Э. Ф. Построение системы программного управления угловым движением осесимметричного гироскопа в центральном поле сил. — Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1974, вып. 177, с. 33.
3. Закржевский А. Е. Программное управление угловым движением гироскопа в центральном поле сил. — Прикл. механика, 1979, т. 15, № 5, с. 85.
4. Ганиев Р. Ф., Закржевский А. Е., Макаренко А. И., Хорошилов В. С. Создание программных пространственных движений свободного твердого тела в условиях резонансов. — Прикл. механика, 1978, т. 14, № 3, с. 99.
5. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. Построение систем программного движения. М.: «Наука», 1971. 352 с.
6. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. — ПММ, 1952, вып. 6, с. 659.
7. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
8. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.

Поступила в редакцию  
20.XI.1978