МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1981

УДК 531.55:5211

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С УПРУГИМИ ПЛАСТИНАМИ В НЬЮТОНОВСКОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

НАБИУЛЛИН М. К.

(Иркутск)

Рассматривается в ограниченной постановке задачи [1] устойчивость относительного равновесия механической системы, состоящей из гиростата и двух пар упругих пластин. Предполагается, что движение центра масс системы происходит по кеплеровской круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил.

Гиростат моделируется абсолютно твердым телом, с которым неизменно связаны оси вращения симметричных статически и динамически уравновешанных маховиков [2]. В корпусе гиростата симметрично защемлены две пары упругих прямоугольных пластин постоянной толщины.

Прямым методом Ляпунова с применением теорем [3–5] и введением некоторых интегральных характеристик [6] получены и проанализированы достаточные условия устойчивости указанного стационарного движения рассматриваемой механической системы.

Устойчивость относительного равновесия сложных механических систем с деформируемыми стержнями в ньютоновском центральном поле сил и в поле тяжести исследовалась в работах [4, 7–12].

1. Введем системы координат, которые будут употребляться в дальнейшем: $Cx_1x_2x_3$ — орбитальная система с началом координат в центре масс механической системы; ось Cx_2 направлена по радиусу орбиты, ось Cx_3 перпендикулярна плоскости орбиты, ось Cx_1 ортогональна осям Cx_2, Cx_3; $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с корпусом гиростата, оси которой направлены по центральным осям, построенным для центра масс O недеформированной системы; $Cy_1y_2y_3$ — система координат, оси y_s $(s=1, 2, 3)$ которой параллельны осям x, y, z соответственно; $O_iX_iY_iZ_i$ — системы координат с началом отсчета в точках O_i $(i=1, 2, 3, 4)$, оси X_i, Y_i, Z_i которых параллельны осям x, y, z соответственно. Точки O_1 и O_2, O_3 и O_4 расположены симметрично относительно оси Ox и имеют в системе осей $Oxyz$ декартовые координаты $(x^{(1)}, y^{(1)}, 0)$ и $(x^{(1)}, -y^{(1)}, 0)$, $(x^{(2)}, 0, z^{(2)})$ и $(x^{(2)}, 0, -z^{(2)})$ соответственно.

Срединные плоскости пластин в недеформированном состоянии расположены в плоскости X_iY_i $(i=1, 2)$ у первой пары и в плоскости X_jZ_j $(j=3, 4)$ у второй пары. Одна из близлежащих и параллельных оси x сторон каждого прямоугольника, лежащего в срединной плоскости пластин, совпадает с осью X_i $(i=1, 2, 3, 4)$, а средняя их линия — с осями Y_i $(i=1, 2)$ и Z_j $(j=3, 4)$.

Положение гиростата в орбитальной системе координат будем определять углами Эйлера ψ, φ, θ, а направление осей x_s $(s=1, 2, 3)$ относительно осей системы $Cy_1y_2y_3$ — направляющими косинусами α_{s1}, α_{s2}, α_{s3}, известным образом зависящими от углов ψ, φ, θ [13, 14]. Положения точек пластин в деформированном состоянии по отношению к корпусу гиростата определим радиус-векторами [15, 16]:

$$r_i=(x_i-zw_{ix})\,i_1+(y_i-zw_{iy})\,i_2+(z+w_i)\,i_3 \qquad (i=1,\ 2)$$

$$r_j=(x_j-yv_{jx})i_1+(y+v_j)i_2+(z_j-yv_{jz})i_3 \quad (j=3,\ 4)$$
$$x_i=x+x^{(1)};\qquad y_i=(-1)^{i+1}(y+y^{(1)})$$
$$x_j=x+x^{(2)},\qquad z_j=(-1)^{j+1}(z+z^{(2)})$$

x, y, z — координаты точек пластин в недеформированном состоянии, определяемые в системе осей координат $O_iX_iY_iZ_i$ ($i=1$, 2, 3, 4); w_i ($i=1$, 2), v_j ($j=3$, 4) — проекции вектора упругого перемещения точек срединной плоскости на оси Z_i ($i=1$, 2) и Y_j ($j=3$, 4) соответственно; i_s ($s=1$, 2, 3) — единичные орты; буквенные индексы у величин w_i, v_j означают первые частные производные по переменным, указанным в индексах.

Для вывода дифференциальных уравнений движения рассматриваемой механической системы используется принцип Гамильтона — Остроградского [13].

Кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс равна

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\Omega_i\Omega_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}I_j\dot{\alpha}_j^{2}+\sum_{j=1}^{n}I_j\dot{\alpha}_j\sum_{s=1}^{3}\Omega_s\beta_{sj}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\left[\dot{w}_i^{2}+\frac{h_1^2}{3}(\dot{w}_{ix}^{2}+\dot{w}_{iy}^{2})\right]d\tau_1+ \tag{1.1}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\left[\dot{v}_j^{2}+\frac{h_2^2}{3}(\dot{v}_{jx}^{2}+\dot{v}_{jz}^{2})\right]d\tau_2+\sum_{s=1}^{3}\Omega_s u_s-\frac{1}{2}M\dot{\rho}_c^{2}-M\dot{\rho}_c(\Omega\times\rho_c)$$

$$u_1=\int_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\left(y_i\dot{w}_i+\frac{h_1^2}{3}\dot{w}_{iy}\right)d\tau_1+\int_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\left(-z_j\dot{v}_j-\frac{h_2^2}{3}\dot{v}_{jz}\right)d\tau_2$$

$$u_2=\int_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\left(-\frac{h_1^2}{3}\dot{w}_{ix}-x_i\dot{w}_i\right)d\tau_1+\int_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\frac{h_2^2}{3}(v_{jz}\dot{v}_{jx}-v_{jx}\dot{v}_{jz})d\tau_2$$

$$u_3=\int_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\frac{h_1^2}{3}(w_{ix}\dot{w}_{iy}-w_{iy}\dot{w}_{ix})d\tau_1+\int_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\left(x_j\dot{v}_j+\frac{h_2^2}{3}\dot{v}_{jx}\right)d\tau_2$$

где A_{ij} (i, $j=1$, 2, 3) — компоненты тензора инерции системы, построенного для центра масс системы C; Ω — вектор абсолютной угловой скорости с составляющими $\Omega_s=\omega_0\alpha_{3s}+\omega_s$ ($s=1$, 2, 3) на оси y_s; ω_0 — орбитальная угловая скорость центра масс системы; I_j ($j=1$, 2, ... n) — осевой момент инерции j-го маховика, $\dot{\alpha}_j$ — его угловая скорость, β_{sj} ($s=1$, 2, 3; $j=1$, 2, ..., n) — косинусы углов между положительным направлением оси вращения j-го маховика с осями y_s; $\rho_c(x_c, y_c, z_c)$ — радиус-вектор центра масс C в системе осей $Oxyz$, M — масса системы, $2h_1$, $2h_2$ — толщины пластин первой и второй пары соответственно, $\rho_i=2h_i\sigma_i$ ($i=1$, 2), σ_i — плотность материала пластин; двойные интегралы, взятые в областях τ_1 ($-a_1\leqslant x\leqslant a_1$, $0\leqslant y\leqslant b_1$) и τ_2 ($-a_2\leqslant x\leqslant a_2$, $0\leqslant z\leqslant b_2$), представлены в следующей записи:

$$\int_{\tau_1}(\ldots)d\tau_1,\qquad \int_{\tau_2}(\ldots)d\tau_2,$$

$$\text{т. е.} \int\limits_{\tau_1}(\ldots)d\tau_1=\int\limits_{-a_1}^{a_1}\int\limits_{0}^{b_1}(\ldots)dx\,dy,\qquad \int\limits_{\tau_2}(\ldots)d\tau_2=\int\limits_{-a_2}^{a_2}\int\limits_{0}^{b_2}(\ldots)dx\,dz$$

$2a_i$, b_i ($i=1$, 2) — характерные размеры пластин первой и второй пары соответственно; производные по времени обозначены точками.

Компоненты тензора инерции системы вычисляются по формулам

$$A_{11}=A_1-M(y_c^2+z_c^2)+\int\limits_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}\left(w_i^2+\frac{h_1^2}{3}w_{iy}^2\right)d\tau_1+$$

$$+\int\limits_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\left(v_j^2+\frac{h_2^2}{3}v_{jz}^2\right)d\tau_2$$

$$A_{22}=A_2-Mz_c^2+\int\limits_{\tau_1}\rho_1\sum_{j=1}^{2}\left(w_i^2+\frac{h_1^2}{3}w_{ix}^2\right)d\tau_1+\int\limits_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\frac{h_2^2}{3}(v_{jx}^2+v_{jz}^2)d\tau_2$$

$$A_{33}=A_3-My_c^2+\int\limits_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\frac{h_1^2}{3}(w_{ix}^2+w_{iy}^2)d\tau_1+\int\limits_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\left(v_j^2+\frac{h_2^2}{3}v_{jx}^2\right)d\tau_2$$

$$A_{12}=A_{21}=-\int\limits_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\frac{h_1^2}{3}w_{ix}w_{iy}\,d\tau_1-\int\limits_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\left(x_jv_j-\frac{h_2^2}{3}v_{jx}\right)d\tau_2$$

$$A_{13}=A_{31}=-\int\limits_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\left(x_iw_i-\frac{h_1^2}{3}w_{ix}\right)d\tau_1-\int\limits_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\frac{h_2^2}{3}v_{jx}v_{jz}\,d\tau_2 \qquad (1.2)$$

$$A_{23}=A_{32}=My_cz_c-\int\limits_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\left(y_iw_i-\frac{h_1^2}{3}w_{iy}\right)d\tau_1-$$

$$-\int\limits_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}\left(z_jv_j-\frac{h_2^2}{3}v_{jz}\right)d\tau_2$$

где A_s ($s=1$, 2, 3) — главные центральные моменты инерции системы в ее недеформированном состоянии относительно осей x, y, z соответственно.

Координаты y_c, z_c определяются из выражений

$$My_c=\int\limits_{\tau_2}\rho_2(v_3+v_4)d\tau_2,\qquad Mz_c=\int\limits_{\tau_1}\rho_1(w_1+w_2)d\tau_1$$

Предположим, что линейные размеры системы малы по сравнению с расстоянием между центром масс системы и гравитирующим центром. Тогда приближенное выражение силовой функции U действия гравитирующего центра определится формулой

$$U=\mu MR_c^{-1}+\frac{1}{2}\mu R_c^{-3}\sum_{s=1}^{3}A_{ss}-\frac{3}{2}\mu R_c^{-3}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\alpha_{2i}\alpha_{2j} \qquad (1.3)$$

Здесь μ — постоянная тяготения гравитирующего центра, R_c — радиус орбиты, α_{2s} ($s=1$, 2, 3) — направляющие косинусы, являющиеся функциями углов Эйлера ψ, φ, θ; $\omega_0^2=\mu R_c^{-3}$.

Потенциальная энергия изгибных деформаций пластин[1] дается известным выражением [15, 16]:

$$
\begin{gathered}
\Pi_1=\frac{D_1}{2}\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}\left[w_{ixx}^2+w_{iyy}^2+2\sigma w_{ixx}w_{iyy}+2(1-\sigma)w_{ixy}^2\right]d\tau_1 \\
\Pi_2=\frac{D_2}{2}\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}\left[v_{jxx}^2+v_{jzz}^2+2\sigma v_{jxx}v_{jzz}+2(1-\sigma)v_{jxz}^2\right]d\tau_2 \\
\Pi=\Pi_1+\Pi_2
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

где $\frac{1}{2}D_i=2Eh_i^3/3(1-\sigma)$ — цилиндрическая жесткость пластин ($i=1, 2$), E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона; буквенные индексы у величин w_i ($i=1, 2$), v_j ($j=3, 4$) означают вторые производные по координатам, указанным в индексах.

Дифференциальные уравнения вращательного движения системы (как твердого тела) относительно центра масс в квазискоростях записываются в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\Omega_1}+\Omega_2\frac{\partial T}{\partial\Omega_3}-\Omega_3\frac{\partial T}{\partial\Omega_2}=\alpha_{23}\frac{\partial U}{\partial\alpha_{22}}-\alpha_{22}\frac{\partial U}{\partial\alpha_{23}} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\Omega_2}+\Omega_3\frac{\partial T}{\partial\Omega_1}-\Omega_1\frac{\partial T}{\partial\Omega_3}=\alpha_{21}\frac{\partial U}{\partial\alpha_{23}}-\alpha_{23}\frac{\partial U}{\partial\alpha_{21}} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\Omega_3}+\Omega_1\frac{\partial T}{\partial\Omega_2}-\Omega_2\frac{\partial T}{\partial\Omega_1}=\alpha_{22}\frac{\partial U}{\partial\alpha_{21}}-\alpha_{21}\frac{\partial U}{\partial\alpha_{22}}
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial\Omega_s}=\sum_{j=1}^{3}A_{sj}\Omega_j+u_s+k_s-i_sM(\rho_c\times\rho_c^{\bullet}),
$$

$$
\frac{\partial U}{\partial\alpha_{2s}}=-3\omega_0^2\sum_{j=1}^{3}A_{sj}\alpha_{2j}\quad(s=1,2,3)
$$

$$
\begin{gathered}
\Omega_1=(\omega_0+\psi^{\bullet})\sin\theta\sin\varphi+\theta^{\bullet}\cos\varphi \\
\Omega_2=(\omega_0+\psi^{\bullet})\sin\theta\cos\varphi-\theta^{\bullet}\sin\varphi \\
\Omega_3=(\omega_0+\psi^{\bullet})\cos\theta+\varphi^{\bullet}
\end{gathered}
$$

Уравнения движения маховиков имеют вид

$$
I_j\frac{d}{dt}\left(\alpha_j^{\bullet}+\sum_{s=1}^{3}\Omega_s\beta_{sj}\right)=Q_j\quad(j=1,2,\cdots,n)
\tag{1.6}
$$

где Q_j — моменты сил, приложенных к роторам.

Перемещения срединных плоскостей пластин описываются дифференциальными уравнениями

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial w_i}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial w_i^{\bullet}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{ix}^{\bullet}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{iy}^{\bullet}}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{iy}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{ix}}\right)+ \\
+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{ixx}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{iyy}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{ixy}}\right)+\frac{\rho_1}{M}\frac{\partial L_1}{\partial z_c}-\frac{\rho_1}{M}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L_1}{\partial z_c^{\bullet}}=0 \\
(i=1,2)
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

[1] Напряженное и деформированное состояние пластин построено на основе гипотез Кирхгофа — Лява.

$$\frac{\partial L}{\partial v_j}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial v_j^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{jx}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{jz}^{\cdot}}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{jx}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{jz}}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{jxx}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{jzz}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial v_{jxz}}\right)+\frac{\rho_2}{M}\frac{\partial L_1}{\partial y_c}-\frac{\rho_2}{M}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L_1}{\partial y_c^{\cdot}}=0 \quad (j=3,4) \qquad (1.8)$$

где w_i $(i=1,\ 2)$, v_j $(j=3,\ 4)$ удовлетворяют динамическим граничным условиям

при $x=\pm a_1$, $t\geqslant t_0$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ixx}}\delta w_{ix}=0,\qquad \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial w_{ix}^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial w_{ixx}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial w_{ixy}}+\frac{\partial L}{\partial w_{ix}}\right)\delta w_i=0 \qquad (1.9)$$

при $y=0$, $y=b_1$, $t\geqslant t_0$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{iyy}}\delta w_{iy}=0,\qquad \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial w_{iy}^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial w_{iyy}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial w_{ixy}}+\frac{\partial L}{\partial w_{iy}}\right)\delta w_i=0 \qquad (1.10)$$

при $x=\pm a_2$, $t\geqslant t_0$

$$\frac{\partial L}{\partial v_{jxx}}\delta v_{jx}=0,\qquad \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial v_{jx}^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial v_{jxx}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial v_{jxz}}+\frac{\partial L}{\partial v_{jx}}\right)\delta v_j=0 \qquad (1.11)$$

при $z=0$, $z=b_2$, $t\geqslant t_0$

$$\frac{\partial L}{\partial v_{jzz}}\delta v_{jz}=0,\qquad \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial v_{jz}^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial v_{jzz}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial v_{jxz}}+\frac{\partial L}{\partial v_{jz}}\right)\delta v_j=0 \qquad (1.12)$$

($L_1=T+U-\Pi$ — кинетический потенциал, L — плотность лагранжиана).

Геометрические граничные условия зависят от способа закрепления пластины по контуру. Для определенности предположим

$$\begin{aligned} &w_i=0, \quad w_{iy}=0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad t\geqslant t_0 \\ &v_j=0, \quad v_{jz}=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad t\geqslant t_0 \end{aligned} \qquad (1.13)$$

т. е. одна из сторон пластины защемлена.

Из уравнений (1.5)—(1.8) следует, что движение системы описываются интегродифференциальными уравнениями обыкновенными и с частными производными.

В дальнейшем предположим, что обобщенные силы, действующие на маховики, таковы, что во все время движения остаются постоянными угловые скорости собственного вращения маховиков относительно корпуса

$$\alpha_j^{\cdot}=\text{const},\quad k_s=\sum_{j=1}^{n} I_j\alpha_j^{\cdot}\beta_{sj}=\text{const} \quad (s=1,2,3;\ j=1,2,\ldots,n)$$

При этом предположении дифференциальные уравнения движения (1.5)—(1.8) и геометрические и динамические граничные условия допускают интеграл типа Якоби

$$H=T-\omega_0\frac{\partial T}{\partial\omega_0}-U+\Pi-\sum_{s=1}^{3}k_s\Omega_s=\text{const} \qquad (1.14)$$

2. Для определения стационарных движений рассматриваемой механической системы в орбитальной системе координат рассмотрим необхо-

димые условия экстремума интеграла H. Приравнивая нулю первую вариацию, получим систему уравнений из трех групп и естественные граничные условия.

Первая группа уравнений имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_s}=0,\quad \frac{\partial h}{\partial w_i^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial w_{ix}^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial w_{iy}^{\cdot}}+\frac{\rho_1}{M}\frac{\partial H}{\partial z_c^{\cdot}}=0 \quad (i=1,2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v_j^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial v_{jx}^{\cdot}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial v_{jz}^{\cdot}}+\frac{\rho_2}{M}\frac{\partial H}{\partial y_c^{\cdot}}=0 \quad (j=3,4)$$

Вторая группа уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial \psi}=3\omega_0^2\sum_{s=1}^{3} b_{s2}\alpha_{1s}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi}=3\omega_0^2(b_{12}\alpha_{22}-b_{22}\alpha_{21})-\omega_0(l_1\alpha_{32}-l_2\alpha_{31})=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta}=3\omega_0^2(b_{12}\alpha_{23}\sin\varphi+b_{22}\alpha_{23}\cos\varphi-b_{32}\cos\psi\cos\theta)-\omega_0(l_1\sin\varphi\cos\theta+$$
$$+l_2\cos\varphi\cos\theta-l_3\sin\theta)=0$$

Здесь $l_s=b_{s3}\omega_0+k_s$ $(s=1,2,3)$, h — плотность интеграла (1.14)

$$b_{1j}=A_{11}\alpha_{j1}+A_{12}\alpha_{j2}+A_{13}\alpha_{j3},\qquad b_{2j}=A_{22}\alpha_{j2}+A_{12}\alpha_{j1}+A_{23}\alpha_{j3}$$
$$b_{3j}=A_{33}\alpha_{j3}+A_{13}\alpha_{j1}+A_{23}\alpha_{j2} \quad (j=2,3)$$

Третья группа уравнений

$$-D_1\Delta_1^2 w_i+\rho_1[(w_i-z_c)\gamma_{33}+x_i\gamma_{13}+(y_i-y_c)\gamma_{23}]-$$
$$-\frac{\rho_1 h_1^2}{3}(\gamma_{11}w_{ixx}+\gamma_{22}w_{iyy}+2\gamma_{12}w_{ixy})=0 \quad (i=1,2)$$
$$-D_2\Delta_2^2 v_j+\rho_2[(v_j-y_c)\gamma_{22}+x_j\gamma_{12}+(z_j-z_c)\gamma_{23}]-$$
$$-\frac{\rho_2 h_2^2}{3}(\gamma_{11}v_{jxx}+\gamma_{33}v_{jzz}+2\gamma_{13}v_{jxz})=0 \quad (j=3,4)$$
$$\gamma_{ij}=\gamma_{ji}=\omega_0^2(3\alpha_{2i}\alpha_{2j}-\alpha_{3i}\alpha_{3j}) \quad (i,j=1,2,3)$$

где $\Delta_1^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, $\Delta_2^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$ — операторы Лапласа.

Граничные условия имеют вид

при $x=\pm a_1$

$$\frac{\partial h}{\partial w_{ix}^{\cdot}}=0,\quad \frac{\partial h}{\partial w_{ixx}}=0,\quad -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial w_{ixx}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial w_{ixy}}+\frac{\partial h}{\partial w_{ix}}=0$$

при $y=b_1$

$$\frac{\partial h}{\partial w_{iy}^{\cdot}}=0,\quad \frac{\partial h}{\partial w_{iyy}}=0,\quad -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial w_{iyy}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial w_{ixy}}+\frac{\partial h}{\partial w_{iy}}=0$$

при $x=\pm a_2$

$$\frac{\partial h}{\partial v_{jx}^{\cdot}}=0,\quad \frac{\partial h}{\partial v_{jxx}}=0,\quad -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial v_{jxx}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial v_{jxz}}+\frac{\partial h}{\partial v_{jx}}=0$$

при $z=b_2$

$$\frac{\partial h}{\partial v_{jz}}=0,\quad \frac{\partial h}{\partial v_{jzz}}=0,\quad -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial v_{jzz}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial v_{jxz}}+\frac{\partial h}{\partial v_{jz}}=0$$

$$w_i=w_{iy}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\quad t\geqslant t_0 \quad {\scriptstyle (i=1,\,2)}$$

$$v_j=v_{jz}=0 \quad \text{при} \quad z=0,\quad t\geqslant t_0 \quad {\scriptstyle (j=3,\,4)}$$

Из первой группы уравнений имеем

$$\begin{gathered}\omega_s=0 \;{\scriptstyle (s=1,\,2,\,3)},\quad w_i^{\bullet}=w_{ix}^{\bullet}=w_{iy}^{\bullet}=0,\quad w_i=w_i^{\circ}\;{\scriptstyle (i=1,\,2)}\\ v_j^{\bullet}=v_{jx}^{\bullet}=v_{jz}^{\bullet}=0,\quad v_j=v_j^{\circ}\;{\scriptstyle (j=3,\,4)}\end{gathered}\tag{2.1}$$

Из (2.1) видно, что стационарные движения рассматриваемой механической системы представляют собой состояния равновесия по отношению к орбитальной системе координат.

Если ввести в рассмотрение единичую сферу $\alpha_{21}{}^2+\alpha_{22}{}^2+\alpha_{23}{}^2=1$, то точкам пересечения сферы с координатными осями будут соответствовать стационарные движения (положения относительного равновесия). При этом главные центральные оси инерции системы коллинеарны осям орбитальной системы координат. Запишем одно из решений

$$\begin{gathered}\omega_s=0\;{\scriptstyle (s=1,\,2,\,3)},\quad w_i=0,\quad w_{ix}=w_{iy}=0\;{\scriptstyle (i=1,\,2)}\\ v_j=v_{jx}=v_{jz}=0\;{\scriptstyle (j=3,\,4)},\quad \psi_0=\varphi_0=0,\quad \theta_0={}^1/{}_2\pi,\quad k_1=k_3=0\end{gathered}\tag{2.2}$$

Гиростатический момент k_2 остается произвольной величиной и направлен по нормали к плоскости орбиты. Главные центральные оси инерции y_s $(s=1,\ 2,\ 3)$ коллинеарны осям x_1, x_3, $-x_2$ соответственно. Срединные плоскости пластин расположены у второй пары пластин в плоскости орбиты, у первой пары — перпендикулярно к плоскости орбиты.

Отметим, что решение (2.2) тождественно удовлетворяет записанным трем группам уравнений (в том числе и дифференциальным уравнениям движения (1.5)—(1.8) и геометрическим и естественным граничным условиям.

3. Для исследования устойчивости стационарного движения (2.2) с применением теоремы [3] нужно вычислить вторую вариацию интеграла H или измененной потенциальной энергии и исследовать ее знакоопределенность.

Вторая вариация интеграла H для решения (2.2) в возмущенном движении равна сумме вторых вариаций кинетической энергии δ^2T_1 системы в ее движении относительно центра масс и измененной потенциальной энергии δ^2W, т. е.

$$2\delta^2H=\delta^2T_1+\delta^2W\tag{3.1}$$

Сохраним прежние обозначения для отклонений переменных от их невозмущенных значений. Тогда введением некоторых интегральных характеристик, имеющих физический смысл момента количества движения, можно показать, что функционал δ^2T_1 при выполнении неравенств

$$\frac{4m_1{}^2x^{(1)2}}{M-2m_1}<A_2{}^k+2(I_{13}+I_{21}),\quad \frac{4m_2{}^2x^{(2)2}}{M-2m_2}<A_3{}^k+2(I_{21}+I_{11})\tag{3.2}$$

непрерывен и определенно положителен по метрике

$$\mathrm{P}_1=\sum_{s=1}^{3}\omega_s{}^2+\int_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}(c_i\eta_i^{\bullet 2}+c_5w_{ix}^{\bullet 2}+c_6w_{iy}^{\bullet 2})\,d\tau_1+$$

$$+\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}(c_j\xi_j^{\cdot 2}+c_7 v_{jx}^{\cdot 2}+c_8 v_{jz}^{\cdot 2})\,d\tau_2+y_c^{\cdot 2}+z_c^{\cdot 2} \tag{3.3}$$

$$c_1=\rho_1 I_{21},\quad c_2=\rho_1 I_{11},\quad c_3=\rho_2 I_{23},\quad c_4=\rho_2 I_{13},$$

$$c_5=c_6=\frac{2\rho_1 h_1^4 m_1}{9},\qquad c_7=c_8=\frac{2\rho_2 h_2^4 m_2}{9} \tag{3.4}$$

Здесь m_1, m_2 — массы каждой из пластин соответственно первой и второй пары, A_2^k, A_3^k — моменты инерции гиростата, величины I_{21}, I_{11}, I_{23}, I_{13} определяются соотношениями

$$I_{21}=\int\limits_{\tau_1}\rho_1(x+x^{(1)})^2 d\tau_1,\qquad I_{11}=\int\limits_{\tau_1}\rho_1(y+y^{(1)})^2 d\tau_1$$

$$I_{23}=\int\limits_{\tau_2}\rho_2(x+x^{(2)})^2 d\tau_2,\qquad I_{13}=\int\limits_{\tau_2}\rho_2(z+z^{(2)})^2 d\tau_2 \tag{3.5}$$

Переменные $\eta_i^{\cdot}$ $(i=1,\,2)$, $\xi_j^{\cdot}$ $(j=3,\,4)$ имеют вид: $\eta_1^{\cdot}=w_1^{\cdot}+w_2^{\cdot}-2z_c^{\cdot}$, $\eta_2^{\cdot}=w_1^{\cdot}-w_2^{\cdot}$, $\xi_3^{\cdot}=v_3^{\cdot}+v_4^{\cdot}-2y_c^{\cdot}$, $\xi_4^{\cdot}=v_3^{\cdot}-v_4^{\cdot}$.

Если положить $x^{(1)}=x^{(2)}=0$, то неравенства (3.2) выполняются тождественно. Вторая вариация измененной потенциальной энергии

$$\delta^2 W=a_{11}\psi^2+a_{22}\varphi^2+a_{33}\theta^2+\rho_1\omega_0^2\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}\left(-3w_i^2+\frac{h_1^2}{3}w_{iy}^2\right)d\tau_1+$$

$$+\rho_2\omega_0^2\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}\left(v_j^2-3\frac{h_2^2}{3}v_{jz}^2\right)d\tau_2+6\omega_0^2\psi\left[\rho_1\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}\left(x_i w_i-\frac{h_1^2}{3}w_{ix}\right)d\tau_1\right]+$$

$$+2\omega_0^2\varphi\left[\rho_2\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}\left(x_j v_j-\frac{h_2^2}{3}v_{jx}\right)d\tau_2\right]-8\omega_0^2\theta\left[\rho_1\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}\left(y_i w_i-\frac{h_1^2}{3}w_{iy}\right)d\tau_1+\right.$$

$$\left.+\rho_2\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}\left(z_j v_j-\frac{h_2^2}{3}v_{jz}\right)d\tau_2\right]+2\Pi+M\omega_0^2(3z_c^2-y_c^2) \tag{3.6}$$

$$a_{11}=3\omega_0^2(A_1-A_3),\qquad a_{22}=\omega_0^2(A_2-A_1)+\omega_0 k_2$$

$$a_{33}=4\omega_0^2(A_2-A_3)+\omega_0 k_2$$

Для преобразования записанного функционала рассмотрим две вспомогательные вариационные задачи [17]. Найти минимумы функционалов

$$\Phi_1=2\Pi_1\left\{D_1\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}\left[w_i^2+\frac{h_1^2}{3}(w_{ix}^2+w_{iy}^2)\right]d\tau_1\right\}^{-1} \tag{3.7}$$

$$\Phi_2=2\Pi_2\left\{D_2\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}\left[(v_j-y_c)^2+\frac{h_2^2}{3}(v_{jx}^2+v_{jz}^2)\right]d\tau_2\right\}^{-1} \tag{3.8}$$

в пространстве C_4, состоящем из всех функций в областях τ_1 и τ_2 соответственно, имеющих непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно по переменным x, y и x, z.

Приравнивая нулю первую вариацию функционалов (3.7) и (3.8) получим задачи на собственные значения и естественные граничные условия. Рассматриваемые задачи на собственные значения для пластины в зависимости от краевых условий могут быть решены известными приближенными методами. Если заданы условия (1.13), то уравнение частот вспомогательной вариационной задачи (3.8) имеет вид

$$D(\mu)=\Delta(\mu)+\Delta^*(\mu)=0 \tag{3.9}$$

$$\Delta(\mu)=\mu\sqrt{\mu}[-2-(2+\mu^{1}/_{9}h_2^4)\operatorname{ch}\nu_1b_2\cos\nu_2b_2+{}^{1}/_{3}\sqrt{\mu}h_2^2\operatorname{sh}\nu_1b_2\sin\nu_2b_2]$$

$$\Delta^*(\mu)=\frac{4m_2}{M-4m_2\alpha}\,\frac{\mu h_2^2}{3b_2}(\nu_1^3\operatorname{ch}\nu_1b_2\sin\nu_2b_2+\nu_2^3\operatorname{sh}\nu_1b_2\cos\nu_2b_2),\ \left(\alpha=1-\frac{m_2}{M}\right)$$

$$\nu_1=\left\{-\frac{1}{6}\mu h_2^2+\left[\frac{1}{36}\mu^2h_2^4+\mu\right]^{1/2}\right\}^{1/2},\quad \nu_2=\left\{\frac{1}{6}\mu h_2^2+\left(\frac{1}{36}\mu^2h_2^4+\mu\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

Искомое значение μ_2 равно наименьшему положительному корню уравнения (3.9).

Минимум μ_1 функционала (3.7) равен наименьшему положительному корню уравнения $\Delta(\mu)=0$ при замене в нем величин h_2, b_2 на h_1 и b_1 соответственно.

Из (3.7) и (3.8) получаем оценки типа

$$\Pi_3=2\Pi_1-\varkappa_1\int\limits_{\tau_1}\rho_1\sum_{i=1}^{2}\left[w_i^2+\frac{h_1^2}{3}(w_{ix}^2+w_{iy}^2)\right]d\tau_1\geqslant0,\quad \varkappa_1=\frac{\mu_1D_1}{\rho_1} \tag{3.10}$$

$$\Pi_4=2\Pi_2-\varkappa_2\int\limits_{\tau_2}\rho_2\sum_{j=3}^{4}\left[(v_j-y_c)^2+\frac{h_2^2}{3}(v_{jx}^2+v_{jz}^2)\right]d\tau_2\geqslant0,\quad \varkappa_2=\frac{\mu_2D_2}{\rho_2} \tag{3.11}$$

Введем новые переменные и интегральные характеристики формулами

$$\eta_1=w_1+w_2,\quad \eta_2=w_1-w_2,\quad \eta_3=v_3-y_c$$
$$\eta_4=v_4-y_c,\quad \xi_3=\eta_3+\eta_4,\quad \xi_4=\eta_3-\eta_4 \tag{3.12}$$

$$\zeta_1=\rho_1\int\limits_{\tau_1}(x+x^{(1)})\eta_1d\tau_1,\quad \zeta_2=\rho_1\int\limits_{\tau_1}(y+y^{(1)})\eta_2d\tau_1$$

$$\zeta_3=\rho_2\int\limits_{\tau_2}(x+x^{(2)})\xi_3d\tau_2,\quad \zeta_4=\rho_2\int\limits_{\tau_2}(z+z^{(2)})\xi_4d\tau_2$$

$$\zeta_5=\frac{h_1^2\rho_1}{3}\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}w_{ix}d\tau_1,\quad \zeta_6=\frac{h_1^2\rho_1}{3}\int\limits_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}w_{iy}d\tau_1,\quad \zeta_7=\frac{h_2^2\rho_2}{3}\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}v_{jx}d\tau_2 \tag{3.13}$$

$$\zeta_8=\frac{h_2^2\rho_2}{3}\int\limits_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}v_{jz}d\tau_2$$

и перепишем функционал (3.6) в этих переменных в виде

$$\delta^2W=a_{11}\psi^2+c_{11}\zeta_1^2+\varkappa_1d_1^{-1}\zeta_5^2+6\omega_0^2\psi(\zeta_1-\zeta_5)+a_{22}\varphi^2+c_{22}\zeta_3^2+\varkappa_2d_2^{-1}\zeta_7^2+$$
$$+2\omega_0^2\varphi(\zeta_3-\zeta_7+2m_2x^{(2)}y_c)+(M-2m_2)\omega_0^2y_c^2+a_{33}\theta^2+c_{33}\zeta_2^2+c_{44}\zeta_4^2+c_{55}\zeta_6^2+$$
$$+c_{66}\zeta_8^2-8\omega_0^2\theta(\zeta_2-\zeta_6+\zeta_4-\zeta_8)+3M\omega_0^2z_c^2+\Pi_3+\Pi_4+\Pi_5 \tag{3.14}$$

$$
\Pi_5=c_{11}\left(\int_{\tau_1} c_1\eta_1^2d\tau_1-\zeta_1^2\right)+c_{33}\left(\int_{\tau_1} c_2\eta_2^2-\zeta_2^2\right)+c_{55}\left(\int_{\tau_1} c_6\sum_{i=1}^{2} w_{iy}^2d\tau_1-\zeta_6^2\right)+
$$

$$
+\varkappa_1d_1^{-1}\left(\int_{\tau_1} c_5\sum_{i=1}^{2} w_{ix}^2d\tau_1-\zeta_5^2\right)+c_{22}\left(\int_{\tau_2} c_3\xi_3^2d\tau_2-\zeta_3^2\right)+c_{44}\left(\int_{\tau_2} c_4\xi_4^2d\tau_2-\zeta_4^2\right)+
\tag{3.15}
$$

$$
+\varkappa_2d_2^{-1}\left(\int_{\tau_2} c_7\sum_{j=3}^{4} v_{jx}^2d\tau_2-\zeta_7^2\right)+c_{66}\left(\int_{\tau_2} c_8\sum_{j=3}^{4} v_{jz}^2d\tau_2-\zeta_8^2\right)
$$

В соотношении (3.15) выражения, записанные в скобках, неотрицательны в силу неравенства Коши — Буняковского. Постоянные коэффициенты имеют следующие значения: $c_{11}={}^1/_2(\varkappa_1-3\omega_0^2)I_{21}^{-1}$, $c_{22}={}^1/_2(\varkappa_2+\omega_0^2)I_{23}^{-1}$, $c_{33}={}^1/_2(\varkappa_1-3\omega_0^2)I_{11}^{-1}$, $c_{44}={}^1/_2(\varkappa_2+\omega_0^2)I_{13}^{-1}$, $c_{55}=(\varkappa_1+\omega_0^2)d_1^{-1}$, $c_{66}=(\varkappa_2-3\omega_0^2)d_2^{-1}$, $d_1={}^2/_3m_1h_1^2$, $d_2={}^2/_3m_2h_2^2$.

Условия знакоопределенности функционала (3.14) приводят к неравенствам

$$
\begin{gathered}
\varkappa_1-3\omega_0^2>0,\qquad \varkappa_2-3\omega_0^2>0\\
A_1-A_3>2m_1h_1^2\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}+6I_{21}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}\\
4(A_2-A_3)+\omega_0^{-1}k_2>16\omega_0^2\left(\frac{2I_{11}}{\varkappa_1-3\omega_0^2}+\frac{2I_{13}}{\varkappa_2+\omega_0^2}+\frac{d_1}{\varkappa_1+\omega_0^2}+\frac{d_2}{\varkappa_2-3\omega_0^2}\right)\\
A_2-A_1+\omega_0^{-1}k_2>2I_{23}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_2+\omega_0^2}+d_2\frac{\omega_0^2}{\varkappa_2}+\frac{m_2}{M-2m_2}m_2x^{(2)^2}
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

При выполнении условий (3.16) функционал (3.14) определенно положителен и непрерывен по метрикам

$$
\mathrm{P}_2=\psi^2+\varphi^2+\theta^2+\int_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}(c_i\eta_i^2+c_5w_{ix}^2+c_6w_{iy}^2)d\tau_1+
$$

$$
+\int_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}(c_j\xi_j^2+c_7v_{jx}^2+c_8v_{jz}^2)d\tau_2+y_c^2+z_c^2
$$

$$
\mathrm{P}_3=\mathrm{P}_2+\int_{\tau_1}\sum_{i=1}^{2}(w_{ixx}^2+w_{iyy}^2+w_{ixy}^2)d\tau_1+\int_{\tau_2}\sum_{j=3}^{4}(v_{jxx}^2+v_{jzz}^2+v_{jxz}^2)d\tau_2
$$

Согласно теоремам [3—5], неравенства (3.2) и (3.16) являются достаточными условиями устойчивости относительного равновесия (2.2) гиростата с деформируемыми пластинами на круговой орбите по метрикам $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$ и $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_3$.

В случае одной пары пластин, у которых в невозмущенном движении срединные плоскости ортогональны к радиусу орбиты, достаточные условия устойчивости имеют вид первого из неравенств (3.2) и

$$
\begin{gathered}
\varkappa_1-3\omega_0^2>0,\qquad A_2-A_1+\omega_0^{-1}k_2>0\\
A_1-A_3>2m_1h_1^2\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1}+6I_{21}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

$$4(A_2-A_3)+\omega_0^{-1}k_2>16\left(2I_{11}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1-3\omega_0^2}+d_1\frac{\omega_0^2}{\varkappa_1+\omega_0^2}\right)$$

В случае одной пары пластин, у которых в невозмущенном движении срединные плоскости расположены в плоскости орбиты, достаточные условия устойчивости относительного равновесия (2.2) имеют вид второго из неравенств (3.2) и

$$\varkappa_2-3\omega_0^2>0,\quad A_1-A_3>0$$

$$4(A_2-A_3)+\omega_0^{-1}k_2>16\left(2I_{13}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_2+\omega_0^2}+d_2\frac{\omega_0^2}{\varkappa_2-3\omega_0^2}\right) \tag{3.18}$$

$$A_2-A_1+\omega_0^{-1}k_2>2I_{23}\frac{\omega_0^2}{\varkappa_2+\omega_0^2}+d_2\frac{\omega_0^2}{\varkappa_2}+\frac{m_2}{M-2m_2}m_2x^{(2)^2}$$

При $k_2=0$ из (3.16), (3.17), (3.18), (3.2) получим достаточные условия устойчивости относительного равновесия твердого тела с деформируемыми пластинами.

Отметим, что при $D_i\to\infty$ постоянные $\varkappa_i\to\infty$ $(i=1, 2)$ и неравенства (3.16) переходят в известные критерии устойчивости спутника [1] $(k_2=0)$ и спутника-гиростата [2] с недеформируемыми пластинами.

Из полученных достаточных условий устойчивости (3.16) можно сделать следующие выводы.

Для выполнения неравенств (3.16) необходимо, чтобы имели место условия В. В. Белецкого [1] $(k_2=0)$ и В. В. Румянцева [2] для «замороженной» системы. Пластины должны обладать достаточно большой цилиндрической жесткостью. Неравенства $\varkappa_i-3\omega_0^2>0$ $(i=1, 2)$ накладывают ограничения на цилиндрическую жесткость пластин снизу при фиксированном значении орбитальной угловой скорости.

Пара пластин, расположенная ортогонально к радиусу орбиты, не улучшает достаточные условия устойчивости как за счет их моментов инерции, так и за счет деформируемости.

Пара пластин, срединная плоскость которых расположена в плоскости орбиты, может оказать стабилизирующее влияние на систему при соответствующем подборе параметров пластин. Деформируемость этой пары пластин также не улучшает достаточные условия устойчивости.

Достаточные условия устойчивости зависят от наинизшей частоты собственных колебаний пластин. Деформируемость пластин оказывает дестабилизирующее влияние.

Наличие в системе маховиков позволяет частично скомпенсировать дестабилизирующее влияние деформируемости пластин.

Автор благодарит В. М. Матросова за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 142 с.
3. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость.– ПММ, 1969, т. 33, вып. 6, с. 946.
4. *Морозов В. М., Рубановский В. Н., Румянцев В. В., Самсонов В. А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем.– ПММ, 1973, т. 37, вып. 3, с. 387.
5. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам.– ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 988.
6. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.

7. *Рубановский В. Н.* Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью.– ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 43.
8. *Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями, совершающими изгибно-крутильные колебания.– Теоретична и приложна механика, 1972, год. 3, № 2, с. 19.
9. *Морозов В. М., Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с двумя упругими стержнями.– Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 163.
10. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела с двумя упругими стержнями.– ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 55.
11. *Meirovitch L. A.* Method for the Liapunov stability analysis of forche-free dynamical systems.— AIAA Journal, 1971, v. 9, No. 9, p. 1695.
12. *Meirovitch L., Calico R. A.* A comparative study of stability Methods for flexible satellites.— AIAA Journal, 1973, v. 11, No. 1, p. 91.
13. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
14. *Набиуллин М. К.* Об устойчивости стационарных движений свободного гиростата в осесимметрических полях тяготения.– Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2, с. 14.
15. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976, 512 с.
16. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
17. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Поступила в редакцию
25.XII.1978