УДК 539.374

ЗАХЛОПЫВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОРЫ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

ГРИГОРЬЕВ В. Г., ДУНИН С. З., СУРКОВ В. В.

(Москва)

Как известно, при распространении волн нагружения в пористых средах пористость уменьшается и характер ее изменения определяется динамикой закрытия поры. Объем поры может существенно уменьшаться лишь на фазе пластического течения материала [1, 2], т. е. волна нагружения должна быть достаточно интенсивной. Режим закрытия поры зависит как от вязких, так и от пластических свойств материала. При учете динамических эффектов пора может закрыться при давлениях, значительно меньших, чем те, которые при квазистатическом режиме приводили бы лишь к частичной выборке поры. Анализ характера изменения пористости необходим при выборе режима прессования пористых тел и при учете остаточной пористости, при распространении волн нагрузки в пористых материалах.

Рассмотрим задачу о схлопывании поры в вязкопластическом материале, которую можно сформулировать аналогично задаче о схлопывании пузырька в вязкой жидкости [3]. Необходимо отметить некоторые особенности задачи: равновесный размер поры отличен от нуля, характер изменения радиуса поры определяется не только числом Рейнольдса, но также и отношением предела текучести к среднему давлению в материале.

Пусть в некоторый момент времени к внешней поверхности полой сферы начального радиуса b_0 прикладывается постоянное давление p. Материал среды считаем несжимаемым ($\rho=\text{const}$), поэтому последующее движение вещества связано со сжатием внутренней полости первоначального радиуса a_0.

Уравнение движения при наличии радиальной симметрии имеет вид

$$\rho\frac{dv}{dt}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+2\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r} \tag{1}$$

где σ_r и $\sigma_\varphi=\sigma_\theta$ — компоненты тензора напряжений, а v — скорость радиального движения. На внешней поверхности сферы и на стенке полости выполняется условие непрерывности нормальных составляющих тензора напряжений

$$\sigma_r|_{r=b}=-p,\quad \sigma_r|_{r=a}=0 \tag{2}$$

где b и a – текущие радиусы сферы и полости. Если величина внешней нагрузки p превосходит некоторое критическое значение p_0 (указанное ниже), то среда переходит целиком в пластическое состояние. Определяющее уравнение вязкопластической среды запишем в форме

$$\sigma_r-\sigma_\varphi=Y+2\eta\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right) \tag{3}$$

где Y – предел текучести, η – коэффициент вязкости. Поле скоростей в несжимаемой среде $v=a^\bullet a^2/r^2$. Здесь использовано условие $v(a)=a^\bullet(t)$ ($a^\bullet$ – скорость движения стенки полости). На основании (1)–(3) можно получить следующее уравнение:

$$p=2Y\ln\frac{b}{a}-\frac{4\eta(b^3-a^3)a^\bullet}{ab^3}+\rho\left\{\frac{a^{\bullet 2}(b^4-a^4)}{2b^4}-\frac{b-a}{b}(a^{\bullet\bullet}a+2a^{\bullet 2})\right\} \tag{4}$$

В начальный момент времени скорость $a^\bullet(0)=0$, а ускорение $a^{\bullet\bullet}\leqslant 0$, откуда получаем условие $p\geqslant p_0=2Y\ln(b_0/a_0)$. Величина p_0 является эффективным пределом текучести пластической среды при всестороннем сжатии. Этот результат следует также из решения соответствующей упругопластической задачи [1, 2].

Дифференциальное уравнение (4), в котором b связано с a условием несжимаемости $b^3-a^3=b_0^3-a_0^3$, описывает изменение во времени радиуса полости a. Это уравнение удобно исследовать в фазовой плоскости, вводя безразмерные величины:

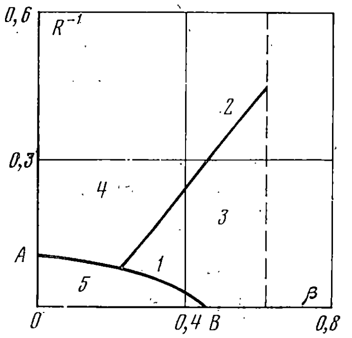
$$R=a_0(p\rho)^{1/2}/\eta,\quad x=aR/a_0,\quad y=a^\bullet(\rho/p)^{1/2},\quad \beta=Y/p,$$
$$n=(b_0^3-a_0^3)/a_0^3,\quad Z=(1+nR^3/x^3)^{-1/3}$$

Тогда уравнение (4) можно привести к виду

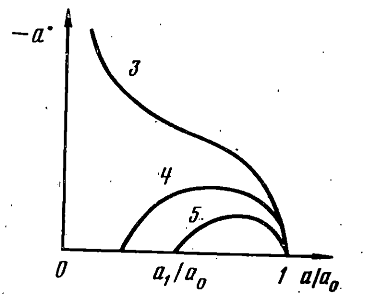
$$\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}\right)(1-z)-\frac{y}{2x}(1-z^4)+\frac{4}{x^2}(1-z^3)+\frac{1+2\beta\ln z}{xy}=0 \qquad (5)$$

Граничное условие уравнения (5), отвечающее нулевой начальной скорости, будет $y(R)=0$, где R – число Рейнольдса. Значения параметра β ограничены условием полного пластического течения $\beta\leqslant 3/[2\ln(n+1)]$. При $\beta=Y/p_0=0$ уравнение (5) описывает поведение жидкой сферической ячейки с внутренним пузырьком [4].

Отметим, что из-за необратимого характера диаграммы нагрузки – разгрузки для пористых сред [2] уравнение (5) применимо лишь на фазе сжатия полости ($y\leqslant 0$, $0\leqslant x\leqslant R$), так как на стадии обратного движения полости следует учитывать



Фиг. 1



Фиг. 2

упругие свойства среды. Поэтому дальнейшее рассмотрение проведем до момента остановки полости на фазе сжатия.

Исследуем характер особых точек уравнения (5). Одна особая точка ($x=0$, $y=-\infty$) связана с полным захлопыванием слоя, а другая ($x=x_1=R\{n/[\exp(3/(2\beta))-1]\}^{1/3}$, $y=0$) определяет равновесное положение полости при медленном приложении внешнего давления p. В случае вязкой жидкости второй особой точки не существует, так как все пузырьки схлопываются.

В окрестности бесконечно удаленной особой точки $x=0$, $u=y^{-1}=0$ уравнение (5) можно приближенно представить в виде

$$\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{x}\left(\frac{3}{2u}+\frac{4}{x}+2\beta u\ln x\right) \qquad (6)$$

Сепаратриса уравнения (6): $u=-x/8$ соответствует некоторому критическому значению числа Рейнольдса R_*, которое в данной задаче зависит от параметров β и n. При $R\geqslant R_*$ интегральные кривые входят в особую точку (это соответствует кумуляции), при $R<R_*$ полного захлопывания не происходит На фиг. 1 представлена кривая $R^{-1}=R_*^{-1}(\beta)$ для $n=10$ (кривая *1*), полученная при численном интегрировании уравнения (5). Точка $B=(3/\{2[\ln(n+1)+n\ln(1+1/n)]\}, 0)$ на фиг. 1 будет критической для идеально пластической среды ($\eta=0$). Положение точки A определяет условие кумуляции для вязкой жидкости и при $n\to\infty$ (полость в безграничной среде) ордината точки A стремится к 1,15.

Для исследования поведения интегральных кривых, соответствующих $R<R_*$, рассмотрим вторую особую точку уравнения (5). В окрестности этой особой точки уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dx}=-M\left[1+\frac{\beta(x-x_1)}{2y}\right]$$

$$M=\frac{4(1-z_1{}^3)}{(1-z_1)x_1{}^2},\qquad z_1=z(x_1)=\exp\left(-\frac{1}{2\beta}\right)$$

При условии $M\geqslant 2\beta$ особая точка является узлом, причем $M=2\beta$ соответствует вырожденному узлу. Если $M<2\beta$, то особенность является фокусом.

Для случая $M>2\beta$, когда особенность является узлом, возможны два физически различных типа решений, входящих в особую точку из областей $x<x_1$ и $x>x_1$.

Если траектория, выходящая из начальной точки $x=R$, попадает в область $x<x_1$, то преобладают инерционные эффекты: радиус полости в момент остановки (пересечение с осью x) меньше своей равновесной величины, которая определяется как результат статического сжатия давлением p. Дальнейшее движение среды носит колебательный характер, для описания которого нужно учитывать упругопластические свойства вещества. Во втором случае инерция устраняется вязкостью: радиус полости асимптотически ($t\to\infty$) приближается к своему равновесному значению и движение заканчивается при $x=x_1$.

Если выполняется условие $M<2\beta$, то особенность является фокусом и в этом случае всегда проявляется инерционный эффект.

Как показали численные расчеты для $n=10$, кривая критических значений параметров, разделяющая режимы колебательного движения среды и плавного сжатия, хорошо аппроксимируется уравнением $M=2\beta$ (особенность — вырожденный узел) — кривая *2* на фиг. 1. Пунктирная вертикальная линия на фиг. 1 ограничивает область полностью пластического течения слоя $\beta\leqslant 3/[2\ln(n+1)]$.

Проведенный анализ позволяет сделать ряд существенных замечаний о характере закрытия пустот в вязкопластических средах. В области значений параметров *3* (фиг. 1) полость под действием внешнего давления захлопывается: скорость движения стенок полости в момент кумуляции стремится к бесконечности по закону $x^{-3/2}$. В области *4* радиус полости в момент остановки (на фазе сжатия) конечен, но меньше своей равновесной величины. В области *5* происходит плавное сжатие полости до равновесного радиуса. Соответствующие этим режимам интегральные кривые показаны на фиг. 2.

Авторы глубоко благодарны А Л. Гюламиряну за внимание к работе и плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дунин С. З., Сироткин В. К., Сурков В. В.* О распространении пластических волн в пористых телах.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 92.
2. *Дунин С. З., Сурков В. В.* Уравнение состояния газоводонасыщенных сред.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1978, № 11, с. 63.
3. *Забабахин Е. И.* Заполнение пузырьков в вязкой жидкости.– ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1129.
4. *Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.* Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа.– Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6, с. 1299.

Поступила в редакцию
5.VI.1979