2. *Карновский И. А., Ланда М. Ш., Почтман Ю. М.* Исследование эффективности оптимального устранения колебаний пластин.– Проблемы прочности, 1977, № 3, с. 46.
3. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 567 с.
4. *Табак Д., Куо Б.* Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975. 279 с.
5. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 314 с.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением, М.: Наука, 1968. 475 с.
7. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 620 с.
8. *Волынский Э. И., Почтман Ю. М.* Некоторые сглаживающие алгоритмы случайного поиска.– В кн.: Проблемы случайного поиска. Рига: Зинатне, 1978, вып. 6, с. 95.

Поступила в редакцию
15.I.1979

УДК 539.3

О ВОЛНАХ В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ ТЕЛЕ

ХАЗАНОВ С. Ю.

(Москва)

Изучается распространение разрывов в нелинейных, наследственно – упругих телах со слабосингулярными ядрами наследственности. Применен аппарат дробных производных. Делаются выводы о поведении решений вблизи фронта.

Наиболее общим определяющим соотношением для наследственно-упругих тел является, как известно, разложение Вольтерра – Фреше [1]

$$E\varepsilon=\int\limits_{-\infty}^{t}\varkappa_1(t-\tau_1)\,d\sigma(\tau_1)+\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t}\varkappa_2(t-\tau_1,t-\tau_2)\,d\sigma(\tau_1)\,d\sigma(\tau_2)+\ldots \qquad (1)$$

Однако для практических целей соотношение (1) неприменимо, в связи с чем различные авторы предлагают свои нелинейные определяющие связи (например, в [1])

$$\varepsilon=J_0\sigma+\int\limits_{-\infty}^{t}K(t-\tau)\,\psi(\sigma(\tau))\,d\tau,\qquad J_0=\frac{1}{E}=\frac{1}{\rho c^2}$$

$$\varphi(\varepsilon)=J_0\sigma+\int\limits_{-\infty}^{t}K(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

В качестве ядер наследственности будем брать слабосингулярные ядра (т. е. со «слабой», интегрируемой особенностью в нуле), которые нашли обширные приложения в вязкоупругости [1]. Наиболее общим видом таких ядер является дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [1]. Что касается ядер без особенностей, то они хорошо изучены, а в последнее время появились работы и по исследованию динамики линейного наследственно-упругого тела со слабосингулярными ядрами [2]. Так как предметом исследования будет являться поведение решения вблизи фронта, т. е. при малых $(t-x/c)$, то используем (без ограничения общности) простейшее слабосингулярное ядро – ядро Абеля

$$K(t-\tau)=k(t-\tau)^{-\alpha},\qquad 0\leqslant\alpha<1 \qquad (3)$$

Вопросы распространения разрывов будем для наглядности изучать на примере модельной задачи о распространении волн в полубесконечном наследственно-упругом стержне $(x\geqslant 0)$. Граничные и начальные условия в этом случае будут иметь вид

$$u_t|_{t=0}=u|_{t=0}=\sigma|_{t=0}=0,\qquad \sigma|_{x=0}=f(t),\qquad \sigma|_{x=\infty}=0 \qquad (4)$$

Уравнение движения представим в форме

$$\partial\sigma / \partial x = \rho\partial^2 u / \partial t^2 \quad \text{или} \quad \sigma_x = \rho u_{tt} \tag{5}$$

Для дальнейшего анализа потребуется ввести понятие дробной производной (или производной дробного порядка) [3]:

$$D^\gamma \chi(t) = \frac{d^p}{dt^p}\left(\frac{1}{\Gamma(p-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{p-\gamma-1}\chi(\tau)\,d\tau\right) \qquad (p-1 \leqslant \gamma \leqslant p) \quad {\scriptstyle (p=0,1,2,\ldots)} \tag{6}$$

где γ — порядок производной, D — оператор дифференцирования

Тогда соотношения (2) можно представить в виде

$$\varepsilon = \partial u / \partial x = u_x = J_0\sigma + kD^{\alpha-1}(\psi(\sigma(t))) \tag{7}$$

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(u_x) = J_0\sigma + kD^{\alpha-1}(\sigma(t)) \tag{8}$$

Как известно, на фронте ударной волны выполняются соотношения [4]:

$$\frac{d}{dt}[\theta(t,x)] = [\theta_t] + G[\theta_x] \quad (\theta = \sigma, \varepsilon, u, v), \quad \frac{d}{dt}[u] = 0, \quad [\sigma] = -\rho G[u_t] \tag{9}$$

где $[\theta] = \theta|_{t=x/c+0} - \theta|_{t=x/c-0}$ — величина разрыва при переходе через фронт волны, G — скорость распространения фронта.

Сначала рассмотрим случай наследственно-упругого тела с определяющим соотношением типа (7). Покажем, что разрывы любого порядка могут распространяться здесь лишь со скоростью распространения упругих волн c.

Действительно, взяв разрыв от обеих частей соотношения (7), получим $[u_x] = J_0[\sigma]$, где $J_0 = 1/(\rho c^2)$. Если же сюда подставить последнее из условий (9), то получим $[u_x] = -J_0\rho G[u_t]$. А так как $d[u]/dt = 0 = [u_t] + G[u_x]$, т. е. $[u_x] = -[u_t]/G$, то выполняется равенство $[u_t]/G = J_0\rho G[u_t]$. Значит, справедливо $J_0 = 1/(\rho G^2)$ и $G = c$, откуда следует, что ударная волна действительно распространяется со скоростью распространения упругих волн c.

Покажем то же самое для волн ускорений, где по определению $[u_t] = [\varepsilon] = [\sigma] = 0$, и разрыв могут терпеть лишь производные этих функций.

Возьмем от обеих частей равенства (7) производную порядка $(1-\alpha)$ и разрыв, и получим, что $[D^{1-\alpha}u_x] = J_0[D^{1-\alpha}\sigma] + k[\psi(\sigma)]$. Но так как $\psi(0) = 0$, $[\sigma] = 0$, то и $[\psi] = 0$ (функция ψ обычно выбирается в виде полинома по σ). Из уравнения движения следует, что $[D^{2-\alpha}u] = [D^{-\alpha}\sigma_x] / \rho$. Домножим далее первое из полученных соотношений на G и сложим со вторым, используя правило (9):

$$\frac{d}{dt}[D^{1-\alpha}u] = \frac{1}{\rho}[D^{-\alpha}\sigma_x] + \frac{G}{\rho c^2}[D^{1-\alpha}\sigma]$$

Но, как известно, $[D^{1-\alpha}u] = [D^{-\alpha}u_t] = 0$ и

$$[D^{-\alpha}\sigma_x] = G^{-1}d[D^{-\alpha}\sigma] / dt - [D^{1-\alpha}\sigma] / G = [D^{1-\alpha}\sigma] / G$$

так как рассматривается волна ускорения. Следовательно, выполняется равенство $G[D^{1-\alpha}\sigma] / c^2 = [D^{1-\alpha}\sigma] / G$, т. е. вновь $G = c$, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично показывается, что разрыв любого порядка (т. е. производной любого порядка от σ, ε, u_t) распространяется только со скоростью распространения упругих волн c.

Исследуем непосредственно поведение решения вблизи фронта. Возьмем от обеих частей соотношения (7) производную порядка $(1-\alpha)$ и разрыв

$$[D^{1-\alpha}u_x] = J_0[D^{1-\alpha}\sigma] + k[\psi(\sigma)] = J_0[D^{1-\alpha}\sigma] + k\psi([\sigma]) \tag{10}$$

Здесь учтено, что волна идет по недеформированной среде, т. е. выполняется $\sigma|_{t=x/c-0} = 0$. Соответственно от уравнения движения берем производную порядка $(-\alpha)$ и разрыв

$$[D^{2-\alpha}u] = [D^{-\alpha}\sigma_x] / \rho \tag{11}$$

Далее сложим, учтя правило (9), два последних соотношения, предварительно домножив (10) на c:

$$\frac{d}{dt}[D^{1-\alpha}u] = \frac{1}{\rho c}\frac{d}{dt}[D^{-\alpha}\sigma] + kc\psi([\sigma]) \tag{12}$$

Но, согласно (9), выполняется соотношение

$$[D^{1-\alpha}u]=\frac{d}{dt}[D^{-\alpha}u]-c[D^{-\alpha}u_x],$$

где $[D^{-\alpha}u]=0$ (по формуле (6)), а из (7) следует, что $[D^{-\alpha}u_x]=J_0[D^{-\alpha}\sigma]+[D^{-1}\psi]=$ $=J_0[D^{-\alpha}\sigma]=0$. Таким образом, $[D^{1-\alpha}u]=0$ и $[D^{-\alpha}\sigma]=0$. Подставив эти значения в (12), получим, что $\psi([\sigma])=0$, т. е. и $[\sigma]=0$ (так как для определяющих соотношений выбираются лишь $\psi(\sigma)$, такие, что $\psi(0)=0$). Значит, ударных волн в телах с определяющими соотношениями типа (7) не существует. Профиль волны будет непрерывным.

Возьмем далее от уравнения (7) производную по времени порядка $(2-\alpha)$ и разрыв

$$[D^{2-\alpha}u_x]=J_0[D^{2-\alpha}\sigma]+k\left[\frac{d}{dt}\psi(\sigma)\right]=J_0[D^{2-\alpha}\sigma]+k\psi(0)[\sigma_t] \tag{13}$$

От уравнения движения берем производную порядка $(1-\alpha)$ и разрыв

$$[D^{3-\alpha}u]=[D^{1-\alpha}\sigma_x]\,/\,\rho \tag{14}$$

Снова складываем (13) и (14) с учетом (9), домножив (13) на c

$$\frac{d}{dt}[D^{2-\alpha}u]=\frac{1}{\rho c}\frac{d}{dt}[D^{1-\alpha}\sigma]+c\psi'(0)k[\sigma_t] \tag{15}$$

Здесь учтено, что волна идет по недеформированной среде, т. е. $\sigma|_{t=x/c-0}=0$. Но, согласно (9), выполняется

$$[D^{2-\alpha}u]=\frac{d}{dt}[D^{1-\alpha}u]-c[D^{1-\alpha}u_x]=-cJ_0[D^{1-\alpha}\sigma]=-\frac{[D^{1-\alpha}\sigma]}{\rho c}$$

Следовательно

$$\frac{2}{\rho c}\frac{d}{dt}[D^{1-\alpha}\sigma]+kc\psi'(0)[\sigma_t]=0 \tag{16}$$

Но уравнение (16) можно переписать так:

$$\frac{2}{\rho c}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x/c}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\sigma_\tau\,d\tau\right]+kc\psi'(0)[\sigma_t]=0 \tag{17}$$

Элементарный анализ показывает, что (17) может выполняться лишь при $[\sigma_t]=0$.

Взяв от (7) производную порядка $(3-\alpha)$, разрыв, и проделав аналогичные выкладки, придем к выводу об отсутствии разрыва и у второй производной. Точно так же показывается, что и все прочие $[\partial^n\sigma/\partial t^n]=0$, т. е. не существует разрывов никакого порядка. Таким образом, решение вблизи фронта таково, что все его производные обращаются в нуль (это аналогично поведению функции $\exp(1/t^2)$ вблизи нуля.

Рассмотрим теперь случай определяющего уравнения (8). Для сокращения выкладок ограничимся (не теряя общности) случаем «слабых» волн, где выполняются соотношения $[\sigma]=[\varepsilon]=[u_t]=0$. Покажем, что и в этом случае возмущения распространяются только со скоростью распространения упругих волн c. Действительно, взяв от соотношения (8) производную порядка $(1-\alpha)$ и разрыв, получим, что $[D^{1-\alpha}\varphi(\varepsilon)]=J_0[D^{1-\alpha}\sigma]$. Но так как

$$D^{1-\alpha}\varphi(\varepsilon)=\int\limits_{x/c}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi'(\varepsilon)\,\varepsilon'(\tau)\,d\tau$$

то

$$[D^{1-\alpha}\varphi(\varepsilon)]=\lim_{t\to x/c=0}\varphi_0(\varepsilon)=\varphi'(0)[D^{1-\alpha}\varepsilon]=[D^{1-\alpha}\varepsilon]$$

(ввиду того, что $[\varepsilon]=0$ и $\varphi(\varepsilon)$ выбрано таким, что $\varphi'(0)=1$). Следовательно, $[D^{1-\alpha}\varepsilon]=J_0[D^{1-\alpha}\sigma]$. Но

$$[D^{1-\alpha}\varepsilon]=[D^{1-\alpha}u_x]=\frac{1}{G}\frac{d}{dt}[D^{-\alpha}u_t]-\frac{1}{G}[D^{2-\alpha}u]=-\frac{[D^{-\alpha}\sigma]}{\rho G}=\frac{[D^{1-\alpha}\sigma]}{\rho G^2} \tag{18}$$

Таким образом, $J_0=1/(\rho c^2)=1/(\rho G^2)$, откуда следует, что $G=c$, т. е. возмущение и в этом случае распространяется со скоростью c. Для разрывов высших порядков утверждение доказывается точно так же.

Перейдем к непосредственному исследованию поведения решения вблизи фронта. Найдем от (8) производную порядка $(2-\alpha)$ и разрыв

$$[D^{2-\alpha}\varphi(\varepsilon)]=J_0[D^{2-\alpha}\sigma]+k[\sigma_t] \tag{19}$$

Но, расписывая левую часть, получим

$$[D^{2-\alpha}\varphi(\varepsilon)]=[D^{-\alpha}(\varphi''(\varepsilon)\varepsilon_t^2+\varphi'(\varepsilon)\varepsilon_{tt})]=\varphi''(0)[D^{-\alpha}\varepsilon_t^2]+\varphi'(0)[D^{2-\alpha}\varepsilon]=$$
$$=\varphi''(0)[\varepsilon_t][D^{-\alpha}\varepsilon_t]+[D^{2-\alpha}\varepsilon]$$

Следовательно, (19) переходит в (20)

$$[D^{2-\alpha}\varepsilon]+\varphi''(0)[\varepsilon_t][D^{-\alpha}\varepsilon_t]=J_0[D^{2-\alpha}\sigma]+k[\sigma_t] \tag{20}$$

Из уравнения движения следует, что

$$[D^{3-\alpha}u]=[D^{1-\alpha}\sigma_x]/\rho \tag{21}$$

Домножим соотношение (20) на c и сложим с (21), учтя (9)

$$\varphi''(0)[\sigma_t][D^{-\alpha}\sigma_t]=2\rho c^2\frac{d}{dt}[D^{1-\alpha}\sigma]+k\rho^2c^4[\sigma_t] \tag{22}$$

Точно такие же рассуждения, как и выше, приводят к выводу о том, что $[\sigma_t]=0$, т. е. волн ускорения (с разрывами первого порядка) в данном случае не существует. Совершенно аналогично, вычисляя от (8) производные порядка $(3-\alpha)$, $(4-\alpha)$ и т. д., показывается, что и все остальные разрывы $[\partial^n\sigma/\partial t^n]$ равны нулю, т. е. и при определяющем соотношении типа (8) решение ведет себя вблизи фронта (при малых $(t-x/c)$), как бесконечно гладкая функция.

Из полученных результатов вытекает, что вблизи фронта выполняется

$$\psi(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}\sigma^n\simeq\psi'(0)\sigma,\qquad \varphi(\varepsilon)\simeq\varphi'(0)\varepsilon$$

т. е. в качестве первого приближения вполне можно принимать решение хорошо изученного линеаризованного уравнения.

Таким образом, установлено, что для любого нелинейного наследственно-упругого тела невозможно существование разрывов никакого порядка; решения вблизи фронта обладают бесконечной гладкостью. Следует отметить, что полученные результаты вполне согласуются с известными для линейного случая.

Автор благодарен Ю. Н. Работнову за многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 384 с.
2. *Локшин А. А.* Волновые уравнения с сингулярно запаздывающим временем. – Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 1, с. 43.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
4. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

Поступила в редакцию
18.X.1979