

УДК 539.3+62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН КАК ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

КАРНОВСКИЙ И. А., ЛАНДА М. Ш., ПОЧТМАН Ю. М.

(Днепропетровск)

Рассматривается задача программного, оптимального по быстродействию управления колебаниями континуального объекта (пластины, оболочки).

В отличие от [1, 2], где для решения указанных задач использовалась теория l -моментов Крейна [3], здесь в развитие идей работы [4] континуальный управляемый объект заменяется дискретной моделью путем конечно-разностной аппроксимации по временной и пространственным координатам. Задача оптимального управления сводится к соответствующей задаче математического программирования. Такой подход позволяет рассматривать как линейные, так и нелинейные объекты, а также учитывать целый ряд дополнительных ограничений (на перемещения, скорости, силовые управляющие воздействия и т. д.), присущих реальным системам.

Численная реализация выполняется с помощью одного из алгоритмов метода случайного поиска. Приводятся результаты оптимального гашения колебаний прямоугольной пластины.

1. Обсуждается задача оптимального управления колебаниями пологой оболочки, состояние которой определяется следующей системой нелинейных уравнений [5]:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w - L(w, \Phi) - \nabla_k^2 \Phi + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{h}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w = 0, \quad L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\nabla_k^2 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad \nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

при начальных

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad w^*(x, y, 0) = \Psi(x, y) \quad (1.2)$$

и соответствующих граничных условиях.

Здесь w — перемещение системы по оси z , Φ — функция напряжений, E , ν , γ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и удельный вес материала оболочки, h — толщина оболочки, k_x , k_y — кривизны срединной поверхности по направлениям осей x и y .

Внешнюю нагрузку представим в виде

$$q(x, y, t) = p(x, y, t) + \sum_{r=1}^s u_r(t) \delta(x - \xi_r, y - \eta_r) \quad (1.3)$$

где $p(x, y, t)$ — возмущающая нагрузка, $u_r(t)$ — силовое управляющее воздействие, обеспечивающее гашение колебаний оболочки (пластины), δ — функция Дирака, ξ_r , η_r — координаты точки, к которой приложена сила.

Задача оптимального управления (по быстродействию) колебаниями формулируется следующим образом: найти такие управляющие воздействия $u_r(t)$, чтобы колебания оболочки (пластины) привести к заданному уровню

$$w(x, y, T) = w_f(x, y), \quad w^*(x, y, T) = w_f^*(x, y) \quad (1.4)$$

за минимально возможное время $T = T_{\min}$. При этом должны выполняться следующие дополнительные условия:

$$\left\{ \int_0^T \sum_{r=1}^s |u_r(x, y, t)|^\mu dt \right\}^{1/\mu} \leq l, \quad l > 0, \quad 1 \leq \mu < \infty \quad (1.5)$$

$$u_r(x, y, 0) = u_r(x, y, T) = 0 \quad (1.6)$$

$$\max |w(x, y, t)| \leq [w], \quad t \in [0, T_{\min}] \quad (1.7)$$

Условие (1.5) является ограничением на ресурсы управления. В частности, при $\mu=2$ его можно трактовать как ограничение на «энергетический» ресурс системы управления [6]. Условия (1.6) позволяют построить наиболее естественное распределение управляющих воздействий на отрезке $[0, T_{\min}]$, когда в начальный и конечный моменты времени управляющие силы равны нулю. Условие (1.7) ограничивает максимальное динамическое перемещение управляемого объекта.

Для реализации задачи оптимального управления переходим от континуального объекта (оболочка, пластина) к дискретному, используя конечно-разностную аппроксимацию по временной и пространственным координатам [7]:

$$\Delta x = \Delta y = \lambda, \quad \Delta t = \tau, \quad a = \lambda(n+1), \quad b = \lambda(m+1), \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b] \quad (1.8)$$

$$x_k = \lambda n_k, \quad y = \lambda m_k, \quad t_j = j\tau \quad (m_k = 1, \dots, m), \quad (n_k = 1, \dots, n), \\ M = mn, \quad N = T/\tau \quad (k=1, \dots, M) \quad (j=0, \dots, N)$$

$$r_k^{(j)} = \alpha p_k^{(j)}, \quad u_k^{(j)} = \alpha u_k^{(j)}, \quad \rho = \gamma h \lambda^4 / g D \tau^2, \quad \alpha = \lambda^2 / D$$

Здесь a, b — размеры оболочки (пластины) по прямоугольному контуру, x_k, y_k — координаты k -го узла сеточной области, расположенного на пересечении m_k -й строки

и n_k -го столбца, $p_k^{(j)}, u_k^{(j)}$ — приведенные возмущающая нагрузка и управляющая сила, приложенные в узле k в дискретный момент t_j , ρ — приведенная масса.

2. Рассмотрим оптимальное гашение колебаний геометрически нелинейной пластины ($k_x = k_y = 0$) [5]. В качестве минимизируемой функции цели выбираем время быстрогодействия T , которое определяем следующим образом. Рассматривая случай строгого равенства в выражении (1.5) и переходя к дискретной системе, получаем

$$\left\{ \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^M |u_k^{(j)}|^\mu \tau \right\}^{1/\mu} = l \quad (2.1)$$

Отсюда с учетом (1.8) имеем

$$T = N l^\mu / \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^M |u_k^{(j)}|^\mu \quad (2.2)$$

В результате приходим к следующей задаче нелинейного математического программирования: найти $\min T$, определяемое по (2.2), при ограничениях

$$Aw + w^T B \Phi = C, \quad G \Phi + w^T Q w = 0 \quad (j=0, \dots, N-1) \quad (2.3)$$

$$|w_k^{(N)}| - w_{jh} \leq 0 \quad (2.4)$$

$$|w_k^{(N)} - w_k^{(N-1)}| / \tau - w_{jh} \leq 0 \quad (2.5)$$

$$\max |w_k^{(j)}| - [w] \leq 0, \quad \min T > 0, \quad u_k^{(0)} = u_k^{(N)} = 0 \quad (j=0, \dots, N-1; k=1, \dots, M) \quad (2.6)$$

В частном случае для пластин, поведение которых описывается линейным уравнением технической теории, вместо системы (2.3) получаем более простое соотношение

$$Aw = C \quad (j=0, \dots, N-1) \quad (2.7)$$

Здесь A, B, G, Q — $(M \times M)$ -мерные матрицы коэффициентов $w = [w_k^{(j+1)}]$, $\Phi = [\Phi_k^{(j+1)}]$ — $(M \times 1)$ -мерные векторы перемещений и функции напряжений в узлах сетки k на временном слое j , $C = [c_k^{(j+1)}]$ — $(M \times 1)$ -мерный вектор, компоненты которого равны

$$c_k^{(j+1)} = p_k^{(j+1)} + u_k^{(j+1)} + 2\rho w_k^{(j)} \quad (j=0), \quad c_k^{(j+1)} = p_k^{(j+1)} + u_k^{(j+1)} + \\ + \rho (2w_k^{(j)} - w_k^{(j-1)}) \quad (j=1, \dots, N-1)$$

Матричные уравнения (2.3), (2.7) — разностные аналоги исходных уравнений движения — решаются последовательно на каждом временном слое j с использованием неявной разностной схемы [7]. При этом результаты решения системы, полу-

ченные на слое $j-1$, используются в качестве начальных условий для слоя j . В частном случае для уравнений (2.7) на каждом слое решается система линейных алгебраических уравнений с использованием алгоритма Гаусса.

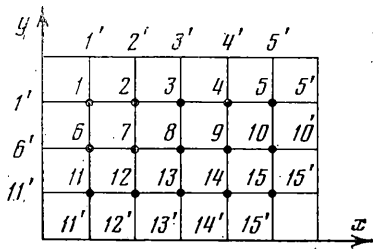
Задача (2.1) - (2.6) содержит в предельном случае $M(N+1)$ неизвестных управляющих воздействий $u_n^{(j)}$, количество ограничений в виде равенств равно при этом $2M(N+1)$, в виде неравенств - $M(N+2)+1$. Для ее решения составлена программа, ориентированная на ЭВМ БЭСМ-4м и реализующая один из алгоритмов случайного поиска - алгоритм скользящего эллипса [8].

3. В качестве примера приведем некоторые численные результаты, полученные для прямоугольной стальной пластины, шарнирно-опертой по контуру и имеющей следующие характеристики: $a=1,2$ м, $b=0,8$ м, $h=0,01$ м, $\gamma h/g=78,5$ кгм⁻², $E=2,06 \cdot 10^{11}$ Нм⁻², $\nu=0,3$.

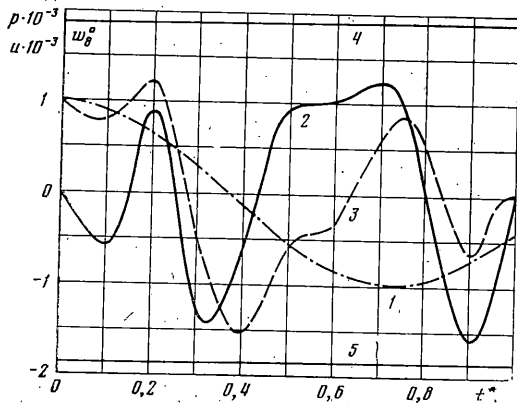
Колебания, подлежащие гашению, вызываются нагрузкой $p(t)=P_0 \cos \theta t$, прикладываемой в узле 8 (фиг. 1); $P_0=1000$ Н, $\theta=175$ с⁻¹, $w_{fs}=-0,25 \cdot 10^{-4}$ м, $w_{fs}^* = 0,15$ мс⁻¹, $[w]=0,92 \cdot 10^{-3}$ м. Управляющее воздействие $u(t)$ также приложено в узле 8. «Энергетический» ресурс управления ограничен: $l=149,9$ Нс^{-1/2}, $\mu=2$.

Пластина аппроксимируется сеточной областью: $\lambda=0,2$ м, $m=3$, $n=5$, $M=15$, $N=10$.

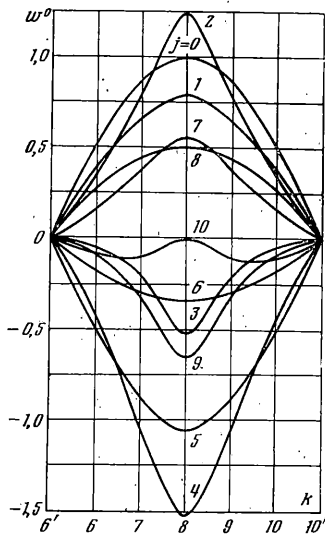
Задача содержит девять неизвестных управлений, 152 ограничения в виде равенств, четыре в виде неравенств.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 ($T_{min}=0,025$ с) показаны графики возмущающей нагрузки $p(t^*)$ (кривая 1), управляющего воздействия $u(t^*)$ (кривая 2), перемещений узла 8 - $w_s^0(t^*)$, отнесенных к прогибу от P_0 (кривая 3), в зависимости от времени $t^*=t/T$, а также линии уровня максимально допустимого прогиба $[w^0]$ (прямая 4) и $-[w^0]$ (прямая 5).

Перемещения пластины $w^0(t)$ по линии узлов 6'-10' в различные моменты управления колебаниями ($j=0, \dots, 10$) представлены на фиг. 3. Из графиков фиг. 2 и 3 следует, что найденные управления $u(t)$ обеспечивают подавление колебаний заданной точки пластины - перемещения и скорости узла 8 не превышают заданных ограничений; при этом ограничения (2.5) не являются лимитирующими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карновский И. А. К вопросу устранения колебаний в пластинах. - Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 2. с. 125.

2. Карновский И. А., Ланда М. Ш., Почтман Ю. М. Исследование эффективности оптимального устранения колебаний пластин. — Проблемы прочности, 1977, № 3, с. 46.
3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 567 с.
4. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975. 279 с.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 314 с.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением, М.: Наука, 1968. 475 с.
7. Рихтмайер Р., Морган К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 620 с.
8. Волюнский Э. И., Почтман Ю. М. Некоторые сглаживающие алгоритмы случайного поиска. — В кн.: Проблемы случайного поиска. Рига: Зинатне, 1978, вып. 6, с. 95.

Поступила в редакцию
15.1.1979

УДК 539.3

О ВОЛНАХ В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ ТЕЛЕ

ХАЗАНОВ С. Ю.

(Москва)

Изучается распространение разрывов в нелинейных, наследственно — упругих телах со слабосингулярными ядрами наследственности. Применен аппарат дробных производных. Делаются выводы о поведении решений вблизи фронта.

Наиболее общим определяющим соотношением для наследственно-упругих тел является, как известно, разложение Вольтерра — Фреше [1]

$$E\varepsilon = \int_{-\infty}^t \chi_1(t-\tau_1) d\sigma(\tau_1) + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi_2(t-\tau_1, t-\tau_2) d\sigma(\tau_1) d\sigma(\tau_2) + \dots \quad (1)$$

Однако для практических целей соотношение (1) неприменимо, в связи с чем различные авторы предлагают свои нелинейные определяющие связи (например, в [1])

$$\varepsilon = J_0 \sigma + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \psi(\sigma(\tau)) d\tau, \quad J_0 = \frac{1}{E} = \frac{1}{\rho c^2} \quad (2)$$

$$\varphi(\varepsilon) = J_0 \sigma + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau$$

В качестве ядер наследственности будем брать слабосингулярные ядра (т.е. со «слабой», интегрируемой особенностью в нуле), которые нашли обширные приложения в вязкоупругости [1]. Наиболее общим видом таких ядер является дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [1]. Что касается ядер без особенностей, то они хорошо изучены, а в последнее время появились работы и по исследованию динамики линейного наследственно-упругого тела со слабосингулярными ядрами [2]. Так как предметом исследования будет являться поведение решения вблизи фронта, т.е. при малых $(t-x/c)$, то используем (без ограничения общности) простейшее слабосингулярное ядро — ядро Абеля

$$K(t-\tau) = k(t-\tau)^{-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (3)$$

Вопросы распространения разрывов будем для наглядности изучать на примере модельной задачи о распространении волн в полубесконечном наследственно-упругом стержне $(x \geq 0)$. Граничные и начальные условия в этом случае будут иметь вид

$$u_t|_{t=0} = u|_{t=0} = \sigma|_{t=0} = 0, \quad \sigma|_{x=0} = f(t), \quad \sigma|_{x=\infty} = 0 \quad (4)$$