МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1981

УДК 539.3:534.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

БЕРГМАН Р. М., ЛАТИФОВ Ф. С.

(Баку)

Рассмотрена задача о свободных колебаниях упругой замкнутой круговой цилиндрической оболочки бесконечной длины, уложенной в бесконечную изотропную упругую среду. Считается, что жесткость материала среды значительно меньше жесткости материала оболочки.

В предположении, что изменяемость напряженно-деформированного состояния велика, проведен асимптотический анализ частот и форм колебаний.

1. Уравнения движения оболочки примем в виде [1]:

$$
\begin{gathered}
L_{11}(u)+L_{12}(v)+L_{13}(w)+\frac{1-\nu^2}{Eh}q_x-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \\
L_{21}(u)+L_{22}(v)+L_{23}(w)+\frac{1-\nu^2}{Eh}q_\varphi-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \\
L_{31}(u)+L_{32}(v)+L_{33}(w)-\frac{1-\nu^2}{Eh}q_r-\frac{1-\nu^2}{2E}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi}\right)+ \\
+\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0
\end{gathered}
\qquad (1.1)
$$

Здесь L_{ij} — известные операторы для цилиндрических оболочек [1], u, v, w — продольное, окружное и радиальное перемещения оболочки; E — модуль Юнга, ρ — плотность материала оболочки, R, h — радиус и толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, q_x, q_φ, q_r — компоненты контактного давления со стороны упругой среды на оболочку, t — время.

Движение упругой среды описывается уравнениями [2]:

$$
\begin{gathered}
(\lambda_s+2\mu_s)\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{2\mu_s}{r}\frac{\partial\omega_x}{\partial\varphi}+2\mu_s\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial x}-\rho_s\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \\
(\lambda_s+2\mu_s)\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}-2\mu_s\frac{\partial\omega_r}{\partial x}+2\mu_s\frac{\partial\omega_x}{\partial r}-\rho_s\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0 \\
(\lambda_s+2\mu_s)\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{2\mu_s}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\varphi)+\frac{2\mu_s}{r}\frac{\partial\omega_r}{\partial\varphi}-\rho_s\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0
\end{gathered}
\qquad (1.2)
$$

Здесь U, V, W — перемещения среды, λ_s, μ_s — коэффициенты Лямэ, ρ_s — плотность материала среды, x, r, φ — продольная, радиальная и окружная координаты.

Объемное расширение θ и компоненты вращения ω_x, ω_φ, ω_r определяются из выражений

$$\theta=\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{W}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial x},\quad 2\omega_x=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV)}{\partial r}-\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right] \tag{1.3}$$

$$2\omega_\varphi=\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial r},\quad 2\omega_r=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{\partial V}{\partial x}$$

Уравнения движения оболочки и упругой среды дополняются контактными условиями на внешней поверхности оболочки, т. е. при $r=R+h/2$:

$$U=u+\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial x},\qquad V=v+\frac{h}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{v}{R}\right),\qquad W=w$$
$$\sigma_{rx}=-q_x,\quad \sigma_{rr}=-q_r,\quad \sigma_{r\varphi}=-q_\varphi \tag{1.4}$$

где напряжения σ_{rx}, $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rr} определяются через перемещения известным образом (см., например, [2]):

$$\sigma_{rx}=\mu_s\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial r}\right),\qquad \sigma_{rr}=\lambda_s\theta+2\mu_s\frac{\partial W}{\partial r} \tag{1.5}$$

$$\sigma_{r\varphi}=\mu_s\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right)\right]$$

2. Решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$u=A\cos n\varphi\sin kx\sin pt,\qquad v=B\sin n\varphi\cos kx\sin pt,$$
$$w=C\cos n\varphi\cos kx\sin pt \tag{2.1}$$

Здесь $2n$ — число полуволн в окружном направлении, p — круговая частота, π/k — длина полуволн вдоль образующей, A, B, C — постоянные.

Решение уравнений (1.2), согласно [2], для бесконечного упругого цилиндра имеет вид

$$U=\left[-A_1\frac{\delta}{R}K_n(\varepsilon\alpha^*)-\frac{C_1\beta^{*2}}{R}K_n(\varepsilon\beta^*)\right]\cos n\varphi\sin kx\sin pt$$

$$V=\left[-\frac{A_1 n}{\varepsilon R}K_n(\varepsilon\alpha^*)-\frac{C_1\delta n}{\varepsilon R^2}K_n(\varepsilon\beta^*)-\frac{B_1}{n}\frac{\partial K_n(\varepsilon\beta^*)}{\partial r}\right]\sin n\varphi\cos kx\sin pt$$

$$W=\left[A_1\frac{\partial K_n(\varepsilon\alpha^*)}{\partial r}+\frac{C_1\delta}{R}\frac{\partial K_n(\varepsilon\beta^*)}{\partial r}+\frac{B_1}{\varepsilon R}K_n(\varepsilon\beta^*)\right]\sin pt\cos n\varphi\cos kx \tag{2.2}$$

$$\alpha^*=\left[\delta^2-\frac{(1-\nu_s-2\nu_s^2)\rho_s^*\lambda}{(1-\nu^2)(1-\nu_s)E_s^*}\right]^{1/2}\quad \beta^*=\left[\delta^2-\frac{2(1-\nu_s)\rho_s^*\lambda}{(1-\nu^2)E_s^*}\right]^{1/2}$$

$$\varepsilon=\frac{r}{R},\ \rho_s^*=\frac{\rho_s}{\rho h_*},\ E_s^*=\frac{E_s}{Eh_*},\ \delta=kR,\ h_*=\frac{h}{R}\quad \lambda=\frac{(1-\nu^2)\rho R^2p^2}{E},$$

где K_n — модифицированная функция Бесселя n-го порядка второго рода, ν_s — коэффициент Пуассона упругой среды, A_1, B_1, C_1 — постоянные (учтено, что $h_*\ll 1$).

Будем сначала считать, что в выражениях в квадратных скобках для α^* и β^* можно пренебречь вторыми слагаемыми. Это предположение означает, что не учитываются инерционные члены в уравнениях движения упругой среды (1.2). Кроме того, будем считать, что

$$E_s^*\sim h_*^{\alpha}(\alpha\geqslant 0),\qquad n\sim h_*^{-c}(0<c<1) \tag{2.3}$$

Первое предположение (2.3) означает, что жесткость материала оболочки намного больше жесткости упругой среды, а второе — что напряженное состояние обладает большой изменяемостью в окружном направлении.

Число случаев, когда материалы оболочки и упругой среды удовлетворяют неравенству $\rho_s^*/E_s^* \ll 1$, весьма незначительно. Однако указанное отношение имеет порядок единицы для многих сочетаний материалов оболочки и среды, например для свинца и древесины, стали и древесины и др. [3, 4]. В дальнейшем пренебрегаем вторыми слагаемыми в квадратных скобках для выражений α^* и β^* в (2.2), когда одновременно выполняются соотношения

$$\rho_s^*/E_s^* \sim O(1), \qquad \lambda \ll \delta^2 \tag{2.4}$$

В силу предположения относительно вида α^* и β^* получаем, что $\alpha^*=\beta^*$, следовательно, соответствующие решения из (2.2) становятся непригодными. Поэтому решения системы (1.2) примем, как и в статике [5], в форме (A_s, B_s, C_s=const):

$$\begin{gathered}
U=\left[\left(-\varepsilon\delta\frac{\partial K_n(\varepsilon\delta)}{\partial r}-4(1-\nu_s)\frac{\delta}{R}K_n(\varepsilon\delta)\right)A_s+\right.\\
\left.+\frac{\delta}{R}K_n(\varepsilon\delta)B_s\right]\cos n\varphi\sin kx\sin pt\\
V=\left[-\frac{n}{\varepsilon R}K_n(\varepsilon\delta)B_s-\frac{\partial K_n(\varepsilon\delta)}{\partial r}C_s\right]\sin n\varphi\sin kx\sin pt\\
W=\left[-\frac{\delta^2\varepsilon}{R}K_n(\varepsilon\delta)A_s+\frac{\partial K_n(\varepsilon\delta)}{\partial r}B_s+\frac{n}{R}K_n(\varepsilon\delta)C_s\right]\cos kx\cos n\varphi\sin pt
\end{gathered}\tag{2.5}$$

Подчиним решения (2.5) контактным условиям (1.4) и подставим найденные компоненты контактного давления q_x, q_φ, q_r вместе с выражениями (2.1) в систему (1.1); в результате получим частотное уравнение

$$\det\|a_{ij}\|=0 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}
a_{11}=\lambda-\delta^2-{}^1/_2(1-\nu)n^2+\varkappa\Delta^{-1}E_s^*\{\delta^3K_n''+(5-4\nu_s)\delta^2K_n'](\delta^2K_n'^2-n^2K_n^2)-\delta^5K_nK_n'^2\}\\
a_{12}={}^1/_2(1+\nu)n\delta+\varkappa\Delta^{-1}E_s^*\{n\delta^4K_nK_n'^2-n\delta^3K_n^2[\delta K_n''+(5+4\nu_s)K_n']+\\
+4(1-\nu_s)n\delta^3K_n'K_n^2\}(1-{}^1/_2h_*)\\
a_{13}=\nu\delta+\varkappa\Delta^{-1}E_s^*\{\delta^4[\delta K_n''+(5-4\nu_s)K_n']({}^1/_2\delta h_*K_n'^2-K_nK_n')-\\
-\delta^3[\delta^2-2(1-\nu_s)h_*n^2-n^2]K_n^2K_n'-\delta^4[{}^1/_2h_*\delta^2+{}^1/_2h_*n^2+8(1-\nu_s)K_nK_n'^2+\\
+2\delta^5K_n'^3-4(1-\nu_s)n^2\delta^2K_n^3\}\\
a_{21}={}^1/_2(1+\nu)n\delta+\varkappa\Delta^{-1}E_s^*n\delta^3K_n[\delta K_n'^2-K_nK_n'-\delta K_n''K_n]\\
a_{22}=\lambda-n^2-{}^1/_2(1-\nu)\delta^2+\varkappa\Delta^{-1}E_s^*\{\delta^4K_n''[\delta K_n'^2-\delta K_n^2+4(1-\nu_s)K_nK_n']-\\
-\delta^3[n^2+4(1-\nu_s)]K_nK_n'^2-\delta^2[4(1-\nu_s)n^2-n-\delta^2]K_n'K_n^2+4(1-\nu_s)n\delta K_n^3-\delta^4K_n'^3\}(1-{}^1/_2h_*)\\
a_{23}=-n[1+{}^1/_{12}h_*^2(n^2+\delta^2)]+\varkappa\Delta^{-1}E_s^*\{\delta^2K_n''[\delta K_nK_n'+4(1-\nu_s)K_n^2-{}^1/_2h_*\delta^2K_n'^2-\\
-2h_*\delta(1-\nu_s)K_nK_n']n\delta+n\delta^2[\delta^2+(1-2\nu_s)h_*n^2-h_*\delta^2+4(1-\nu_s)+n^2]K_n^2K_n'+\\
+n\delta^3[{}^1/_2\delta^2h_*+{}^1/_2n^2h_*-(7-8\nu_s)+2h_*(1-\nu_s)]K_n'^2K_n+n\delta^4({}^1/_2h_*-2)K_n'^3+\\
+4(1-\nu_s)n^3\delta(1-h_*)K_n^3\}\\
a_{31}=-\nu\delta+\varkappa E_s^*\Delta^{-1}\{2\delta^5K_n''K_n'K_n-2\delta^5K_n'^3+4(1-\nu_s)n^2\delta^2K_n^3-\\
-2(1-2\nu_s)\delta^4K_nK_n'^2-{}^1/_2h_*\delta a_{11}^*+{}^1/_2nh_*a_{21}^*\}\\
a_{32}=n[1+{}^1/_{12}h_*^2(n^2+\delta^2)]+\varkappa E_s^*\Delta^{-1}\{4(1-\nu_s)n\delta^3K_n^3+2n\delta K_n'^3-8(1-\nu_s)n\delta^2K_n^2K_n'+\\
+2(3-4\nu_s)n\delta^3K_n'^2K_n-2n\delta^3K_n''K_n[\delta K_n'+4(1-\nu_s)K_n]-{}^1/_2h_*\delta a_{12}^*+{}^1/_2na_{22}^*h_*\}(1-{}^1/_2h_*)\\
a_{33}=1-\lambda-{}^1/_{12}h_*^2(n^2+\delta^2)-\varkappa\Delta^{-1}E_s^*\{2\delta^2K_n''[{}^1/_2\delta^4h_*K_n'K_n+{}^1/_2h_*\delta^2n^2K_nK_n'+\\
+2(1-\nu_s)h_*n^2\delta K_n-\delta^3K_n'^2-4(1-\nu_s)\delta^2K_nK_n']-\\
-\delta^3[(1-2\nu_s)h_*\delta^2-2\delta^2-2n^2+3n^2h_*]K_nK_n'^2+\\
+\delta^2[2(1-2\nu_s)\delta^2-2n^2+4n^2h_*(1-\nu_s)+8n^2(1-\nu_s)]K_n^2K_n'-\\
-8(1-\nu_s)n^2\delta K_n^3-(n^2+\delta^2)h_*\delta^4K_n'^3-{}^1/_2h_*\delta a_{13}^*+{}^1/_2nh_*a_{23}^*\}\\
\Delta=\delta^2(n^2+\delta^2)K_n^2K_n'+4(1-\nu_s)K_n^3n^2\delta-\delta^4K_n^3-4(1-\nu_s)\delta^3K_n'^2K_n
\end{gathered}$$

$$\varkappa=\frac{1-\nu^2}{2(1+\nu_s)},\qquad a_{ij}^*=(a_{ij}-F_{ij})\frac{\Delta}{\varkappa E_s^*},\qquad F_{ij}=a_{ij}|_{E_s^*=0}\qquad (i,j=1,2,3)$$

В (2.6) $K_n=K_n(\delta)$, а через K_n' и K_n'' обозначено

$$K_n'=\left.\frac{dK_n(kr)}{d(kr)}\right|_{r=R},\qquad K_n''=\left.\frac{d^2K_n(kr)}{d(kr)^2}\right|_{r=R}$$

3. При анализе частотного уравнения воспользуемся следующими асимптотическими разложениями для функции K_n'/K_n, когда $n\gg1$

$$K_n'/K_n\approx-n/\delta \tag{3.1}$$

$$\frac{K_n'}{K_n}\approx-\frac{\delta}{a}\varphi_1,\qquad \varphi_1=1+\frac{n^2(a^2+n^2)^{-1/2}}{a},\qquad a^2=n^2+\delta^2 \tag{3.2}$$

$$K_n'/K_n\approx-1 \tag{3.3}$$

Формула (3.1), согласно [6], приемлема для случая $n\gg\delta$; формулы (3.2), (3.3) верны [7], если $n\sim\delta$ и $n\ll\delta$ соответственно.

Применяя формулы (3.2) к элементам a_{ij} определителя (2.6), приходим к следующему приближенному частотному уравнению:

$$\begin{gathered}\lambda^3-{}^1/_2(3-\nu)(n^2+\delta^2)\lambda^2+{}^1/_2(1-\nu)(n^2+\delta^2)^2\lambda-\\-{}^1/_{12}(1-\nu)h_*^2(n^2+\delta^2)^4-{}^1/_2(1-\nu^2)(1+\nu)\delta^4-\\-\varkappa(1-\nu)\varphi_1E_s^*(n^2+\delta^2)(n+\delta)=0\end{gathered} \tag{3.4}$$

Если же $0<\delta\ll n$, то согласно (3.1) приходим к такому частотному уравнению

$$\begin{gathered}\lambda^3-{}^1/_2(3-\nu)n^2\lambda^2+{}^1/_2(1-\nu)n^4\lambda-{}^1/_{12}(1-\nu)h_*^2n^8-\\-{}^1/_2(1-\nu^2)(1+\nu)\delta^4-\varkappa(1-\nu)\varphi_1E_s^*n^5=0\end{gathered} \tag{3.5}$$

Если $\delta\gg n$, то используя формулы (3.3), получаем из (2.6) следующее упрощенное уравнение:

$$\begin{gathered}\lambda^3-{}^1/_2(3-\nu)\delta^2\lambda^2+{}^1/_2(1-\nu)\delta^4\lambda-{}^1/_{12}(1-\nu)h_*^2\delta^8-\\-{}^1/_2(1-\nu^2)(1+\nu)\delta^4-\varkappa(1-\nu)\varphi_1E_s^*\delta^5=0\end{gathered} \tag{3.6}$$

Корни уравнения (3.4) с погрешностью порядка

$$O(\max[h_*^2(n^2+\delta^2)];\quad \delta^4(n^2+\delta^2)^{-3};\quad h_*^\alpha(n^2+\delta^2)^{-1}(n+\delta)])$$

имеют вид

$$\begin{gathered}\lambda_1=n^2+\delta^2,\quad \lambda_2={}^1/_2(1-\nu^2)(n^2+\delta^2)\\ \lambda_3=\frac{h_*^2}{6}(n^2+\delta^2)^2+\frac{(1-\nu^2)\delta^4}{(n^2+\delta^2)^2}+2\varkappa\varphi_1E_s^*(n+\delta)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Из формул (3.7) следует, что корни λ_1 и λ_2 не удовлетворяют условиям (2.4) и поэтому здесь не рассматриваются. Нетрудно убедиться, что корню λ_3 соответствуют квазипоперечные колебания оболочки [8]. Слагаемое $\varkappa(1-\nu)\varphi_1(n^2+\delta^2)E_s^*$ $(n+\delta)$, связанное с упругой средой, которое появилось за счет соответствующих членов элемента a_{33} определителя (2.6), может существенно влиять на рассматриваемую частоту в зависимости от величин δ, α, c.

Приближенные значения корней уравнений (3.5) и (3.6) получаются из формул (3.7), если пренебречь в круглых скобках либо δ по сравнению с n (для уравнения (3.5)), либо n по сравнению с δ (для уравнения (3.6)), причем, как и для корней уравнения (3.4), величины λ_1 и λ_2 не удовлетворяют условиям (2.4), а корню λ_3 соответствуют квазипоперечные колебания.

Из формулы (3.7) для λ_3 видно, что с увеличением α влияние упругой среды на колебания оболочки уменьшается и при $\alpha>2$ им можно пренебречь. При $\alpha=2$ упругая среда оказывает влияние на колебания оболочки в области минимально возможной частоты. Если принять, что $\delta \sim h_*^d(-1<d<1/2)$, то из (3.4)–(3.7) следует, что при фиксированном δ упругая среда влияет на частоты колебаний оболочки, лишь когда $\alpha \leqslant 5/4+3/2d$. При этом, как и в случае модели винклеровского основания [9], она не понижает порядки минимальных по n при фиксировании δ частот колебаний оболочки.

4. Предположим, что в квадратных скобках в выражениях для α^* и β^* в (2.2) можно пренебречь первым слагаемым. Это означает, что влияние инерции упругой среды на колебания оболочки существенно. Неравенство, указывающее диапазон изменения λ для рассматриваемого случая, будет приведено ниже.

Принимая решение в виде (2.2), аналогично приходим к частотному уравнению

$$\det\|b_{ij}\|=0 \quad (i,j=1,2,3) \tag{4.1}$$

в элементы b_{ij} которого входят бесселевы функции K_n с аргументами α^* и β^*. В силу сделанных предположений α^* и β^* являются комплексными величинами. Поэтому для проведения анализа уравнения (4.1) удобно ввести следующие параметры:

$$\begin{gathered}\alpha^*=\left\{i^2\left[\frac{(1-\nu_s-2\nu_s^2)\lambda\rho_s^*}{(1-\nu^2)(1-\nu_s)E_s^*}-\delta^2\right]\right\}^{1/2}=i\bar{\alpha}^*\\ \beta^*=\left\{i^2\left[\frac{2(1-\nu_s)\rho_s^*\lambda}{(1-\nu^2)E_s^*}-\delta^2\right]\right\}^{1/2}=i\bar{\beta}^* \quad (i^2=-1)\end{gathered} \tag{4.2}$$

Принимая, как и в (2.3), асимптотическое равенство для n, получаем, что при

$$0<\bar{x}<n \quad (x^*=i\bar{x}), \quad (i^2=-1) \tag{4.3}$$

для функции $K_n(x^*)$ можно использовать следующее асимптотическое представление [7]:

$$\begin{gathered}K_n(x^*)=K_n(i\bar{x})=\frac{i\pi}{2}\exp\left(\frac{in\pi}{2}\right)H_n^{(1)}[\bar{x}\exp(i\pi)]=-\frac{i\pi}{2}\exp\left(-\frac{in\pi}{2}\right)H_n^{(2)}(\bar{x})=\\ =-\frac{i\pi}{2}\exp\left(-\frac{in\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{\sqrt[4]{n^2-\bar{x}^2}}\exp\left(-\sqrt{n^2-\bar{x}^2}\right)\left(\frac{n+\sqrt{n^2-\bar{x}^2}}{\bar{x}}\right)^n\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $H_n^{(j)}(x^*)$ — функции Ханкеля ($j=1, 2$).

Отметим, что функции $H_n^{(j)}(\bar{x})$ ($j=1, 2$) имеют переходную точку при $\bar{x}=n$, при переходе через которую они превращаются из осциллирующих на бесконечности в экспоненциально изменяющиеся. Это означает, что энергия не излучается от оболочки в упругую среду. Поэтому на интервале $(n, +\infty)$ анализ частотного уравнения (4.1) интереса не представляет.

Применяя формулу (4.4) к элементам b_{ij} определителя (4.1), приходим к следующему приближенному частотному уравнению:

$$\lambda^3-{}^1/_2(3-\nu)n^2\bar{A}_1\lambda^2+{}^1/_2(1-\nu)n^4\bar{A}_2\lambda-$$
$$-\bar{A}_3[{}^1/_{12}(1-\nu)h_*^2n^8+{}^1/_2(1-\nu)\varkappa E_s{}^*n^5+{}^1/_2(1-\nu)^2(1+\nu)\delta^4]=0$$

$$\bar{A}_1=\frac{1+B^*}{1+A^*},\quad \bar{A}_2=\frac{1+C^*}{1+A^*},\quad \bar{A}_3=\frac{1}{1+A^*} \tag{4.5}$$

$$A^*=\left(\varkappa^*-\frac{5}{4}B^\vee\right)\frac{\rho_s{}^*}{n}+\varkappa B^\vee\left(\frac{3}{8}\varkappa B^\vee-\frac{\varkappa A^\vee}{4}-\frac{5\varkappa^*}{4}\right)\frac{\rho^{*2}}{n^2}+$$
$$+\frac{3}{8}\varkappa^2B^{\vee2}\left(\varkappa^*+\frac{\varkappa A^\vee}{2}\right)\frac{\rho_s{}^{*3}}{n^3}$$

$$B^*=\left[\varkappa^*-\frac{4-\nu}{2(3-\nu)}\varkappa B^\vee\right]\frac{\rho_s{}^*}{n}-\varkappa B^\vee\left[\frac{4-\nu}{2(3-\nu)}\varkappa^*+\frac{1-\nu}{4(3-\nu)}\varkappa A^\vee\right]\frac{\rho_s{}^{*2}}{n^2}$$

$$C^*=\varkappa^*\frac{\rho_s{}^*}{n},\quad A^\vee=\frac{1-\nu_s-2\nu_s{}^2}{(1-\nu^2)(1-\nu_s)},\quad B^\vee=\frac{2(1-\nu_s)}{1-\nu^2}$$

$$\varkappa^*=\varkappa(1-\lambda_s/2\mu_s)A^\vee$$

Из выражения для A^*, B^*, C^* видно, что при $\rho_s{}^*\ll n$ плотность упругой среды на частоты колебаний существенного влияния не оказывает. В этом случае приближенно получается частотное уравнение (3.5). Отметим, что два относительно больших корня уравнения (4, 5), вообще говоря, выходят из рамок рассматриваемого диапазона изменения λ, так как для λ должно выполняться двойное «сильное» неравенство

$$E_s{}^*\delta^2/\rho_s{}^*\ll\lambda\ll E_s{}^*n^2/\rho_s{}^* \tag{4.6}$$

Левое неравенство в (4.6) вытекает из предположения о виде выражения α^* и β^* в (2.2), а правое – из условия (4.3). Будем здесь считать, что соотношение материалов оболочки и упругой среды таково, что $E_s{}^*/\rho_s{}^*\ll1$. Этому неравенству удовлетворяет большое число пар материалов оболочки и среды, например сталь и резина, алюминий и резина, сталь и полускальный грунт и др. [3, 4, 10].

Уравнение (4.5) имеет лишь один действительный корень λ, удовлетворяющий неравенству (4.6), который приближенно выражается так:

$$\lambda\approx\left[\frac{h_*^2n^4}{6}+\varkappa E_s{}^*n+\frac{1-\nu^2}{n^4}\delta^4\right]\frac{1}{1+C^*} \tag{4.7}$$

Считаем, что степень малости величины $E_s{}^*/\rho_s{}^*$ такова, что для корня (4.7) выполняется неравенство (4.6). Учитывая, что $1+C^*>1$, нетрудно показать, что такому λ соответствуют квазипоперечные колебания оболочки [8].

Из формулы (4.7) видно, что частоты собственных колебаний растут с увеличением жесткости и уменьшением плотности материала упругой среды. Из формул (4.5) и (4.7) следует, что если $\rho_s{}^*\gg n$, то порядок минимальной (при фиксированном δ) частоты понижается по сравнению с порядком соответствующей частоты оболочки, не связанной со средой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 212 с.
2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.– Л.: Главн. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1935, 301 с.

3. *Карякин Н. И., Быстров К. Н., Киреев П. С.* Краткий справочник по физике. М.: Высшая школа, 1964. 568 с.
4. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 828 с.
5. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 55 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. 100 с.
7. *Янке Е., Емде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 223 с.
8. *Гольденвейзер А. Л.* Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки.– ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 96.
9. *Бергман Р. М., Киясбейли Т. Н.* Свободные колебания подземного газопровода большого диаметра при наличии переменного винклеровского радиального действия.– Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1976, № 6, с. 87.
10. Справочник по проектированию магистральных трубопроводов. Л.: Недра, 1977. 140 с.

Поступила в редакцию
10.X.1979