

УДК 539.3:534.1

ЛИНЕЙНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ РЕАКЦИЯ СОСТАВНОЙ
ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

КОВАЛЕВ А. М.

(Ленинград)

Осесимметричная реакция составных оболочек вращения на ударную нагрузку, приложенную к торцу, рассматривалась в ряде работ. В [1] исследовалась линейная реакция цилиндрической оболочки со ступенчатой толщиной, в [2] — линейная реакция оболочки, состоящей из двух цилиндрических оболочек, соединенных переходной конической оболочкой. Нагрузка и вместе с ней решение были непрерывны. В [3] рассматривалась геометрически нелинейная реакция составной оболочки вращения. Применялся численный метод С. К. Годунова, однако распад разрыва рассчитывался по линейной теории оболочек. Решение было непрерывно.

В данной работе рассматривается линейная реакция оболочки вращения переменной толщины, физические и геометрические параметры которой имеют разрыв на некоторой параллели. Решение имеет разрывы на характеристиках. Применяется метод характеристик с фиксированной сеткой, который сохраняет разрывы только на характеристиках, принадлежащих сетке. Для сохранения разрывов на характеристиках, не принадлежащих сетке, будем их выделять аналитически.

В данной работе аналитически выделяются разрывы на всех характеристиках независимо от их принадлежности сетке. Получены формулы для коэффициентов отражения и преломления волн на стыке. Для упрощения волновой картины оболочка взята полубесконечной.

1. Постановка задачи. Примем следующие обозначения: t — время; s — длина дуги меридиана ($0 \leq s < \infty$); r — расстояние точки меридиана до оси вращения ($r \neq 0$); α — угол, образуемый касательной меридиана с осью вращения; R_s, R_φ — радиусы кривизны в направлении меридиана и параллели; h — толщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность; c_1, c_2 — скорости волн сжатия — растяжения и сдвига; v_s, v_τ — продольная и поперечная скорости смещений; ω — угловая скорость нормали; N_s, N_φ, Q — продольное, окружное и поперечное усилия; M_s, M_φ — продольный и окружной моменты; m — масса тела; v — скорость тела; $\alpha_0 = \alpha(0), r_0 = r(0), h_0 = h(0)$.

Пусть $\alpha, 1/R_s, 1/R_\varphi, h, \rho, c_1, c_2, \nu$ имеют конечный разрыв в точке $s=l$, причем физические параметры ρ, c_1, c_2, ν кусочно-постоянные и равны $\rho_-, c_{1-}, c_{2-}, \nu_-$ слева и $\rho_+, c_{1+}, c_{2+}, \nu_+$ справа от точки $s=l$.

Вводя безразмерные величины $(s, r, R_s, R_\varphi)/l, tc_{1-}/l, (v_s, v_\tau)/c_{1-}, \omega h_0/\sqrt{12}c_{1-}, (N_s, N_\varphi, Q)/(\rho c_1^2 h_0), (M_s, M_\varphi)\sqrt{12}/(\rho c_1^2 h_0^2), h/\sqrt{12}l, \rho/\rho_-, (c_1, c_2, \nu)/c_{1-}, m/(2\pi r_0 h_0 l \rho_-)$ и сохраняя для них те же обозначения, запишем линейные осесимметричные уравнения движения оболочки вращения типа Тимошенко [4] в виде системы первого порядка

$$u' + Au' = b, \quad u = (v_s, \omega, v_\tau, Q, M_s, N_s, N_\varphi, M_\varphi)^T \quad (1.1)$$

где A — матрица 8×8 с отличными от нуля элементами $a_{16} = a_{33} = -c_1 h_0/h, a_{25} = -c_1 (h_0/h)^3, a_{43} = -(c_2^2/c_1)h/h_0, a_{52} = -c_1 (h/h_0)^3, a_{61} = -c_1 h/h_0, a_{71} = -\nu c_1 h/h_0, a_{82} = -\nu c_1 (h/h_0)^3, b$ — вектор-столбец с компонентами

$$b_1 = c_1 \frac{h_0}{h} \left[\frac{r'}{r} (N_s - \bar{N}_\varphi) + \frac{1}{R_s} Q \right], \quad b_2 = c_1 \left(\frac{h_0}{h} \right)^3 \left[\frac{r'}{r} (M_s - \bar{M}_\varphi) - \frac{1}{h_0} Q \right]$$

$$\begin{aligned}
 b_3 &= c_1 \frac{h_0}{h} \left(\frac{r'}{r} Q - \frac{1}{R_s} N_s - \frac{1}{R_\Phi} N_\Phi \right), & b_4 &= \frac{c_2^2}{c_1} \frac{h}{h_0} \left(\frac{\omega}{h_0} - \frac{v_s}{R_s} \right) \\
 b_5 &= c_1 \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 v \frac{r' \omega}{r}, & b_6 &= c_1 \frac{h}{h_0} \left[\frac{v_\zeta}{R_s} + v \left(\frac{r' v_s}{r} + \frac{v_\zeta}{R_\Phi} \right) \right] \\
 b_7 &= c_1 \frac{h}{h_0} \left(v \frac{v_\zeta}{R_s} + \frac{r' v_s}{r} + \frac{v_\zeta}{R_\Phi} \right), & b_8 &= c_1 \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 \frac{r' \omega}{r}
 \end{aligned}$$

штрих означает производную по s , точка — производную по t .

В точке стыка $s=1$ система (1.1) теряет смысл и заменяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 c_{1+} v_{s+} &= v_{s-} \cos \beta + v_{\zeta-} \sin \beta, & c_{1+} v_{\zeta+} &= -v_{s-} \sin \beta + v_{\zeta-} \cos \beta \\
 \rho_+ c_{1+}^2 N_{s+} &= N_{s-} \cos \beta + Q_- \sin \beta, & \rho_+ c_{1+}^2 Q_+ &= -N_{s-} \sin \beta + Q_- \cos \beta \\
 c_{1+} \omega_+ &= \omega_-, & \rho_+ c_{1+}^2 M_{s+} &= M_{s-}, & u_{\pm} &= u|_{s=1 \pm 0}
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

связывающими левые и правые предельные значения искомых функций на стыке, $\beta = \alpha_+ - \alpha_-$.

Начальные условия нулевые:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (1.3)$$

Масса m , жестко закрепленная на торце оболочки, получает начальную осевую скорость v_0 . Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned}
 v_{s0} &= v \cos \alpha_0, & v_{\zeta 0} &= -v \sin \alpha_0, & \omega_0 &= 0 \\
 v &= v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F dt, & F &= N_{s0} \cos \alpha_0 - Q_0 \sin \alpha_0, & u_0 &= u|_{s=0}
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Нормальная форма. Переходя от вектора u к новому неизвестному вектору V по формулам

$$\begin{aligned}
 v_s &= \gamma (V_1 + V_6), & \omega &= \frac{h_0}{h} \gamma (V_2 + V_5), & v_\zeta &= \gamma (V_3 + V_4) \\
 Q &= \frac{c_2}{c_1} \frac{h}{h_0} \gamma (V_4 - V_3), & M_s &= \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \gamma (V_5 - V_2) \\
 N_s &= \frac{h}{h_0} \gamma (V_6 - V_1), & N_\Phi &= v N_s + \sqrt{2(1-v^2)} \frac{h}{h_0} \gamma V_7 \\
 M_\Phi &= v M_s + \sqrt{2(1-v^2)} \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \gamma V_8, & \gamma &= \left(\frac{r_0 h_0}{r h} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

приводим систему (1.1) к нормальной форме [5]:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial s} \right) V_i &= \sum_{j=1}^8 c_{ij}(s) V_j \quad (i=1, 2, \dots, 8) \\
 \lambda_1 &= \lambda_2 = -\lambda_5 = -\lambda_6 = c_1, & \lambda_3 &= -\lambda_4 = c_2, & \lambda_7 &= \lambda_8 = 0 \\
 c_{13} &= c_{46} = -\frac{c_1}{2} \left(\frac{1+c_2/c_1}{R_s} + \frac{v}{R_\Phi} \right), & c_{14} &= c_{36} = -\frac{c_1}{2} \left(\frac{1-c_2/c_1}{R_s} + \frac{v}{R_\Phi} \right) \\
 c_{16} &= \frac{c_1}{2} \left[(1-2v) \frac{r'}{r} + \frac{h'}{h} \right], & c_{25} &= \frac{c_1}{2} \left[(1-2v) \frac{r'}{r} + \frac{3h'}{h} \right],
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$c_{34} = \frac{c_2}{2} \left(\frac{r'}{r} + \frac{h'}{h} \right)$$

$$c_{17} = c_{28} = c_{38} = c_{67} = -\frac{c_1}{2} \frac{r'}{\sqrt{2(1-v^2)}} \frac{r'}{r}, \quad c_{37} = c_{47} = -\frac{c_1}{2} \frac{r'}{\sqrt{2(1-v^2)}} \frac{1}{R_\Phi}$$

$$c_{23} = -c_{24} = -c_{35} = c_{45} = c_2 / 2h$$

Матрица коэффициентов c_{ij} кососимметричная, поэтому приведены только ненулевые c_{ij} , стоящие над нулевой главной диагональю. В нормальной форме появилась производная h' . Потребуем, чтобы она была непрерывна всюду, кроме точки $s=1$, где может иметь конечный разрыв.

Подставляя (2.1) в (1.2)–(1.4), получаем соотношения на стыке, начальные и граничные условия в терминах V :

$$\begin{aligned} V_{i+} &= k_{i1} V_{1-} + k_{i3} V_{3-} + k_{i4} V_{4+} + k_{i6} V_{6+} & (i=1, 3) \\ V_{i-} &= k_{i1} V_{1-} + k_{i3} V_{3-} + k_{i4} V_{4+} + k_{i6} V_{6+} & (i=4, 6) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$V_{2+} = k_{22} V_{2-} + k_{25} V_{5+}, \quad V_{5-} = k_{52} V_{2-} + k_{55} V_{5+}, \quad V_{\pm} = V|_{s=1 \pm 0}$$

$$k_{11} = \frac{2(c_{2+} + c_{2-}/\mu)\eta^{1/2} \cos \beta}{c_{1+}^2 \Delta_1}, \quad k_{13} = \frac{2c_{2-} - (c_{2+} + 1/\mu)\eta^{1/2} \sin \beta}{c_{1+}^2 \Delta_1}$$

$$k_{31} = -\frac{2[1 + c_{2-}/(c_{1+}\mu)]\eta^{1/2} \sin \beta}{c_{1+} \Delta_1}, \quad k_{33} = \frac{2c_{2-} - [1 + 1/(c_{1+}\mu)]\eta^{1/2} \cos \beta}{c_{1+} \Delta_1}$$

$$k_{41} = -\frac{(1 - c_{2+}/c_{1+}) \sin 2\beta}{\Delta_1}, \quad k_{63} = c_{2-} - k_{41}$$

$$k_{43} = \frac{c_{2-}/(c_{1+}\mu) - (1 - c_{2-} - c_{2+}/c_{1+}) \sin^2 \beta + (c_{2-} - c_{2+}/c_{1+}) \cos^2 \beta - c_{2+}\mu}{\Delta_1}$$

$$k_{61} = \frac{c_{2-}/(c_{1+}\mu) + (1 - c_{2-} - c_{2+}/c_{1+}) \sin^2 \beta - (c_{2-} - c_{2+}/c_{1+}) \cos^2 \beta - c_{2+}\mu}{\Delta_1}$$

$$\Delta_1 = c_{2-}/(c_{1+}\mu) + (1 + c_{2-} - c_{2+}/c_{1+}) \sin^2 \beta + (c_{2-} + c_{2+}/c_{1+}) \cos^2 \beta + c_{2+}\mu$$

$$k_{22} = \frac{2\eta^{1/2}}{c_{1+}\Delta_2}, \quad k_{52} = \frac{1 - c_{1+}\mu\eta^2}{\Delta_2}, \quad \Delta_2 = 1 + c_{1+}\mu\eta^2, \quad \eta = \frac{h_+}{h_-}, \quad \mu = \rho + \eta$$

$$V=0 \quad \text{при} \quad t=0 \quad (2.4)$$

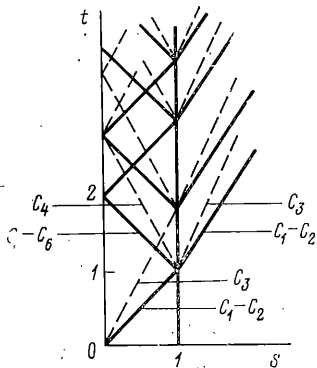
$$(V_1 + V_6)_0 = v \cos \alpha_0, \quad (V_2 + V_5)_0 = 0$$

$$(V_3 + V_4)_0 = -v \sin \alpha_0, \quad v = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F dt \quad (2.5)$$

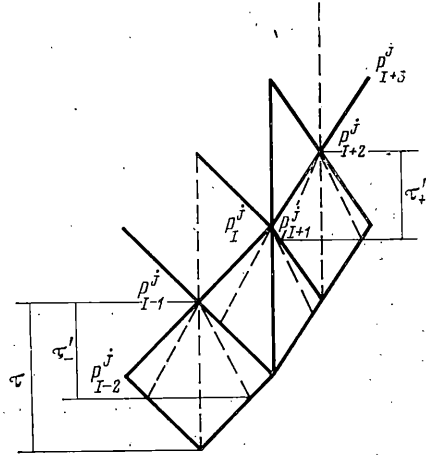
$$F = (V_6 - V_1)_0 \cos \alpha_0 - c_{2-} (V_4 - V_3)_0 \sin \alpha_0, \quad (\dots)_0 = (\dots)_{s=0}$$

Соотношения на стыке (2.3) даны в виде, разрешенном относительно V_{1+} , V_{2+} , V_{3+} , V_{4-} , V_{5-} , V_{6-} . Приведены только коэффициенты k_{ij} при V_{1-} , V_{2-} , V_{3-} . Остальные k_{ij} получаются из $k_{7-i, 7-j}$ заменой c_{1+} , c_{2+} , c_{2-} , η , μ , β на $1/c_{1+}$, c_{2-}/c_{1+} , c_{2+}/c_{1+} , $1/\eta$, $1/\mu$, $-\beta$ соответственно. В дальнейшем выяснится, что k_{ij} — коэффициенты отражения и преломления волн на стыке, причем коэффициенты k_{ij} и $k_{7-i, 7-j}$ имеют одинаковый физический смысл, но относятся к волнам, падающим на стык с разных сторон, чем и объясняется их взаимный переход при указанной замене.

3. Выделение разрывов. Пусть C_i означает характеристику $ds/dt = \lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, 8$). Характеристики, несущие разрывы, показаны на фиг. 1. Из нормальной формы (2.2) следует [5] непрерывность всех компонент



Фиг. 1



Фиг. 2

вектора V , кроме V_i , при переходе через характеристику C_i . Пользуясь тем, что в (2.2) диагональные коэффициенты c_{ii} , а также c_{12} , c_{21} , c_{56} , c_{65} равны нулю, можно доказать, что на характеристике C_i разрыв $[V_i] = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Что касается $V_{7,8}$, то, интегрируя по t седьмое и восьмое уравнения (2.2), можно выразить эти компоненты через смещения и угол поворота и тем самым доказать их непрерывность.

Из (2.4) получаем формулы для разрывов скоростей, усилий и моментов

$$\begin{aligned} [v_s]_{c_1} &= -\frac{h_0}{h} [N_s]_{c_1} = \gamma [V_1], & \frac{h}{h_0} [\omega]_{c_2} &= -\left(\frac{h_0}{h}\right)^2 [M_s]_{c_2} = \gamma [V_2] \\ [v_t]_{c_3} &= -\frac{c_1}{c_2} \frac{h_0}{h} [Q]_{c_3} = \gamma [V_3], & [v_t]_{c_4} &= \frac{c_1}{c_2} \frac{h_0}{h} [Q]_{c_4} = \gamma [V_4] \\ \frac{h}{h_0} [\omega]_{c_5} &= \left(\frac{h_0}{h}\right)^2 [M_s]_{c_5} = \gamma [V_5], & [v_s]_{c_6} &= \frac{h_0}{h} [N_s]_{c_6} = \gamma [V_6] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$[N_\varphi] = \nu [N_s], \quad [M_\varphi] = \nu [M_s].$$

Разрывы на характеристиках C_1-C_2 , C_3 , выходящих из начала координат, найдем устремляя t к нулю в граничных условиях (2.5). В результате получим

$$[V_1] = V_1(0, 0) = v_0 \cos \alpha_0, \quad [V_2] = 0, \quad [V_3] = V_3(0, 0) = -v_0 \sin \alpha_0 \quad (3.2)$$

Рассмотрим отражение и преломление разрывов на стыке $s=1$. Разрывы на характеристиках C_1-C_2 , C_3 , C_4 , C_5-C_6 , выходящих из точки пересечения прямой $s=1$ с приходящей характеристикой C_1-C_2 , находим из соотношений (2.3) в виде

$$\begin{aligned} [V_{i+}] &= k_{i1} [V_{i-}] \quad (i=1, 3), & [V_{i-}] &= k_{i1} [V_{i-}] \quad (i=4, 6) \\ [V_{2+}] &= k_{22} [V_{2-}], & [V_{5-}] &= k_{52} [V_{2-}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для получения этих формул следует написать соотношения (2.3) дважды при $t = t_* \pm \varepsilon$, где t_* — координата точки пересечения прямой $s=1$ с приходящей характеристикой, вычесть соответствующие равенства и устремить ε к нулю. Аналогично получаем разрывы на характеристиках C_1-C_2 , C_3 , C_4 , C_5-C_6 , выходящих из точки пересечения прямой $s=1$ с приходящей

характеристикой C_3 :

$$\begin{aligned} [V_{i+}] &= k_{i3} [V_{3-}] & (i=1, 3), & [V_{i-}] = k_{i3} [V_{3-}] & (i=4, 6) \\ [V_{2+}] &= [V_{5-}] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

На основании формул (3.1), (3.3), (3.4) коэффициенты k_{ij} имеют следующий физический смысл: k_{11} , k_{31} — коэффициенты преломления волны сжатия — растяжения, падающей на стык слева; k_{41} , k_{61} — коэффициенты отражения той же волны; k_{13} , k_{33} — коэффициенты преломления волны сдвига, падающей на стык слева; k_{43} , k_{63} — коэффициенты отражения той же волны; k_{22} , k_{52} — коэффициенты преломления и отражения волны изгиба, падающей на стык слева.

Рассмотрим отражение разрывов от торца $s=0$. Так как разрывы V конечны, интеграл в граничных условиях (2.5) — непрерывная функция t . Отсюда получаем разрывы на характеристике C_1-C_2 , выходящей из точки пересечения прямой $s=0$ с приходящей характеристикой C_5-C_6 :

$$[V_1] = -[V_6], \quad [V_2] = -[V_5] \quad (3.5)$$

и разрыв на характеристике C_3 , выходящей из точки пересечения прямой $s=0$ с приходящей характеристикой C_4 :

$$[V_3] = -[V_4] \quad (3.6)$$

Пользуясь формулами (3.2) — (3.6), выделяем разрывы искоемых функций на характеристиках (фиг. 1):

$$V_i = V_i^0 + f_i(t-s/\lambda_i) \quad (i=1, 3, 4, 6) \quad (3.7)$$

$$V_i = V_i^0 \quad (i=2, 5, 7, 8)$$

$$f_1 = \begin{cases} f_{1-}(t-s), & 0 \leq s < 1 \\ f_{1+}(t-(s-1)/c_{1+}), & 1 < s < \infty \end{cases} \quad f_3 = \begin{cases} f_{3-}(t-s/c_{2-}), & 0 \leq s < 1 \\ f_{3+}(t-(s-1)/c_{2+}), & 1 < s < \infty \end{cases}$$

$$f_4 = \begin{cases} f_{4-}(t+(s-1)/c_{2-}), & 0 \leq s < 1 \\ 0, & 1 < s < \infty \end{cases} \quad f_6 = \begin{cases} f_{6-}(t+s-1), & 0 \leq s < 1 \\ 0, & 1 < s < \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{1-}(t) &= V_1(0, 0)H(t) - k_{61}V_1(0, 0)H(t-2) - k_{63}V_3(0, 0)H(t-1-1/c_{2-}) + \dots \\ f_{3-}(t) &= V_3(0, 0)H(t) - k_{41}V_1(0, 0)H(t-1-1/c_{2-}) - k_{43}V_3(0, 0)H(t-2/c_{2-}) + \dots \\ f_{i+}(t) &= k_{i1}f_{1-}(t-1) + k_{i3}f_{3-}(t-1/c_{2-}) \quad (i=1, 3), \\ f_{i-}(t) &= k_{i1}f_{1-}(t-1) + k_{i3}f_{3-}(t-1/c_{2-}) \quad (i=4, 6) \\ H(t) &= 0 \quad \text{при } t < 0, \quad H(t) = 1 \quad \text{при } t \geq 0 \end{aligned}$$

Здесь V_i^0 — новые искоемые функции, непрерывные всюду, кроме прямой $s=1$. Если в формулах для f_{1-} , f_{3-} ограничиться написанными слагаемыми, то V_i^0 будут непрерывны в области $t-5-(s-1)/c_1 < 0$, ограниченной первой характеристикой, разрыв на которой не выделен.

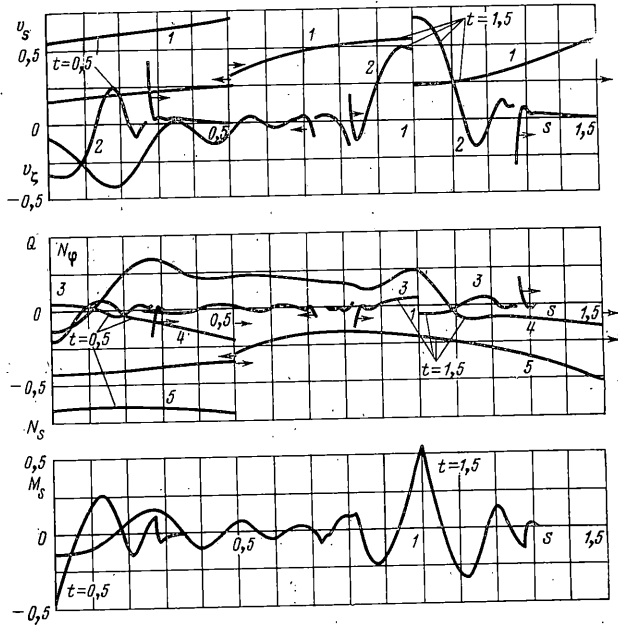
Сформулируем задачу для V^0 . Подставляя (3.7) в (2.2), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial s} \right) V_i^0 = \sum_{j=1}^8 c_{ij}(s) V_j = F_i(s, V) \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (3.8)$$

где правая часть для удобства вычислений осталась в терминах V .

Подставляя (3.7) в (2.3) — (2.5), получаем соотношения на стыке, начальные и граничные условия для V^0 . Соотношения на стыке и начальные условия отличаются только нуликами у V , а граничные условия принимают вид

$$(V_1^0 + V_6^0)_0 = v^0 \cos \alpha_0, \quad (V_2^0 + V_5^0)_0 = 0$$



Фиг. 3

$$(V_3^0 + V_4^0)_0 = -v^0 \sin \alpha_0, \quad v^0 = \frac{1}{m} \left(\int_0^t F^0 dt + f^0(t) \right)$$

$$F^0 = (V_6^0 - V_1^0)_0 \cos \alpha_0 - (V_4^0 - V_3^0)_0 c_{2-} \sin \alpha_0, \quad f^0(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (3.9)$$

$$f(t) = [f_{6-}(t-1) - f_{1-}(t)] \cos \alpha_0 - [f_{4-}(t-1/c_{2-}) - f_{3-}(t)] c_{2-} \sin \alpha_0$$

Из нулевых начальных условий следует $V^0=0$, $t-1-(s-1)/c_1 \leq 0$.

4. Алгоритм. Систему (3.8) будем интегрировать вдоль характеристик методом предиктор-корректор второго порядка точности. Область решения $t-1-(s-1)/c_1 > 0$ покрывается сеткой характеристик C_1-C_2 , C_5-C_6 . На фиг. 2 показана сетка вблизи прямой $s=1$. Ячейка сетки слева от прямой $s=1$ имеет форму квадрата, справа - форму ромба (квадрата в частном случае $c_{1+}=1$). Штриховой линией показаны характеристики C_3 , C_4 , C_7-C_8 .

Интегрируем по наклонным слоям узловых точек P_i^j (j - номер слоя, i - номер точки). Заметим, что узловые точки, лежащие на прямой $s=1$, двойные. Обозначим $(V^{\sim})_i^j$, $(V^0)_i^j$ - предварительное и окончательное значения вектора V^0 в точке P_i^j , $(F^{\sim})_i^j = F(s_i, (V^{\sim})_i^j)$, $(F)_i^j = F(s_i, (V)_i^j)$. В узловых точках нулевого слоя имеем $(V^0)_i^0 = 0$ ($i=0, 1, 2, \dots$). Зная V^0 на $(j-1)$ -м слое, построим алгоритм вычисления V^0 на j -м слое, где к началу вычислений уже известны компоненты

$$(V_{5,6,7,8}^{\sim})_i^j (i \neq I), (V_{7,8}^{\sim})_I^j.$$

Во внутренней точке P_i^j ($i \neq I, I+1$) к началу вычислений известны все компоненты вектора V^{\sim} , кроме $V_{3,4}^{\sim}$, которые вычисляем по формулам

Эйлера

$$(V_3^0)_{i-0}^j = (V_3^0)_{i-0}^{j-1+\theta} + \tau' (F_3)_{i-0}^{j-1+\theta}, \quad (V_4^0)_{i+0}^j = (V_4^0)_{i+0}^{j-1} + \tau' (F_4)_{i+0}^{j-1}$$

$$\tau' = \tau(1-\theta/2), \quad \theta = 2c_2/(c_1+c_2), \quad 0 < \theta < 1$$

где $(V^0)_{i-0}^{j-1+\theta}$, $(V^0)_{i+0}^{j-1}$ вычисляем линейной интерполяцией на отрезках $P_i^{j-1} P_{i-1}^j, P_i^{j-1} P_{i+1}^{j-1}$ соответственно. Определив V^0 , уточняем его по формулам

$$(V_{1,2}^0)_i^j = \frac{1}{2} \left[(V_{1,2}^0)_{i-1}^j + (V_{1,2}^0)_i^j + \frac{\tau}{2} (F_{1,2}^0)_i^j \right]$$

$$(V_3^0)_i^j = \frac{1}{2} \left[(V_3^0)_{i-0}^{j-1+\theta} + (V_3^0)_i^j + \tau' (F_3^0)_i^j \right]$$

$$(V_4^0)_i^j = \frac{1}{2} \left[(V_4^0)_{i+0}^{j-1} + (V_4^0)_i^j + \tau' (F_4^0)_i^j \right]$$

$$(V_{5,6}^0)_i^j = \frac{1}{2} \left[(V_{5,6}^0)_{i+1}^{j-1} + (V_{5,6}^0)_i^j + \frac{\tau}{2} (F_{5,6}^0)_i^j \right]$$

$$(V_{7,8}^0)_i^j = \frac{1}{2} \left[(V_{7,8}^0)_i^{j-1} + (V_{7,8}^0)_i^j + \tau (F_{7,8}^0)_i^j \right]$$

Найдя V^0 , вычисляем по формулам Эйлера компоненты

$$(V_{1,2}^0)_{i+1}^j = (V_{1,2}^0)_i^j + \frac{\tau}{2} (F_{1,2}^0)_i^j$$

$$(V_{5,6}^0)_{i-1}^{j+1} = (V_{5,6}^0)_i^j + \frac{\tau}{2} (F_{5,6}^0)_i^j$$

$$(V_{7,8}^0)_{i+1}^{j+1} = (V_{7,8}^0)_i^j + \tau (F_{7,8}^0)_i^j$$

и переходим к следующей точке P_{i+1}^j .

В граничной точке P_0^j формулы для вычисления $V_{1,2,3}^0$ другие. Выводим их из граничных условий (3.9), откуда сначала получаем

$$(V_1^0 + V_6^0)_0^j - (V_1^0 + V_6^0)_0^{j-1} = \Delta v^0 \cos \alpha_0$$

$$(V_3^0 + V_4^0)_0^j - (V_3^0 + V_4^0)_0^{j-1} = -\Delta v^0 \sin \alpha_0$$

$$\Delta v^0 = \frac{1}{m} \left(\int_{t^{j-1}}^{t^j} F^0 dt + \Delta f^0 \right), \quad \Delta f^0 = f^0(t^j) - f^0(t^{j-1}) \quad t^j = j\tau, \quad (V_2^0 + V_5^0)_0^j = 0$$

Вычисляя интеграл по формуле трапеций $[F^0(t^j) + F^0(t^{j-1})] \tau/2$ и решая полученную алгебраическую систему относительно $(V_{1,3}^0)_0^j$, окончательно будем иметь

$$(V_1^0)_0^j = (V_6^0)_0^{j-1} + k_1 p + k_3 q + k_5 \Delta f^0, \quad (V_2^0)_0^j = -(V_5^0)_0^j$$

$$(V_3^0)_0^j = (V_4^0)_0^{j-1} + k_2 p + k_4 q + k_6 \Delta f^0$$

$$p = (V_1^0)_0^{j-1} - (V_6^0)_0^j, \quad q = (V_3^0)_0^{j-1} - (V_4^0)_0^j$$

$$k_1 = \frac{1 + (c_2 - \sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0) \tau / 2m}{\Delta}, \quad k_2 = \frac{\tau \sin 2\alpha_0}{2m\Delta}, \quad k_3 = c_2 - k_2$$

$$k_4 = \frac{1 + (\cos^2 \alpha_0 - c_2 - \sin^2 \alpha_0) \tau / 2m}{\Delta}, \quad k_5 = \frac{\cos \alpha_0}{m\Delta}, \quad k_6 = -\frac{\sin \alpha_0}{m\Delta}$$

$$- \Delta = 1 + (\cos^2 \alpha_0 + c_2 - \sin^2 \alpha_0) \tau / 2m$$

В двойной точке $P_I^i - P_{I+1}^j$ соотношения на стыке (2.3) дают формулы для вычисления $(V_{1,2,3}^0)^j_{I+1}$, $(V_{4,5,6}^0)^j_I$.

5. Численные результаты. Рассмотрим оболочку, состоящую из конической оболочки $0 \leq s \leq 1$ с параметрами $\alpha = 30^\circ$, $r_0 = 0,5$, $h = 0,00577$ и полубесконечной цилиндрической оболочки $1 \leq s < \infty$ с параметрами $r_1 = 1$, $h = 0,00577$. Обе оболочки сделаны из одинакового материала с параметрами $\rho = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0,55$, $\nu = 0,3$. Масса тела $m = 1$, начальная осевая скорость тела $v_0 = 1$. На фиг. 3 построены профили волн в моменты времени $t = 0,5, 1,5$, полученные при $\tau = 0,01$ (кривые 1, 2 соответствуют v_s, v_z , а кривые 3-5 соответствуют Q, N_ϕ, N_s).

При $t = 0,5$ имеем волны сжатия, сдвига и изгиба, распространяющиеся по конической оболочке от нагруженного торца. Волны сжатия и сдвига разрывны. Направление движения разрывов показано стрелочками. Скорость и усилия на фронте волны сжатия определяются по формулам: $v_s = -N_s = (r_0/r)^{1/2} v_0 \cos \alpha$, $N_\phi = \nu N_s$, $s = t < 1$.

Точка $s = 0,13$, в которой нормальная скорость v_z меняет знак, является вершиной изгибающей полуволны, обращенной выпуклостью наружу.

При $t = 1,5$ имеем отраженные и преломленные волны, распространяющиеся от стыка. Скорость и усилия на фронте преломленной волны сжатия, распространяющейся по цилиндрической оболочке, таковы: $v_s = -N_s = k_{11} (r_0/r_1)^{1/2} v_0 \cos \alpha$, $N_\phi = \nu N_s$, $s = t > 1$.

В данном случае коэффициент преломления $k_{11} = 0,847$. Изгибающий момент M_s имеет максимум на стыке. Почти вся коническая оболочка находится под действием растягивающего окружного усилия N_ϕ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Mortimer R. W., Rose J. L., Blum A. Longitudinal impact of cylindrical shells with discontinuous cross-sectional area.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, v. 39, No. 4, p. 1005. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1972, т. 39, № 4, с. 149.)
2. Rose J. L., Mortimer R. W., Blum A. Elastic-wave propagation in a joined cylindrical-conical-cylindrical shell.— Exptl Mech., 1973, v. 13, No. 4, p. 150.
3. Малышев А. П., Паничкин В. И. Одномерные переходные процессы в оболочечной конструкции при импульсном нагружении.— В кн.: Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 2. Тбилиси: Медниереба, 1975, с. 282.
4. Yu. Y.-Y. On linear equations of isotropic elastic plates and shells.— J. Franklin Inst., 1965, v. 280, No. 5, p. 395.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

Поступила в редакцию
11.X.1978