

УДК 624.07:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОСЫ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

ПАЛЬМОВ В. А., ПУШЫРЕВ В. А.

(Ленинград)

Рассматривается задача теории упругой устойчивости, в которой смежные формы равновесия упругой системы обязаны удовлетворять некоторым кинематическим ограничениям не только в местах крепления системы, но и в пролете. Простейшая из задач указанного типа — продольно сжатый стержень, вставленный с зазором в жесткую неподвижную трубку [1]. Важный класс контактных задач возникает при анализе устойчивости гибких упругих систем, прижатых к жесткому основанию поперечной нагрузкой. Одна из таких задач подробно рассмотрена в [2], а другая — в [4, 3].

1. Рассмотрим опертый по концам прямой стержень, сжатый продольной силой P и прижатый к жесткому плоскому основанию равномерной поперечной нагрузкой q . В [1] утверждается, что «стержень всегда устойчив в малом, но при достаточно большой силе P — неустойчив в большом». Фактическому построению отличных от прямолинейной формы равновесия стержня посвящена работа [4], где предполагалось, что поперечная нагрузка приложена к стержню в вертикальной плоскости симметрии сечения стержня.

Рассмотрим более сложную задачу. Допустим теперь, что поперечная нагрузка приложена к стержню эксцентрично, как это показано на фиг. 1, а. Кроме того, примем, что стержень имеет прямоугольное сечение с шириной b и толщиной h .

Деформированное состояние стержня описывается системой уравнений

$$w^{IV} + \alpha^2 w'' = \frac{q_R - q}{EJ}, \quad \gamma'' = \frac{q_R - q}{2C} b \quad \left(\alpha^2 = \frac{P}{EJ} \right) \quad (1.1)$$

в которой w — прогиб центра сечения стержня, γ — угол поворота сечения, C — жесткость стержня на кручение.

Полагаем, что на концах стержня расположены шарниры с горизонтальными осями; поэтому граничные условия имеют вид

$$w = w'' = \gamma = 0 \quad \text{при } x = 0, 2L \quad (1.2)$$

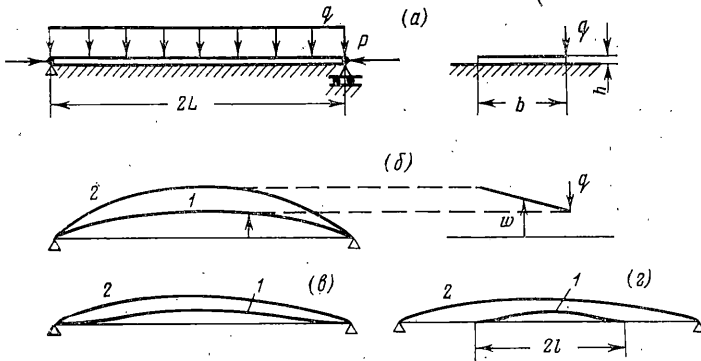
Специфика контактной задачи предписывает наложить дополнительные условия на прогиб и реакцию основания ($0 < x < 2L$):

$$w - \gamma b/2 > 0, \quad q_R = 0 \quad (1.3.1)$$

$$w - \gamma b/2 = 0, \quad q_R \geq 0 \quad (1.3.2)$$

причем $w - \gamma b/2$ — прогиб нагруженного ребра стержня (кривые 1 на фиг. 1).

Первое из условий (1.3) — условие непроницаемости жесткого основания, второе — условие неотрицательности реакции основания при контакте с ним стержня. При написании условий (1.3) принималось очевидным,



Фиг. 1

что незагруженное ребро стержня не может контактировать с основанием (кривые 2 на фиг. 1 соответствуют прогибу незагруженного ребра).

Пусть контакт стержня с основанием отсутствует во всем пролете. Тогда решение граничной задачи (1.1), (1.2) окажется таким:

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^4} \left[1 - \frac{\cos \alpha(L-x)}{\cos \alpha L} + \frac{\alpha^2}{2} x(2L-x) \right]$$

$$\gamma = qbx(2L-x)/(4C) \quad (1.4)$$

Необходимым условием выполнения (1.3.1) является требование неотрицательности производной от $w - \gamma b/2$ на левой опоре, которое приводит к неравенству

$$1 - \operatorname{tg} \alpha L / (\alpha L) - \varphi (\alpha L)^2 > 0, \quad \varphi = EJb^2 / (4C) \quad (1.5)$$

Наименьшие положительные значения αL , при которых оно выполняется, попадают в интервал

$$\pi/2 < \alpha L \leq n \quad (1.6)$$

где n — наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} n = n(1 - \varphi n^2) \quad (1.7)$$

Прямые вычисления показывают, что при выполнении (1.6) условие непроницаемости основания выполняется на всей длине стержня, так что решение (1.4) действительно описывает форму равновесия стержня в данной контактной задаче.

Максимальное значение прогиба для рассмотренной формы равновесия достигается в середине незагруженного ребра стержня и имеет выражение

$$w_m = w_0 \left\{ \frac{1}{(\alpha L)^4} \left[1 - \frac{(\alpha L)^2}{2} \frac{1}{\cos \alpha L} \right] + \varphi \right\}, \quad w_0 = \frac{qL^4}{EJ} \quad (1.8)$$

При помощи (1.1) легко найти следующее представление силы P через αL :

$$P = P_* (2\alpha L/\pi)^2, \quad P_* = (\pi/2)^2 (EJ/L^2) \quad (1.9)$$

График зависимости w_m от P ($\kappa_1 = \ln(w_m/w_0)$, $\kappa_2 = \ln(P/P_*)$) по (1.8), (1.9) представлен на фиг. 2 (линия QK). Из фиг. 2 видно, что формы равновесия, отличные от прямолинейной, появляются при $P > P_*$ и что бесконечно близких к прямолинейной форм равновесия нет.

2. Типичная форма нагруженного ребра показана на фиг. 1, б. Верхнему концу интервала (1.6) соответствует форма равновесия с нулевым значением производной на краях (фиг. 1, в).

Естественно допустить, что при $\alpha L > n$ форма равновесия (1.4) перейдет в изображенную на фиг. 1, г: в средней части стержня имеется участок отрыва нагруженного ребра стержня от основания, а по краям — зоны контакта. В зоне контакта справедливо уравнение контакта

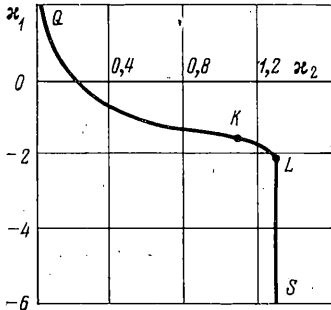
$$w = \gamma b/2, \quad q_R \neq 0 \quad (2.1)$$

Исключая опорную реакцию из (1.1) и выражая γ через w по (2.1), приходим к уравнению ($0 < x < L-l$):

$$w^{IV} + \beta^2 w'' = 0, \quad \beta^2 = \alpha^2 - 1/\varphi \quad (2.2)$$

Учитывая граничные условия на левой опоре (1.2), найдем ($0 \leq x \leq L-l$):

$$w_1 = A \frac{\sin \beta x}{\cos \beta (L-l)} + Bx, \quad \gamma_1 = \frac{2}{b} w \quad (2.3)$$



Фиг. 2

На участке отрыва решение системы (1.1)

ищем в форме, подобной (1.4):

$$w = \frac{q(1+K)}{EJ\alpha^4} \left[1 - \frac{\cos \alpha (l-x_1)}{\cos \alpha l} \right] + \frac{qx_1(2l-x_1)}{EJ\alpha^2} + F \quad (2.4)$$

$$\gamma = qb x_1 (2l-x_1) / (4C) + D, \quad x_1 = x - (L-l)$$

где A, B, K, F и D — постоянные интегрирования.

Приводим условия сопряжения левого участка контакта с участком отрыва:

$$w - \gamma y = w_1 - \gamma_1 y, \quad w' - \gamma' y = w_1' - \gamma_1' y$$

$$w'' = w_1'', \quad \gamma' - \gamma_1' = \frac{Rb}{2C}, \quad w^{III} - w_1^{III} = \frac{R}{EJ}$$

Первые два условия — условия непрерывности прогиба $w - \gamma y$ и его производной по x для произвольной точки сечения с координатой y , отсчитываемой в горизонтальной плоскости ($-b/2 < y < b/2$); все последующие — условия сопряжения по изгибающему и крутящему моментам и перерезывающей силе с учетом возможного появления сосредоточенной реакции основания R .

В силу произвольности y из первой строчки получаем условие непрерывности w, γ и их производных, и тогда условия сопряжения принимают вид

$$x = L-l, \quad x_1 = 0$$

$$w = w_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad w' = w_1', \quad \gamma' = \gamma_1', \quad w'' = w_1'', \quad w^{III} = w_1^{III} \quad (2.5)$$

Следует обратить внимание на то, что сосредоточенная реакция основания R оказалась равной нулю.

Внося в (2.5) представления (2.3), (2.4), приходим к системе уравнений для определения постоянных интегрирования

$$A \operatorname{tg} \beta (L-l) + B(L-l) = F, \quad A\beta + B = -\frac{q(1+K)}{EJ\alpha^4} \alpha \operatorname{tg} \alpha L + \frac{ql}{EJ\alpha^2}$$

$$-A\beta^2 \operatorname{tg} \beta (L-l) = K \frac{q}{EJ\alpha^2}, \quad -A\beta^3 = \frac{q(1+K)}{EJ\alpha^4} \alpha^3 \operatorname{tg} \alpha l \quad (2.6)$$

$$A \operatorname{tg} \beta (L-l) + B(L-l) = \frac{BD}{2}, \quad A\beta + B = \frac{qb^2l}{4C}$$

Исключая из третьего и четвертого уравнений A , найдем постоянную K :

$$K = \alpha \operatorname{tg} \alpha l / [\beta \operatorname{ctg} \beta (L-l) - \alpha \operatorname{tg} \alpha l] \quad (2.7)$$

С помощью второго и шестого уравнений получаем еще одно уравнение для K :

$$1 - (K+1) \operatorname{tg} \alpha l / \alpha l = \varphi (\alpha L)^2 \quad (2.8)$$

Внося в него K по (2.7), приходим к следующему уравнению для определения l :

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha l}{\alpha} - \frac{\operatorname{tg} \beta (L-l)}{\beta} = -\frac{1}{\alpha^2 \beta^2 L^2 l \varphi} \quad (2.9)$$

Значения остальных постоянных интегрирования оказались такими:

$$A = \frac{qL^2 l \varphi}{EJ\beta}, \quad B = 0, \quad F = \frac{bD}{2} = \frac{qL^2 l \varphi}{EJ\beta} \operatorname{tg} \beta (L-l) \quad (2.10)$$

В результате перемещения и повороты принимают вид

$$w_1 = \frac{w_0 l \varphi}{\beta L^2} \frac{\sin \beta x}{\cos \beta (L-l)}, \quad \gamma_1 = \frac{2}{b} w_1 \quad (0 \leq x \leq L-l) \quad (2.11)$$

$$w = w_0 \left\{ -\frac{\beta^2 l \varphi}{\alpha^3 \operatorname{tg} \alpha l} \left[1 - \frac{\cos \alpha (l-x_1)}{\cos \alpha l} \right] + \frac{\alpha^2 x_1}{2} (2l-x_1) + \frac{l \varphi}{\beta L^2} \operatorname{tg} \beta (L-l) \right\} \quad (2.12)$$

$$\gamma = \frac{2w_0 \varphi}{bL^2} \left[\frac{1}{2} x_1 (2l-x_1) + \frac{l}{\beta} \operatorname{tg} \beta (L-l) \right] \\ (L-l \leq x \leq L, \quad 0 \leq x_1 \leq l)$$

Максимальное значение прогиба достигается в середине незагруженного ребра стержня и имеет выражение

$$w_m = w_0 \left[\frac{\beta^2 l \varphi}{\alpha^3} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} + \frac{(\alpha l)^2}{2} + \frac{\varphi l^2}{2L^2} + \frac{2l \varphi}{\beta L^2} \operatorname{tg} \beta (L-l) \right] \quad (2.13)$$

Очевидно, что в процессе увеличения сжимающей силы длина участка отрыва $2l$ уменьшается. При $l \rightarrow 0$ из (2.9) находим $\beta L \rightarrow \pi/2$, $\alpha L \rightarrow (\pi^2/4 + 1/\varphi)^{1/2}$.

Таким образом, решение (2.9), (2.11), (2.12) справедливо в интервале значений

$$n \leq \alpha L \leq (\pi^2/4 + 1/\varphi)^{1/2} \quad (2.14)$$

График зависимости w_m от P по (1.9), (2.14) представлен на фиг. 2 линией KL .

3. Верхней границе интервала (2.14), как уже указывалось, соответствует форма равновесия с полным контактом нагруженного ребра стержня с основанием. В этом случае условие контакта (2.1) выполняется во всем пролете; следовательно, во всем пролете справедливо уравнение (2.2). Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.2), имеет вид (Λ — значение пока произвольное)

$$w = \Lambda \sin \beta x, \quad \beta L = \pi/2 \quad (3.1)$$

При помощи (3.1), (2.1) и (1.2) нетрудно найти опорную реакцию $q_n = q - \Lambda \beta^2 4C \sin \beta x / b^2$.

Условие контакта (1.3) предписывает неотрицательность q_n . Поэтому $\Lambda \leq qb^2 / (4C\beta^2)$. Максимальный прогиб на незагруженном ребре стержня имеет значение

$$w_m = (w + 1/2 \gamma b)_{x=L} = 2\Lambda$$

Учитывая неравенство для Λ , находим

$$0 \leq w_m \leq 2w_0 \varphi / (\beta^2 L^2) \quad (3.2)$$

Заметим, что верхняя граница для максимума прогиба совпадает с пределом выражения (2.13) при $l \rightarrow 0$.

Рассмотренному виду форм равновесия соответствует следующее значение продольной силы:

$$P_{**} = P_* \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{4CL^2}{EJb^2} \right]$$

Это предельно допустимая сжимающая сила. При $P = P_{**}$ появились формы равновесия, бесконечно близкие к прямолинейной.

Зависимость w_m от P по (1.9), (3.2) показана графически на фиг. 2 в виде луча LS . Результаты расчетов на фиг. 2 выполнены для следующего значения параметра стержня:

$\varphi/L^2 = 0,156$. В этом частном примере $P_{**} = 3,59P_*$, что намного больше значения по Эйлеру.

Из проведенного анализа следует, что при $P < P_*$ существует только одна прямолинейная форма и она устойчива. При $P_* < P < P_{**}$ построенная на фиг. 2 кривая QKL соответствует формам равновесия, неустойчивым в малом. Прямолинейная же форма равновесия в этом диапазоне P устойчива в малом. Эти два тезиса позволяют сделать следующие выводы.

Если зафиксировать силу $P (P_* < P < P_{**})$ и отогнуть стержень на расстояние, меньшее, чем до кривой QKL , и затем отпустить, то возникнет динамический процесс, который в конце концов приведет стержень к устойчивой прямолинейной форме. Если же максимальное значение начального прогиба окажется больше, чем определено кривой QKL , то динамический процесс, возможно, приведет к неограниченному росту поперечного прогиба.

Таким образом, кривая QKL определяет диапазон возможных значений начального отклонения стержня от прямолинейной формы, при которых он возвращается к прямолинейной форме. В этом смысл кривой QKL . Далее, при $P = P_{**}$ появляются формы, бесконечно близкие к прямолинейной, так что при дальнейшем увеличении продольной силы прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1969. 473 с.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970. 544 с.
4. Туренко И. И., Харлаб В. Д. Об устойчивости балки, лежащей на жестком основании. — Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1975, № 113, с. 128.

Поступила в редакцию
4.IX.1979