

УДК 539.3:534.1

**УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ**

**ВОРОВИЧ И. И., МИНАКОВА Н. И., КАЛОМБЕТ П. П.**

(Ростов-на-Дону)

А. А. Ильюшиным [1] внесен существенный вклад в развитие проблемы устойчивости неупругих тонкостенных конструкций. Им впервые были сформулированы краевые задачи устойчивости пластин и оболочек на основе теории малых упруго-пластических деформаций и исследованы многие конкретные случаи. Эти работы вызвали большой интерес к проблеме устойчивости неупругих пластин и оболочек, в частности вязкоупругих. Ранее [2] авторы подробно изучили разные постановки задач устойчивости вязкоупругих оболочек. В данной статье изучается устойчивость вязкоупругих оболочек при переменной нагрузке на основе критерия  $a'(t_*) = \infty$ , т. е. критерия обращения скорости в бесконечность.

Как показано в [2], истинный смысл этого критерия заключается в том, что для малоинерционных систем в районе  $t=t_*$  имеют место весьма большие скорости и ускорения, что и воспринимается в эксперименте как хлопок. Такие оболочки являются малоинерционными системами, к которым вполне применимы указанные соображения. Очевидно,  $t_*$  есть некоторый функционал нагрузки  $P(t)$ . Указанный функционал исследуется на частных траекториях нагружения.

1. Рассмотрим вязкоупругую сферическую оболочку, материал которой описывается соотношением [3]:

$$\left( a_0 \frac{d}{dt} + a_1 \right) \sigma = \left( b_0 \frac{d}{dt} + b_1 \right) \varepsilon \tag{1.1}$$

Кроме того, будем предполагать отсутствие объемной ползучести. Соотношению (1.1) придадим вид

$$(p+1)\sigma = E_0(p+\delta)\varepsilon \tag{1.2}$$

где  $p$  — оператор дифференцирования по безразмерному времени  $\tau$ ,  $E_0$ ,  $\sigma$  — некоторые константы.

Из (1.1) — (1.2) имеем  $\tau = a_1 t$ ,  $E_0 = b_0 / (a_0 a_1)$ ,  $\delta = b_1 / a_1$ . Из условия отсутствия объемной ползучести получим  $\nu = \nu_0(p+\delta)/(1+\delta)$ . В частности, для оргстекла:  $E_0 = 0,4516 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu_0 = 0,341$ ,  $a_1 = 9,76$  с<sup>-1</sup>,  $\delta = 1,07$ .

Для пологой оболочки напряженно-деформированное состояние описывается системой [4]:

$$\begin{aligned} (p+1)L\Phi &= -(p+\beta)x^{1/2}\vartheta^2 + x\vartheta \\ (p+1)(p+\delta)L\vartheta &= (p^2 + b_1 p + b_2)x\Phi(x+\vartheta) + \\ &+ \frac{1}{2}x^3(p^2 + b_1 p + b_2)p(\tau), \quad L \equiv x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \\ x &= \lambda \frac{r}{a}, \quad \lambda = 2[3(1-\nu_0^2)]^{1/2} \left( \frac{H}{h} \right)^{1/2}, \quad \vartheta = \frac{\lambda a}{2H} \frac{\partial W}{\partial r} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\Phi = \frac{12(1-\nu_0^2)}{\lambda E h^3} a \psi, \quad b_1 = \frac{2(1-\delta\nu_0^2)}{(1-\nu_0^2)}, \quad b_2 = \frac{1-\delta^2\nu_0^2}{1-\nu_0^2}$$

где  $H$  — подъем оболочки,  $h$  — ее толщина,  $\psi$  — функция напряжений,  $W$  — прогиб.

Для примера предположим, что оболочка жестко закреплена по краю и, следовательно, выполнены условия

$$\begin{aligned} \vartheta=0, \quad W=0, \quad (p+1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \nu_0 \frac{(p+\delta)}{x} \Phi=0 \\ x=\lambda, \quad \vartheta=0, \quad \Phi=0, \quad x=0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Безразмерный параметр нагрузки определяется соотношением  $p(\tau) = 4q(t)/q_0$ ,  $q_0 = 32E_0 H^3 h a^4 / \lambda^2$ .

После определения  $\vartheta$ ,  $\psi$  из (1.1), (1.2) прогиб  $W$  в центре находится из формулы

$$W(0, \tau) = - \int_0^\lambda \vartheta(x, \tau) dx \quad (1.5)$$

Интегрирование системы (1.3) требует использования начальных данных. В принципе их можно принять в следующем виде:

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0(x), \quad \Phi|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad \dot{\vartheta}|_{t=0} = \dot{\vartheta}_0(x), \quad \dot{\Phi}|_{t=0} = \dot{\Phi}_0(x) \quad (1.6)$$

где  $\vartheta_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $\dot{\vartheta}_0$ ,  $\dot{\Phi}_0$  — любые достаточно гладкие функции, удовлетворяющие (1.3).

Однако более рационально выбрать начальные данные после решения следующих краевых задач [3]:

$$\begin{aligned} L\vartheta_0 = -x\vartheta_0(x + \frac{1}{2}\vartheta_0), \quad L\Phi_0 = x\Phi_0(x + \vartheta_0) + p(0)x^3/2 \\ \Phi(\lambda, 0) = 0, \quad \vartheta(\lambda, 0) = 0, \quad \Phi(0, 0) = 0, \quad \vartheta(0, 0) = 0 \\ L\dot{\vartheta}_0 = -x\dot{\vartheta}_0(x + \vartheta_0), \quad L\dot{\Phi}_0 = x\dot{\Phi}_0(x + \vartheta_0) = \dot{\Phi}_0(x + \vartheta_0) - d\dot{\Phi}_0 x(x + \vartheta_0) + \\ + \frac{p(0)\gamma^2(\gamma-d)}{2}, \quad d = \frac{\gamma\nu_0(1-2\nu_0)}{1-\nu_0^2} \\ \dot{\vartheta}_0(\lambda, 0) = 0, \quad \dot{\Phi}_0(\lambda, 0) = 0, \quad \dot{\Phi}_0(0, 0) = 0, \quad \dot{\vartheta}_0(0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Критическое время  $\tau_*$  будем определять из условия

$$dW/d\tau|_{\tau=\tau_*} = \infty \quad (1.8)$$

Нахождение  $\tau_*$  из (1.8) на основе квазистатической краевой задачи (1.3) — (1.7) может показаться не вполне последовательным, так как при выполнении условия (1.8) обращается, вообще говоря, в бесконечность и ускорение системы, которое в квазистатических уравнениях отброшено. Этот вопрос исследован на примере фермы Мизеса в [2], где показано, что для малоинерционных систем в районе  $\tau = \tau_*$  действительно имеет место резкий рост скоростей и ускорений системы, рассчитанной с учетом инерционных членов. Именно в этом и заключается истинный смысл критического времени  $\tau_*$ .

2. Будем решать начально-краевую задачу (1.3) — (1.7) методом сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого перейдем к конечным разностям по пространственным координатам, аппроксимируя производные по  $x$  центральными разностями. В результате получа-

ем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по времени вида

$$(p+1)L_{\Delta}\Phi = -(p+\beta)x_i({}^1/2\vartheta_i+x_i\dot{\vartheta}_i), \quad (p+1)(p+\beta)L_{\Delta}\dot{\vartheta} = \\ = (p^2+b_1p+b_2)x_i\Phi_i(x_i+\vartheta_i)+{}^1/2x_i^3(p^2+b_1p+b_2)p(\tau) \quad (2.1)$$

$$\vartheta_{N+1}=0, W_{N+1}=0, (p+1)\Phi_{N+2} = \frac{2N_0(p+\delta)\Phi_{N+1}}{N} + (p+1)\Phi_N, \vartheta_1=0, \Phi_1=0$$

Для начальных данных имеем

$$L_{\Delta}\Phi_0 = -x_i\dot{\vartheta}_{0i}(x_i+{}^1/2\vartheta_{0i}), \quad L_{\Delta}\dot{\vartheta}_0 = x_i\Phi_{0i}(x_i+\vartheta_{0i})+{}^1/2p_0x_i^3 \\ \Phi_{N+1}=0, \vartheta_{N+1}=0, \Phi_1=0, \vartheta_1=0, L_{\Delta}\Phi_0 = -x_i\dot{\vartheta}_{0i}(x_i+\vartheta_{0i}) \quad (2.2) \\ L_{\Delta}\dot{\vartheta}_0 = x_i\Phi_{0i}\dot{\vartheta}_{0i} + \Phi_{0i}(x_i+\vartheta_{0i}) - d\Phi_{0i}(x_i+\vartheta_{0i})x_i+{}^1/2p(0)\gamma^2(\gamma-d)$$

$$\Phi_{0N+1}=0, \dot{\vartheta}_{0N+1}=0, \Phi_{01}=0, \dot{\vartheta}_{01}=0$$

Оператор  $L_{\Delta}$  определяется соотношением

$$L_{\Delta} \equiv (i-1)(i-1,5) ( )_{i-1} - [2(i-1)^2+1] ( )_i + (i-1)(i-0,5) ( )_{i+1} \quad (2.3)$$

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (2.2), из которой определяются начальные данные, проводилось методом нелинейной релаксации [4]. Численное решение системы второго порядка (2.1) после определения начальных данных выполнялось методом Рунге — Кутты.

Поскольку система (2.1) не разрешена относительно производных, то на каждом шаге они определялись по схеме оптимального исключения.

Численное исследование функционала критических времен производилось для нагрузок вида

$$p(\tau) = p_1 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1) \\ p(\tau) = p + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (p_2 - p_1), \quad (\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2) \quad (2.4) \\ p(\tau) = p_2 \quad (\tau_2 \leq \tau)$$

где  $p_1, p_2, \tau_1, \tau_2$  — постоянные,  $\tau_1 < \tau_2$ .

Была проведена большая серия расчетов при различных  $\lambda, p_1, p_2, \tau_1, \tau_2$ .

3. Перейдем к анализу полученных данных. Отметим, что при переменной нагрузке при разных  $p_1, p_2, \tau_1, \tau_2$  имеют место два типа траекторий деформации оболочки  $W(\tau)$ . Первый тип характеризуется возможностью построения траекторий деформации на всем отрезке времени  $0 \leq \tau \leq \infty$ . При этом дифференциальные уравнения (1.3) — (1.7) и их конечно-разностная аппроксимация (2.1) — (2.4) имеют решения на всем отрезке  $0 \leq \tau \leq \infty$ . Очевидно, таким траекториям нагружения соответствует устойчивая без хлопка работа оболочки. Пример таких траекторий приведен на фиг. 1 ( $\lambda=7, p_1=0,6, p_2=1$ ).

Второй тип траекторий деформаций характеризуется существованием момента времени  $\tau=\tau_*$ , для которого выполнено условие

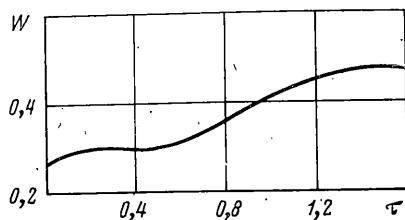
$$dW/d\tau|_{\tau=\tau_*} = \infty \quad (3.1)$$

При этом решение системы (1.3) — (1.7) и (2.1) — (2.4) существует лишь на конечном отрезке времени  $0 \leq \tau \leq \tau_*$ . Траектории деформации этого типа имеют петлеобразный вид, примеры приведены на фиг. 2 (траектория 1 соответствует  $\lambda=3,6, p_1=1, p_2=2,35$ , а траектория 2 —  $\lambda=3,6, p_1=1,5, p_2=2,5$ ). Для них характерно наличие участков с обратным ходом времени.

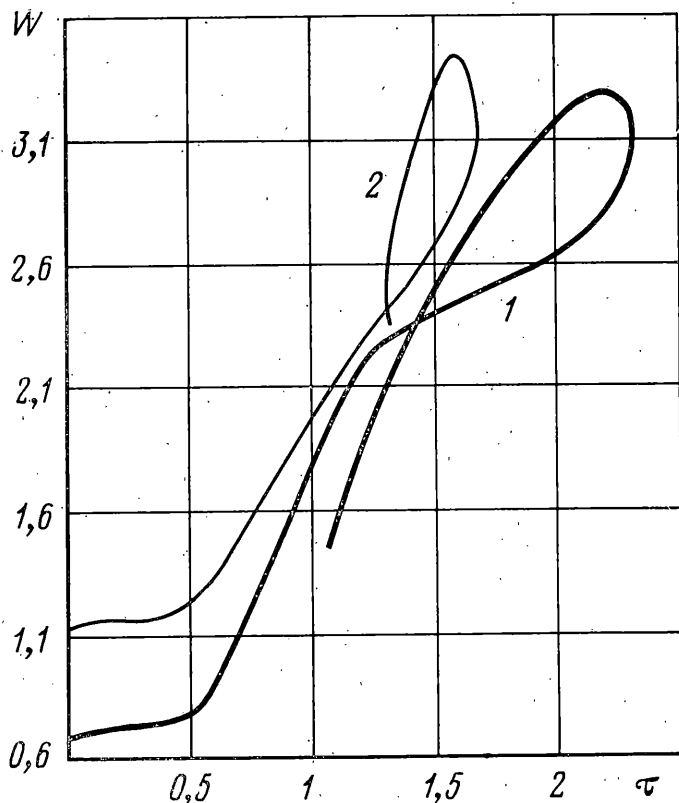
Ранее наличие траекторий двух типов установлено при постоянной нагрузке для оболочки [4] и для фермы Мизеса [2].

Разумеется, что участки траектории деформации оболочки с обратным ходом времени никакого физического смысла не имеют и существенно отличаются от кривых нагружения, построенных в многочисленных работах (например, [5]) для упругих оболочек, так как по последним можно судить о поведении системы при немонотонном поведении нагрузки. Вообще квазистатический подход в окрестности  $\tau = \tau_*$  неприемлем, так как здесь скорости и ускорения системы резко возрастают и их отбрасывание не обосновано. Поэтому нет смысла рассматривать «ветвления» в рамках квазистатического подхода. Как показано для случая модели фермы Мизеса [2], при учете инерционных членов траектории деформации системы с обратным ходом времени естественно исчезают. Лишь только сама величина  $\tau_*$ , определенная на основе квазистатических рассмотрений, сохраняет значение, которое разъясняется на основе динамических соотношений.

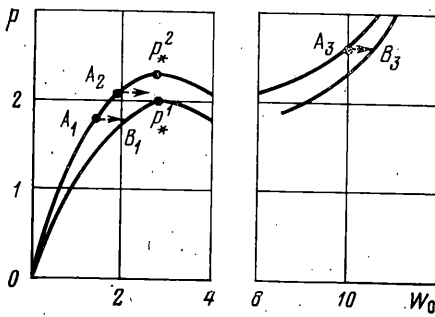
Так можно показать, что если данная система имеет малую инерцию, что характерно для оболочек, то траектории деформации, построенные с учетом инерционных членов, также бывают двух видов: для первого — инерционные члены поправляют квазистатическую траекторию лишь на



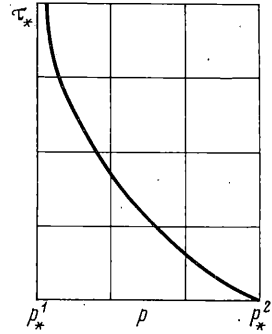
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

некотором начальном участке времени или квазистатические и динамические траектории близки, если инерция мала; для траекторий второго типа имеют место не только исправления на начальном участке, но и резкий рост скоростей и ускорений в некоторой точке  $\tau(m)$ , где  $m$  характеризует инерцию системы. Расчеты показывают, что при  $m \rightarrow 0$   $\tau(m) \rightarrow \tau_*$ . Таким образом значение  $\tau_*$  состоит в том, что для малоинерционных систем при  $\tau \approx \tau_*$  наблюдается резкий рост скоростей и ускорений, что воспринимается как явление хлопка. Это обстоятельство было выявлено для модели фермы Мизеса [2] и подтверждено для оболочек на модели приближений Бубнова — Галеркина.

Выясним условия, при которых возникают траектории того или другого типа для переменной нагрузки.

Анализ расчетов для различных  $p_1, p_2, \tau_1, \tau_2$  дал возможность сделать следующие выводы.

Пусть нагрузка  $p(\tau) \leq p_*^1 - \varepsilon$ , где  $p_*^1$  — верхняя критическая нагрузка для кривой длительных равновесий (фиг. 3), а  $\varepsilon$  — некоторое фиксированное положительное число. В этом случае не существует критического времени и не происходит потери устойчивости ни с упругим, ни с вязкоупругим механизмом.

Пусть далее, начиная с некоторого  $\tau_0$ , имеет место неравенство:  $p_*^1 + \varepsilon \leq p(\tau) < p_*^2$ ,  $\tau \geq \tau_0$ , где  $p_*^2$  — верхняя критическая нагрузка на кривой мгновенных равновесий. В этом случае существует конечное время  $\tau_*$ , которое определяется из условия (3.1). Если нагрузка постоянна, т. е.  $p_1 = p_2 = p$ , то  $\tau_*$  для этой оболочки зависит от  $p$ . График этой зависимости приведен на фиг. 4. Характерно, что  $\tau_*(p_*^1) = \infty$ ,  $\tau_*(p_*^2) = 0$ . Для ориентировочных расчетов критического времени в этом случае можно использовать следующую приближенную формулу:

$$\tau_*(p) = \tau_* \left( \frac{p_*^1 + p_*^2}{2} \right) \frac{p_*^2 - p^1}{p - p_*}$$

Для того чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо провести один раз численное интегрирование данной системы при  $p = 1/2(p_*^1 + p_*^2)$ .

Пусть имеет место условие  $p(0) < p_*^2$  и в некоторый момент времени  $\tau^*$  имеет место соотношение  $p(\tau^*) = p_*^2$ . В этом случае  $\tau_* = \tau^*$ , т. е. вязкоупругий хлопок оболочки практически имеет место в тот момент, когда нагрузка выходит на уровень  $p_*^2$ .

Отметим также, что для заданного вязкоупругого материала, подчиняющегося закону (1.1), с увеличением  $\lambda$  значения  $p_*^1$  и  $p_*^2$  сближаются. Поэтому критическое время практически определяется моментом, когда нагрузка выходит на уровень  $p_*^1$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 282 с.
2. *Ворович И. И., Минакова Н. И., Шепелева В. Г.* Некоторые вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем на примере фермы Мизеса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 120.
3. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 41 с.
4. *Минакова Н. И.* Численное исследование задачи устойчивости пологих сферических вязкоупругих оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 144.
5. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 151 с.

Поступила в редакцию  
16.X.1979