

УДК 531.383

ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМЫЙ ГИРОСКОП В УСЛОВИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ОСНОВАНИЯ

ЗБРУЦКИЙ А. В., ПАВЛОВСКИЙ М. А.

(Киев)

Вопросы теории линейной модели динамически настраиваемого гироскопа, его погрешности, вызванные технологическими отклонениями параметров и ускорениями основания, изложены в [1—5]. Для повышения точности такого гироскопа необходимо исследовать ряд тонких явлений в его динамике. В публикуемой работе выявляются особенности нелинейной модели гироскопа в условиях пространственного движения основания и оцениваются эффекты, возникающие из-за нелинейных факторов в системе, которые обусловлены особенностями кинематики гироскопа, несовершенной упругостью его подвеса, проявляющейся в виде трения гистерезисного типа, конечной изгибной жесткостью и сложным характером деформации торсионов подвеса.

1. Рассмотрим движение симметричного динамически настраиваемого гироскопа (фиг. 1, а), установленного на подвижном основании.

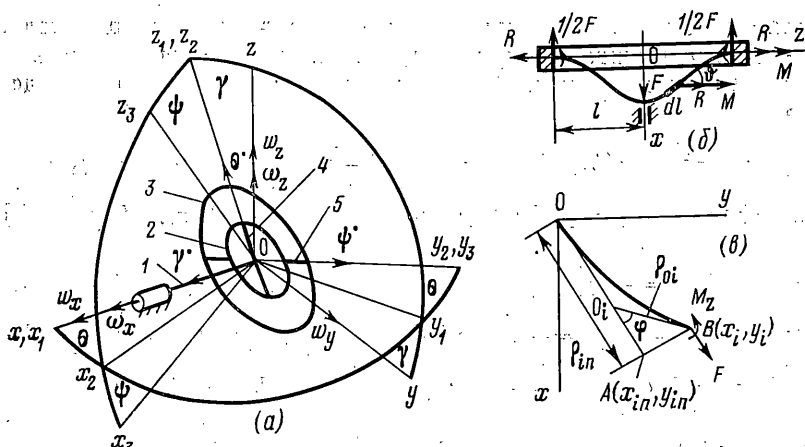
Введем следующие системы координат: $Oxyz$ — неизменно связанная с основанием гироскопа, $Ox_1y_1z_1$ — связанная с валом приводного двигателя 1, $Ox_2y_2z_2$ — с кардановым кольцом 2, $Ox_3y_3z_3$ — с ротором 3.

Обозначим A_i , B_i — полярный и экваториальный моменты инерции, m_i — масса i -го элемента гироскопа ($i=2,3$), c_i ($i=2,3$) — коэффициенты жесткости на кручение, c_{ix} , c_{iy} , c_{iz} , c_{3x} , c_{3y} , c_{3z} — коэффициенты жесткости на изгиб торсионов 4 и 5 вдоль соответствующей оси, c — коэффициент жесткости торсионов на растяжение, E , G — модули упругости первого и второго рода, I — экваториальный, I_0 — полярный моменты инерции сечения торсиона, l , b , h — длина, ширина и толщина его пластины, k_i — коэффициент вязкого внешнего трения i -го тела, γ — угловая скорость собственного вращения вала приводного двигателя, ω_x , ω_z — составляющие угловых скоростей, w — поступательное ускорение основания гироскопа.

Полагая вначале, что упругие элементы торсионов обладают конечной жесткостью на кручение и изгиб и намного большей на растяжение — сжатие, положение элементов гироскопа в системе координат $Ox_1y_1z_1$ зададим шестью обобщенными координатами: x_2 , y_2 — линейные перемещения центра масс кольца в системе координат $Ox_1y_1z_1$, x_3 , z_3 — линейные перемещения центра масс ротора в системе координат $Ox_2y_2z_2$, θ , ψ — угловые перемещения кольца и ротора [6].

Учитывая, что жесткости кольца и ротора превышают жесткость подвеса, поступательные перемещения центров масс элементов гироскопа будут обусловлены в основном прогибами упругих элементов торсионов. Возникающие при этом, а также вследствие вращения с угловой скоростью γ растягивающие силы и нормальные напряжения в торсионах увеличивают жесткость последних на кручение [7]. Кривая изгиба торсионов ротора и кольца по аналогии с кривой изгиба балки с жестко закрепленными краями при действии приложенной в середине пролета перпендикулярно к ее оси силы может быть описана уравнением [8]:

$$x = \frac{1}{2} f (\cos \pi l^{-1} z + 1) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

где величина прогиба f представляет собой поступательное перемещение центра масс соответствующего элемента. Угол закручивания элемента dl торсиона, составляющего с осью z угол θ и находящегося под действием крутящего момента M и растягивающей силы R (фиг. 1, б), равен

$$d\varphi = M[(GI_0 + RD)^{-1} \cos^2 \theta + (EI)^{-1} \sin^2 \theta] dl, \quad R = cf^2 \pi^2 (16l)^{-1} + \Delta l E b h l^{-1} \quad (1.2)$$

Δl — приращение длины торсиона, равное разности перемещений его крайних точек в радиальном направлении при вращении вала.

Параметр D зависит от вида поперечного сечения упругого элемента торсиона. Для прямоугольного, крестообразного и круглого (диаметра d) сечения D равен соответственно: $1/12 b^2$, $1/6 b^2$ ($b > 10h$), $1/8 d^2$. Интегрирование (1.2) по длине стержня l_c . $l_c = [1 + f^2 \pi^2 (16l^2)^{-1}] l + \Delta l$ дает угол закручивания торсиона φ .

$$\varphi = M(c_i + \Delta c_i + \Delta c_{i0})^{-1}, \quad \Delta c_i = a f^2 \quad (1.3)$$

$$\Delta c_{i0} = 2 \Delta l E b h D l^{-2}, \quad a = \pi^2 [c D - 2 G^2 I_0^2 (E I l)^{-1}] (8 l^2)^{-1} \quad (1.4)$$

Не ограничивая общности задачи, рассмотрим влияние на динамику гироскопа составляющей Δc_i изменения жесткости, а постоянную (при $\gamma = \text{const}$) составляющую Δc_{i0} , оцененную в [9], учтем в жесткости недеформированного торсиона c_i .

Сложный характер деформации торсиона (изгиб с кручением) обусловлен одновременным действием крутящего момента M_z и изгибающей силы F (фиг. 1, б) в условиях пространственного движения основания. Отметим, что при $M_z = 0$ имеем $\rho_{in}(x_{in}, y_{in}) = \rho_i$ ($i = 2, 3$), где ρ_{in} — радиус-вектор перемещения центров масс под действием силы вследствие прогибов торсионов, а ρ_i характеризует положение центров масс в соответствующей системе координат.

Несовершенную упругость подвеса гироскопа и трение в элементах его крепления, которые имеют характер трения гистерезисного типа, выразим функцией [10]:

$$\Phi^\pm(\varphi) = \mp \frac{\nu}{n} [(\varphi_0 + \varphi)^n - 2^{n-1} \varphi_0^n] \quad (1.5)$$

где φ_0 — амплитуда циклической деформации, ν , n — постоянные величины, определяемые экспериментально.

Ограничиваясь рассмотрением движения гироскопа вблизи положения равновесия и удерживая величины до третьего порядка относительно координат и их производных, уравнения его движения можно представить в форме

$$\psi'' + b_{12}\theta' + (b_{13} + b_{14})\psi = \varepsilon f_1, \quad \theta'' - b_{21}\psi' + (b_{22} + b_{23})\theta = \varepsilon f_2 \quad (1.6)$$

$$x_3'' + b_{31}x_3 - b_{32}x_2 = \varepsilon [-2h_3(x_2' + x_3') + 2h_4x_2' - b_{34}\Phi^\pm(x_3) + f_3(x_3, \dots)] \quad (1.7)$$

$$x_2'' + b_{41}x_2 - b_{42}x_3 = -w_{x1} + \varepsilon [-2h_4x_2' - b_{41}\Phi^\pm(x_2) + b_{42}\Phi^\pm(x_3) + f_4(x_2, \theta, \dots)]$$

$$z_3'' + b_{51}y_2' + (b_{52} - b_{53})z_3 = -w_{z1} + \varepsilon [-2h_3z_3' - b_{52}\Phi^\pm(z_3) + f_5(z_3, \psi, \dots)] \quad (1.8)$$

$$y_2'' - b_{61}z_3' + (b_{62} - b_{63})y_2 = -w_{y1} + \varepsilon [-2h_5y_2' - b_{62}\Phi^\pm(y_2) + f_6(y_2, \dots)] \quad (1.9)$$

Здесь ε — положительный параметр, введенный аналогично работе [11] и отражающий малость членов, записанных в правых частях уравнений

$$\begin{aligned} b_{12} &= \gamma(A_3 - 2B_3)B_3^{-1}, \quad b_{13} = (A_3 - B_3)B_3^{-1}\gamma^2, \quad b_{14} = b_{140} + b_{14+} \\ b_{15} &= A_3B_3^{-1}, \quad b_{16} = (A_3 - B_3)B_3^{-1}, \quad b_{17} = (A_3 - 2B_3)B_3^{-1}, \quad b_{18} = m_3B_3^{-1} \\ q &= (B_2 + B_3)^{-1}, \quad b_{21} = q\gamma(A_3 - 2B_3), \quad b_{22} = q\gamma^2(A_2 + A_3 - B_2 - B_3) \\ b_{23} &= b_{230} + b_{23+}, \quad b_{24} = q(A_2 + A_3), \quad b_{25} = q(A_2 + A_3 - B_2 - B_3), \quad b_{26} = q(A_3 - B_3) \\ b_{27} &= q(A_3 - 2B_3), \quad b_{28} = m_2q, \quad b_{140} = c_3B_3^{-1}, \quad b_{230} = c_2q, \quad b_{14+} = a(x_3^2 + z_3^2)B_3^{-1} \\ b_{23+} &= aq(x_2^2 + y_2^2), \quad b_{31} = c_{5x}m_3^{-1} + c_{5x}m_2^{-1}, \quad b_{32} = b_{41} = c_{4x}m_2^{-1} \\ b_{42} &= c_{5x}m_2^{-1}, \quad b_{51} = 2\gamma, \quad b_{52} = c_{5z}m_3^{-1}, \quad b_{53} = \gamma^2, \quad b_{61} = 2m_3(m_2 + m_3)^{-1}\gamma \\ b_{62} &= c_{4y}(m_2 + m_3)^{-1}, \quad b_{63} = m_3(m_2 + m_3)^{-1}\gamma^2, \quad 2h_4 = k_1B_3^{-1}, \quad 2h_2 = k_2q \\ 2h_3 &= k_3m_3^{-1}, \quad 2h_4 = k_2m_2^{-1}, \quad 2h_5 = (k_2 + k_3)(m_2 + m_3)^{-1} \quad (1.10) \\ \varepsilon f_1 &= -b_{15}\omega_z\gamma \cos \gamma - 2h_1\psi' - b_{14}\Phi^\pm(\psi) + {}^2/3 b_{16}\gamma^2\psi^3 + {}^1/2 b_{16}\psi\omega_z^2 \cos 2\gamma - 2b_{13}\gamma^{-1}\omega_x\psi - \\ &\quad - b_{15}\omega_x\omega_z \cos \gamma + \dots + b_{18}[\rho_{03}(z_3'' + 2\gamma y_2' - \gamma^2 z_3 + w_{z1}) \cos \alpha - \rho_{03}(x_3'' + x_2'' - \\ &\quad - {}^1/2 x_2''\theta^2 + y_2''\theta + w_{x1} - {}^1/2 w_{x1}\theta^2 + w_{y1}\theta) \sin \alpha] \\ \varepsilon f_2 &= b_{24}\omega_z\gamma \sin \gamma - 2h_2\theta' - b_{23}\Phi^\pm(\theta) + {}^2/3 b_{25}\gamma^2\theta^3 - {}^1/2 b_{25}\theta\omega_z^2 \cos 2\gamma - 2b_{22}\gamma^{-1}\omega_x\theta + \\ &\quad + b_{24}\omega_x\omega_z \sin \gamma + \dots - b_{28}[\rho_{02}(y_2'' - \gamma^2 y_2 + w_{y1}) \cos \beta - \rho_{02}(x_2'' + w_{x1}) \sin \beta] + \\ &\quad + q(x_3 F_{3y2} - y_3 F_{3x2}) \quad (1.11) \end{aligned}$$

εf_i ($i=3, \dots, 6$) — нелинейные члены

$$\begin{aligned} \rho_{03} &\approx (x_3^2 + z_3^2)^{1/2} (1 + {}^1/6 \psi^2) [1 - GI_0(2EI)^{-1}], \quad \rho_{02} \approx (x_2^2 + y_2^2)^{1/2} (1 + {}^1/6 \theta^2) \times \\ &\quad \times [1 - GI_0(2EI)^{-1}], \quad \alpha = \arcsin z_{3n}\rho_{3n}^{-1} - \psi, \quad \beta = \arcsin x_{2n}\rho_{2n}^{-1} - \theta \\ w_{x1} &= w_x, \quad w_{y1} = w_y \cos \gamma + w_z \sin \gamma, \quad w_{z1} = w_z \cos \gamma - w_y \sin \gamma \quad (1.12) \end{aligned}$$

F_2, F_3 — силы, действующие на кольцо и ротор соответственно.

Нелинейные связи между координатами системы в уравнениях (1.6) — (1.9) отражают взаимосвязь угловых и поступательных движений. Наиболее сильно это проявляется в условиях резонансов, когда поступательные перемещения кольца и ротора вследствие конечной жесткости упругого подвеса порождают погрешности гироскопа.

2. Оценим влияние поступательной вибрации на погрешности гироскопа, проявляющиеся в виде угловых отклонений ψ и θ .

Малость членов εf_i ($i=3, \dots, 6$) и большая жесткость торсионных подвеса на изгиб обуславливают слабое влияние угловых перемещений на поступательные и позволяют при $\varepsilon=0$ разделить уравнения углового (1.6) и поступательного (1.7) — (1.9) движений. В этом случае $\rho_{in} = \rho_i$ ($i=2, 3$) определены из уравнений (1.7) — (1.9). Если вибрацию основания представить в виде

$$w_x = -a_1 \cos n_1 t, \quad w_y = -a_2 \cos n_2 t, \quad w_z = -a_3 \cos n_3 t \quad (2.1)$$

то смещения x_i, y_i, z_i при $\varepsilon=0$ в установившемся режиме будут иметь вид

$$x_2 = a_{x2} \cos n_1 t, \quad x_3 = a_{x3} \cos n_1 t, \quad y_2 = \sum_{i,k=1}^2 [a_{y2}(\lambda_k) \cos \lambda_k t - a_{y2}(\lambda_i) \sin \lambda_i t],$$

$$z_3 = \sum_{i,k=1}^2 [a_{z3}(\lambda_i) \cos \lambda_i t + a_{z3}(\lambda_k) \sin \lambda_k t] \quad (2.2)$$

$$\lambda_k = n_2 - (-1)^k \gamma, \quad \lambda_i = n_3 - (-1)^i \gamma,$$

$$a_{x2} = \frac{b_{31} - n_1^2}{\Delta(n_1)} a_1, \quad a_{x3} = \frac{b_{32}}{\Delta(n_1)} a_1, \quad a_{y2}(\lambda_i) = \frac{(-1)^i (b_{52} - b_{53} - \lambda_i^2) + b_{51} \lambda_i}{2\Delta(\lambda_i)} a_3$$

$$a_{y2}(\lambda_k) = \frac{b_{52} - b_{53} - \lambda_k^2 + (-1)^k b_{51} \lambda_k}{2\Delta(\lambda_k)} a_2, \quad a_{z3}(\lambda_i) = \frac{b_{62} - b_{63} - \lambda_i^2 + (-1)^i b_{51} \lambda_i}{2\Delta(\lambda_i)} a_3$$

$$a_{z3}(\lambda_k) = \frac{b_{51} \lambda_k + (-1)^k (b_{62} - b_{63} - \lambda_k^2)}{2\Delta(\lambda_k)} a_2, \quad \Delta(n_1) = n_1^4 - (b_{31} + b_{41}) n_1^2 + b_{31} b_{41} - b_{32} b_{42}$$

$$\Delta(\lambda_{i,k}) = \lambda_{i,k}^4 - (b_{52} + b_{62} - b_{53} - b_{63} + b_{51} b_{61}) \lambda_{i,k}^2 + (b_{52} - b_{53})(b_{62} - b_{63})$$

Для случая равноускоренного движения основания в соотношениях (2.1), (2.2) следует положить $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Если принять $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = g$, то полученные формулы позволяют оценить влияние силы веса кольца и ротора на поведение гироскопа.

Погрешности прибора (ψ, θ) найдем как приближенные решения нелинейных уравнений (1.6). Воспользовавшись методом усреднения, представим искомые решения в виде

$$\psi = \sum_{j=1}^2 C_j e^{i\omega_j t} + D_j e^{-i\omega_j t}, \quad \theta = i \sum_{j=1}^2 \kappa_j (C_j e^{i\omega_j t} - D_j e^{-i\omega_j t}), \quad i^2 = -1 \quad (2.3)$$

и преобразуем систему уравнений (1.6) к стандартной форме

$$C_j^* = (-1)^j \frac{\varepsilon}{2} \left(i \frac{f_1 + l_1}{\chi_{j1}} + \frac{f_2 + l_2}{\chi_{j2}} \right) e^{-i\omega_j t}$$

$$D_j^* = -(-1)^j \frac{\varepsilon}{2} \left(i \frac{f_1 + l_1}{\chi_{j1}} - \frac{f_2 + l_2}{\chi_{j2}} \right) e^{i\omega_j t} \quad (2.4)$$

$$\omega_{j0}^2 \omega_j^{-2} = 1 + \varepsilon \eta_j, \quad l_1 = - \sum_{j=1}^2 \eta_j \left(\omega_{j0}^2 + \frac{1}{2} b_{12} \kappa_j \omega_{j0} \right) (C_j e^{i\omega_j t} + D_j e^{-i\omega_j t})$$

$$l_2 = -i \sum_{j=1}^2 \eta_j \left(\kappa_j \omega_{j0}^2 + \frac{1}{2} b_{12} \omega_{j0} \right) (C_j e^{i\omega_j t} - D_j e^{-i\omega_j t})$$

$$\kappa_i = \frac{b_{21} \omega_{j0}}{b_{22} + b_{23} - \omega_{j0}^2}, \quad \chi_{11} = \frac{\omega_1 \kappa_2 - \omega_2 \kappa_1}{\kappa_2}, \quad \chi_{12} = \omega_1 \kappa_1 - \omega_2 \kappa_2$$

$$\chi_{21} = (\omega_1 \kappa_2 - \omega_2 \kappa_1) \kappa_1^{-1}, \quad \omega_{j0}^2 = 1/2 \{ b_{13} + b_{140} + b_{22} + b_{230} + b_{12} b_{21} - (-1)^j [(b_{13} + b_{140} + b_{22} + b_{230} + b_{12} b_{21})^2 - 4(b_{13} + b_{140})(b_{22} + b_{230})]^{1/2} \}$$

Переменные C_j и D_j связаны с амплитудой ρ_j и фазой δ_j колебаний соотношениями $C_j = 1/2 \rho_j e^{-i\delta_j}$, $D_j = 1/2 \rho_j e^{i\delta_j}$.

При нахождении решений вида (2.3) целесообразно произвести гармоническую линеаризацию функции (1.5), представив ее в виде

$$\Phi^{\pm}(\varphi) = -A_{1*}\varphi_0^{n-1}\varphi + A_{2*}\varphi_0^{n-1}\varphi^* \quad (2.5)$$

где A_{1*} , A_{2*} — коэффициенты гармонической линеаризации.

Осуществляемая в гироскопе динамическая настройка [1] выражается соотношением

$$\omega_{10} \approx \gamma^*, \quad \omega_{10} > \omega_{20}, \quad \omega_{20} \neq m/p\omega_{10} \quad (2.6)$$

где m , p — целые взаимно простые числа.

Приближенное условие динамической настройки имеет вид

$$\gamma^{*2} = (c_2 + c_3 + a(x_3^2 + z_3^2 + x_2^2 + y_2^2)) (2B_2 - A_2)^{-1} \quad (2.7)$$

и является функцией прогибов торсионов при поступательной вибрации и ускорениях основания гироскопа, что служит причиной нарушения точности динамической настройки.

При этом постоянную составляющую $\delta\omega_{10}$ изменения резонансной частоты ω_{10} (2.6) при поступательной вибрации и ускорениях оценим выражением

$$\delta\omega_{10} = \frac{\omega_{10} - \omega_{10*}}{\omega_{10*}} = [1 + a \langle x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + z_3^2 \rangle (c_2 + c_3)^{-1}]^{1/2} - 1 \quad (2.8)$$

где ω_{10*} — частота резонансной настройки гироскопа на неподвижном основании.

Периодические составляющие жесткости подвеса на кручение b_{14+} , b_{23+} при рассматриваемом характере движения (2.2) центров масс могут быть причиной динамической неустойчивости системы и возбуждения угловых колебаний гироскопа при следующих группах соотношений частот [11] (λ — частота модуляции жесткости подвеса):

$$2\omega_{j0} = \lambda, \quad j=1, 2; \quad \omega_{10} \pm \omega_{20} = \lambda \quad (2.9)$$

Отметим, что составляющие спектра колебаний с частотой γ^* , вызванные действующими на гироскоп возмущениями, представляют его погрешность.

Учитывая условие (2.6) и выражения (2.2), определим значения частот пространственной вибрации основания, при которых выполняются соотношения (2.9).

Для первой группы

$$n_1 = \gamma^*, \quad n_2 = 2\gamma^*, \quad n_3 = 2\gamma^*, \quad n_2 + n_3 = 2\gamma^*, \quad n_2 + n_3 = 4\gamma^*, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0 \quad (2.10)$$

Для второй группы

$$2n_1 = \gamma^* \pm \omega_{20}, \quad 2n_2 = 3\gamma^* \pm \omega_{20}, \quad 2n_3 = 3\gamma^* \pm \omega_{20} \quad (2.11)$$

$$n_2 + n_3 = \gamma^* \pm \omega_{20}, \quad n_2 + n_3 = 3\gamma^* \pm \omega_{20}$$

Учитывая общую для всех соотношений (2.9) природу возникновения погрешности гироскопа, ограничимся подробным анализом резонансного случая $2\omega_{10} \approx \lambda$.

Усредняя (2.4) при $\omega_x = \omega_z = 0$, $n_i \approx \gamma^*$ и учитывая (2.2), получим

$$C_1^* = -1/2 i \varepsilon [(S_{11} - i S_{12} + 1/4 S_{13} \rho_1^2 - S_{14}) C_1 - S_{15} D_1]$$

$$D_1^* = 1/2 i \varepsilon [(S_{11} + i S_{12} + 1/4 S_{13} \rho_1^2 - S_{14}) D_1 - S_{15} C_1] \quad (2.12)$$

$$S_{11} = S_1 + S_0 \rho_1^{n-1}, \quad S_{12} = H_1 + S_0 \rho_1^{n-1}$$

$$S_{13} = \chi_{11}^{-1} [b_{16} (2 - 3\chi_{11} + 4\chi_{11}^2) - b_{17} \chi_{11}^3] \gamma^{*2} + 2\chi_{12}^{-1} b_{25} \chi_{11}^3 + \dots$$

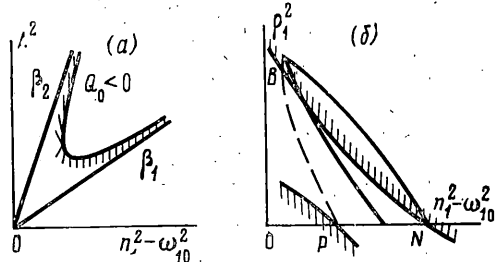
$$S_1 = [\chi_{11}^{-1} (\omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \chi_{11} \omega_{10}) + \chi_{12}^{-1} (\chi_{11} \omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \omega_{10})] n_1^{-2} (n_1^2 - \omega_{10}^2)$$

$$S_0 = (\chi_{11}^{-1} b_{140} + \chi_{12} b_{230} \kappa_1^n) A_1^*, \quad S = S_0 \gamma^* A_2^* A_1^*{}^{-1} \\ H_1 = 2\gamma^* (\chi_{11}^{-1} h_1 + \chi_{12}^{-1} \kappa_1 h_2), \quad S_{14} = a a_{x3}^2 (2B_3 \chi_{11})^{-1} + a q \kappa_1 a_{x2}^2 (2\chi_{12})^{-1} \\ S_{15} = a [a_{x3}^2 (4B_3 \chi_{11})^{-1} - q \kappa_1 a_{x2}^2 (4\chi_{12})^{-1}]$$

Система уравнений для C_2 и D_2 описывает затухающие колебания с частотой ω_{20} . Уравнениям (2.12) удовлетворяют значения переменных $C_1 = D_1 = 0$ и $C_1 = C_{10} = \text{const}$, $D_1 = D_{10} = \text{const}$. Устойчивость рассматриваемых решений определяется корнями соответствующих характеристических уравнений, составленных для уравнений в вариациях. Нетрудно убедиться, что условия возбуждения (условия неустойчивости состояния $C_1 = D_1 = 0$) и устойчивости стационарных колебаний для $n=3$ имеют вид

$$(S_1 - S_{14})^2 + H_1^2 - S_{15}^2 = Q_0 < 0 \quad (2.13)$$

$$5[(S_0 + 1/4 S_{13})^2 + S^2] \rho_1^4 + \\ + 6[(S_1 - S_{14})(S_0 + 1/4 S_{13}) +$$



Фиг. 2

$$+ H_1 S] \rho_1^2 + (S_1 - S_{14})^2 + H_1^2 - S_{15}^2 = Q > 0 \quad (2.14)$$

Левая часть неравенства (2.13) представляет гиперболу (фиг. 2, а) в плоскости параметров $(A^2, n_1^2 - \omega_{10}^2)$ с асимптотами

$$A^2 = \beta_1 (n_1^2 - \omega_{10}^2), \quad A^2 = \beta_2 (n_1^2 - \omega_{10}^2) \quad (2.15)$$

$$A = a_{x3} = a_{x2} k_{x2}^{-1}, \quad \beta_1 = [\chi_{11}^{-1} (\omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \kappa_1 \omega_{10}) + \chi_{12}^{-1} (\kappa_1 \omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \omega_{10})] [(b_1 + b_2) n_1^2]^{-1} \\ \beta_2 = [\chi_{11}^{-1} (\omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \kappa_1 \omega_{10}) + \chi_{12}^{-1} (\kappa_1 \omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \omega_{10})] [(b_1 - b_2) n_1^2]^{-1} \\ b_1 = a (2B_3 \chi_{11})^{-1} + a q \kappa_1 k_{x2}^2 (2\chi_{12})^{-1}, \quad b_2 = a (4B_3 \chi_{11})^{-1} - a q \kappa_1 k_{x2}^2 (4\chi_{12})^{-1}$$

Таким образом, динамическая неустойчивость гироскопа при ускорениях и вибрации основания может иметь место как в случае смещения центров масс кольца и ротора, так и вследствие прогибов торсионов и вызываемой ими модуляции жесткости подвеса на кручение. В последнем случае возбуждение колебаний возможно при отличной от нуля расстройке частот $(n_1^2 - \omega_{10}^2 > 0)$ и амплитуде вибрации A , лежащей в пределах

$$\beta_1 (n_1^2 - \omega_{10}^2) < A^2 < \beta_2 (n_1^2 - \omega_{10}^2) \quad (2.16)$$

3. Положив в (2.12) $C_1^* = D_1^* = 0$, найдем следующие уравнения для определения амплитуды ρ_1 и фазы δ_1 , представляющих погрешность гироскопа

$$[(S_0 + 1/4 S_{13})^2 + S^2] \rho_1^4 + 2[(S_1 - S_{14})(S_0 + 1/4 S_{13}) + H_1 S] \rho_1^2 + \\ + H_1^2 + (S_1 - S_{14})^2 - S_{15}^2 = \Phi = 0 \quad (3.1)$$

$$\sin 2\delta_1 = -(H_1 + S \rho_1^2) S_{15}^{-1} \quad (3.2)$$

Максимальное значение амплитуды колебаний определяется из условия $\partial \Phi / \partial S_1 = 0$:

$$\rho_1^2 = (-H_1 + S_{15}) S^{-1} \quad (3.3)$$

при этом расстройка частот определена соотношением

$$n_1^2 - \omega_{10}^2 = [-(S_0 + 1/4 S_{13}) \rho_1^2 + S_{14}] [\chi_{11}^{-1} (\omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \kappa_1 \omega_{10}) + \\ + \chi_{12}^{-1} (\kappa_1 \omega_{10}^2 + 1/2 b_{12} \omega_{10})]^{-1} n_1^2 \quad (3.4)$$

Из формулы (3.3) следует, что действие трения гистерезисного типа (S), существенно ограничивающее амплитуду параметрических колебаний, качественно отличается от влияния вязкого трения (H_1). Граница области устойчивости решений $C_1=C_{10}$, $D_1=D_{10}$ определяется уравнением гиперболы $Q=0$ (2.14), пересекающей кривую (3.1) в точках возбуждения ($\rho_1=0$) и срыва колебаний

$$\rho_2^2 = -[(S_1 - S_{14})(S_0 + 1/4 S_{13}) + H_1 S] / [(S_0 + 1/4 S_{13})^2 + S^2]$$

Характер зависимости квадрата амплитуды ρ_1^2 от разности квадратов частот $n_1^2 - \omega_{10}^2$ показан на фиг. 2, б. Отметим, что гистерезисное трение не влияет на ширину области возбуждения (PN).

4. Полагая вязкое трение в системе малым, силы F_i , действующие на ротор и кольцо, можно выразить через силы упругих реакций подвеса

$$F_2 = -m_2 W_2 = c_4 \rho_2 - c_5 \rho_3 + \Phi^\pm(\rho_2), \quad F_3 = -m_3 W_3 = c_5 \rho_3 + \Phi^\pm(\rho_3) \quad (4.1)$$

Тогда возмущающий момент, обусловленный неравножесткостью торсионов подвеса ротора (1.11) при $c_{4x} = c_{4y}$, $c_{5x} = c_{5z}$, преобразуем к виду

$$M_{3z2} = q(x_3 F_{3y2} - y_3 F_{3x2}) = q[x_3 y_3 (c - c_5) + x_3 \Phi^\pm(y_3) - y_3 \Phi^\pm(x_3)] \quad (4.2)$$

Если жесткости торсионов подвеса ротора на изгиб и растяжение — сжатие равны ($c_s = c$), то

$$M_{3z2} = q[x_3 \Phi^\pm(y_3) - y_3 \Phi^\pm(x_3)] \quad (4.3)$$

т. е. в случае равножестких торсионов момент (4.2) не может быть устранен полностью, а только уменьшен до величин (4.3), определяющейся несовершенной упругостью материала (1.5).

Для неравножестких торсионов при условии $c \gg c_5$ можно положить $y_3 \approx 0$. Пренебрегая трением и учитывая (2.2), получим

$$M_{3z2} = q x_3 F_{3y2} = -q m_3 a_{x3} \sum_{i,h=1}^2 \{ -a(\lambda_h) [\cos(\lambda_h + n_1)t + \cos(\lambda_h - n_1)t] + \\ + a(\lambda_i) [\sin(\lambda_i + n_1)t + \sin(\lambda_i - n_1)t] \} \quad (4.4)$$

$$a(\lambda) = 1/2 a_{y2}(\lambda) (\lambda^2 + \gamma^2) + \gamma^* \lambda a_{z3}(\lambda) + 1/4 a_2, \quad \lambda = \lambda_h, \lambda_i$$

Погрешность гироскопа будет иметь место при соотношениях частот

$$n_p - n_1 = 0, \quad n_p \pm n_1 = 2\gamma^* \quad (\lambda_h \pm n_1 = \gamma^*, \quad \lambda_i \pm n_1 = \gamma^*), \quad p=2, 3 \quad (4.5)$$

и может быть охарактеризована угловой скоростью ухода, которая равна

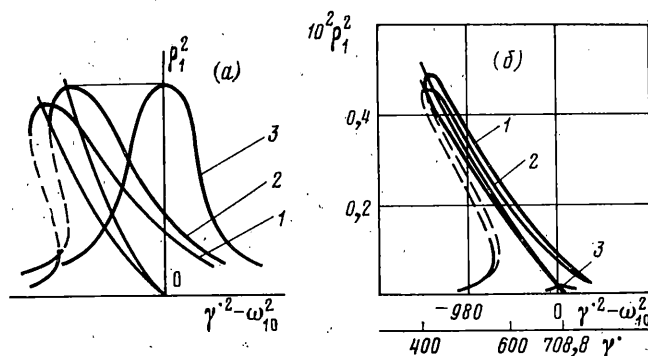
$$\omega = q m_3 a_{x3} a(\lambda) / (2 b_{24} \gamma^*) = m_3 a_{x3} a(\lambda) / [2(A_2 + A_3) \gamma^*] \quad (4.6)$$

Из уравнений движения (1.6) и выражения (1.11) следует, что неравножесткость упругого подвеса кольца ($c \neq c_4$) на погрешности гироскопа не влияет.

5. Исследуем величину и характер действующих на гироскоп возмущающих моментов, обусловленных сложным характером деформации торсионов подвеса (1.12) (фиг. 1, в) при поступательной вибрации и равномерном вращении основания $\omega_z = \text{const}$. Пренебрегая влиянием трения при поступательных колебаниях и учитывая (4.1), для равножестких на изгиб торсионов получим

$$M_{3y2} = -m_3^{-1} c_5 b_{18} (x_3^2 + z_3^2) \sin \psi \quad (5.1)$$

$$M_{2z1} = m_2^{-1} b_{28} [c_4 (x_2^2 + y_2^2) \sin \theta - c_5 (x_1 x_2 \sin 2\theta - y_2 x_3 \cos 2\theta)] \quad (5.2)$$



Фиг. 3

Сравним составляющие моментов (5.1) и (5.2), имеющие характер параметрического возмущения, с моментом от периодического изменения жесткости

$$(m_3 b_{14+})^{-1} b_{18} c_5 (x_3^2 + z_3^2) = c_5 a^{-1} < 1 \quad (5.3)$$

Из соотношения (5.3) следует, что рассматриваемый момент ввиду его малости можно не учитывать в некоторых случаях при исследовании динамики гироскопа. Остальные слагаемые в выражении (5.2) по структуре и величине аналогичны моменту от неравножесткости торсионов.

Применяя приведенную выше методику, из уравнений (2.4) легко определить условие динамической настройки нелинейной модели гироскопа в условиях равномерного вращения основания [6]

$$S_1 = (1/4 S_{13} \rho_{1*}^2 + S_0 \rho_{1*}^{n-1}) \quad (5.4)$$

Максимальное значение амплитуды колебаний ρ_{1*} при этом находится из уравнения

$$(H_1 + S_0 \rho_{1*}^{n-1}) \rho_{1*} = 2S_{16} \quad (5.5)$$

Положив $S = S_0 = S_{13} = 0$, из (5.4) и (5.5) получим известные соотношения для линейной модели динамически настраиваемого гироскопа

$$\gamma^* = \omega_{10}, \quad \rho_{1*} = 2S_{16} H_1^{-1} \quad (5.6)$$

Резонансные кривые для гироскопа на равномерно вращающемся основании показаны на фиг. 3, а при $n=3$, где 1 — кривая при $S_0 \neq 0, S_{13} \neq 0$, 2 — при $S = S_0 = 0$ (для гироскопа с идеально упругими торсионами), 3 — при $S = S_0 = S_{13} = 0$ (для линейной модели гироскопа), а результат численного решения — на фиг. 3, б при $\nu = 0$ (кривая 1) и $\nu = 0,01$ (кривая 2) при $\omega_z = 7 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $\omega_z = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ (кривая 3). Как следует из (5.5), (5.6) и фиг. 3, несовершенная упругость материала торсионов ограничивает амплитуды колебаний гироскопа и изменяет наклон скелетной кривой.

6. Рассмотрим теперь гироскоп в условиях угловой вибрации основания. Пусть $\omega_x = d_1 \cos \nu_1 t$, $\omega_z = d_2 \cos \nu_2 t$. Как следует из структуры слагаемых (1.11), в гироскопе возможно существование резонансных состояний при соотношениях частот

$$\nu_{1,2} = k\gamma^*, \quad \nu_{1,2} = k(\gamma^* \pm \omega_{20}), \quad \nu_1 \pm \nu_2 = 2\gamma^*, \quad \nu_1 = \nu_2, \quad k=1, 2 \quad (6.1)$$

и нерезонансных значениях частот вибрации ν_2 .

Общими для всех соотношений (6.1) будут уравнения для огибающих

$$\begin{aligned} C_1^* &= -\frac{1}{2}i\varepsilon [(S_{11r} - iS_{12r} + \frac{1}{4}S_{13}\rho_1^2 + S_{14r}C_2 + S_{15r}D_2)C_1 + \\ &\quad + (S_{16r} + S_{17r}D_2)D_1 + S_{18r}(C_2 + D_2) - S_{19r}] \\ D_1^* &= \frac{1}{2}i\varepsilon [(S_{11r} + iS_{12r} + \frac{1}{4}S_{13}\rho_1^2 + S_{14r}D_2 + S_{15r}C_2)D_1 + \\ &\quad + (S_{16r} + S_{17r}C_2)C_1 + S_{18r}(C_2 + D_2) - S_{19r}] \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} C_2^* &= -\frac{1}{2}i\varepsilon [(S_{21r} - iS_{22r} + \frac{1}{4}S_{23}\rho_2^2)C_2 + S_{25r}(C_1 + D_1) + S_{26r}] \\ D_2^* &= \frac{1}{2}i\varepsilon [(S_{21r} + iS_{22r} + \frac{1}{4}S_{23}\rho_2^2)D_2 + S_{25r}(C_1 + D_1) + S_{26r}] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Индекс r принимает соответствующие значения в зависимости от соотношений (6.1).

Для резонансов, имеющих характер параметрических, $\nu_1 = \gamma$ ($r=1$), $\nu_1 = 2\gamma$ ($r=2$), $\nu_2 = \gamma$ ($r=3$) и нерезонансных значениях ν_2 ($r=4$) условия возбуждения и устойчивости стационарных колебаний имеют вид

$$(S_1 + S_{10r})^2 + H_1^2 - S_{16r} = Q_0 < 0 \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} 5[(S_0 + \frac{1}{4}S_{13})^2 + S^2]\rho_1^4 + 6[(S_1 + S_{10r})(S_0 + \frac{1}{4}S_{13}) + H_1S]\rho_1^2 + \\ + (S_1 + S_{10r})^2 + H_1^2 - S_{16r} = Q \geq 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} S_{163} &= \frac{1}{8}[\chi_{11}^{-1}(2 + \kappa_1)b_{16} + \chi_{12}^{-1}b_{26}]d_2^2, \quad S_{164} = \frac{1}{8}[\chi_{11}^{-1}(1 + \kappa_1)b_{16} + \chi_{12}^{-1}(\kappa_1b_{25} + b_{26})]d_2^2, \\ S_{10r} &= -(\chi_{11}^{-1}b_{13} + \chi_{12}^{-1}\kappa_1b_{22})d_1^2(2\gamma^2)^{-1} \quad (r=1, 2) \\ S_{103} &= \frac{1}{8}(3\chi_{11}^{-1}b_{16} + \chi_{12}^{-1}\kappa_1b_{25})d_2^2, \quad S_{104} = \frac{1}{4}(\chi_{11}^{-1}b_{16} + \chi_{12}^{-1}\kappa_1b_{25})d_2^2, \\ S_{161} &= [\chi_{11}^{-1}(\kappa_1b_{12} - 2b_{13}) - \chi_{12}^{-1}(b_{21}\omega_1 - 2b_{22}\kappa_1)]d_1(2\gamma)^{-1}, \\ S_{162} &= (-\chi_{11}^{-1}b_{13} + \chi_{12}^{-1}\kappa_1b_{22})d_1^2(2\gamma^2)^{-1} \end{aligned}$$

Область возбуждения колебания (6.4) показана на фиг. 4, а, б. Вычитая из (6.5) уравнение стационарных амплитуд

$$\begin{aligned} [S^2 + (S_0 + \frac{1}{4}S_{13})]\rho_1^4 + 2[(S_1 + S_{10r})(S_0 + \frac{1}{4}S_{13}) + H_1S]\rho_1^2 + \\ + (S_1 + S_{10r})^2 + H_1^2 - S_{16r} = \Phi = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

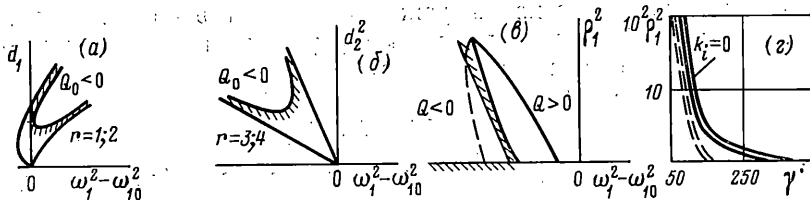
получим уравнения кривых, разделяющих плоскость $(\omega_1^2 - \omega_{10}^2, \rho_1^2)$ на области устойчивости и неустойчивости стационарных колебаний

$$\rho_1^2 = 0, \quad \rho_1^2 = [(S_1 + S_{10r})(S_0 + \frac{1}{4}S_{13}) + H_1S][(S_0 + \frac{1}{4}S_{13})^2 + S^2]^{-1} \quad (6.7)$$

Характер зависимости квадрата амплитуды от расстройки частот (6.6) и области устойчивости показаны на фиг. 4, в, а результат численного решения при $\nu_2 \approx \gamma$, $d_2 = 6c^{-1}$ — на фиг. 4, г. В условиях комбинационных резонансов $\nu_2 = \gamma + \omega_{20}$ ($r=5$), $\nu_2 = \gamma - \omega_{20}$ ($r=6$) уравнения (6.3) имеют решения $C_2 = \text{const}$, $D_2 = \text{const}$ ($S_{26} \neq 0$). Из условия возбуждения колебаний с частотой γ

$$\begin{aligned} [S_1 + S_{10r} + b_1(S_{14r} + S_{15r})]^2 + [H_1 + b_2(S_{14r} - S_{15r})]^2 - (S_{16r} + b_1S_{17r})^2 - b_2^2S_{17r}^2 < 0 \\ 2b_1 = \rho_2 \cos \delta_2, \quad 2b_2 = \rho_2 \sin \delta_2, \quad |b_1S_{17r}| \gg |S_{16r}|, \quad b_2(S_{14r} - S_{15r}) < 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

следует, что колебания с частотой ω_{20} расширяют область неустойчивости решений $C_1 = D_1 = 0$ и увеличивают возможность возникновения погрешности гироскопа при отличной от нуля расстройке частот $\nu_2 - (\gamma \pm \omega_{20})$, $\omega_2 \neq \omega_{20}$. Амплитуды колебаний с частотой γ определяются уравнением, аналогичным (6.6). Следуя изложенной методике, легко получить условия устойчивости и амплитуды колебаний гироскопа при угловой вибрации



Фиг. 4

в условиях резонансов

$$v_1 = k(\gamma \pm \omega_{20}), \quad k=1, 2 \quad (6.9)$$

которые не приводятся ввиду их громоздкости.

Во всех случаях параметрического возбуждения колебаний влияние трения гистерезисного типа аналогично рассмотренному выше (уравнения (3.1), (3.3)).

При резонансах

$$v_1 \pm v_2 = 2\gamma, \quad v_1 = v_2, \quad v_2 = 2\gamma \quad (6.10)$$

гироскоп ведет себя, как и на равномерно вращающемся основании. Формула (5.5) в этом случае определяет его максимальную погрешность, где S_{16} принимает соответствующее значение для каждого из резонансов (6.10).

7. Примеры. Оценим численно полученные выше результаты. В гироскопе с параметрами: $A_2=3528 \cdot 10^{-9}$, $B_2=196 \cdot 10^{-8}$, $A_3=9,8 \cdot 10^{-5}$, $B_3=588 \cdot 10^{-7}$ Нмс²; $m_2=0,01$, $m_3=0,3$ кг; $c=9,8 \cdot 10^3$, $c_4=c_5=9,8 \cdot 10^6$ Нм⁻¹, $c_2=c_3=9,8 \cdot 10^{-3}$ Нм; $b=5 \cdot 10^{-3}$ м; $l=10^{-2}$ м; $I=5 \cdot 10^{-12}$ м⁴; $\gamma=\omega_{10}=708,87$ с⁻¹; $\omega_{20}=473,7$ с⁻¹; ширина резонансной зоны $\Delta\gamma \approx 10$ с⁻¹.

При ускорении основания $a_1=6g$ имеем $a_{x2}=a_{x3}=2 \cdot 10^{-6}$ м, $\delta\omega_{10}=0,099\%$, $\omega_{10}-\omega_{10*}=0,7$ с⁻¹, а в условиях вибрации при $a_{x2}=a_{x3}=2 \cdot 10^{-6}$ м, $\delta\omega_{10}=0,05\%$, $\omega_{10}-\omega_{10*}=0,35$ с⁻¹. Если $n_1=708,9$ с⁻¹, то динамическая неустойчивость гироскопа возможна при амплитудах вибрации, лежащих в интервале $8,99 \cdot 10^{-6}$ м $< A < 9,04 \cdot 10^{-6}$ м. Угловая скорость ухода гироскопа от неравножесткости торсионов подвеса ротора равна $\omega=10,26 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹=1,41 ω_3 при $n_1=n_3=\gamma$, $a_1=a_3=3g$, где ω_3 — угловая скорость вращения земли.

Возбуждение колебаний с частотой $\omega_1 \approx \gamma$ может иметь место при следующих параметрах угловой вибрации: $v_1=2\gamma$, $0 < \alpha_x < 0,131$; $v_1 \approx \gamma$, $v_1=708,89$ с⁻¹, $0,0111 < \alpha_x < 0,0112$; $v_1 \approx \gamma + \omega_{20}$, $v_1=1182,56$ с⁻¹, $\omega_2=\omega_{20}$, $\alpha_x > 0,24 \cdot 10^{-4}$; $2v_1 \approx \gamma + \omega_{20}$, $v_1=591,28$ с⁻¹, $\omega_2=\omega_{20}$, $\alpha_x > 0,0155$; $2v_1 \approx \gamma - \omega_{20}$, $v_1=117,86$ с⁻¹, $\omega_2=\omega_{20}$, $\alpha_x > 0,0057$; $v_2 \approx \gamma$, $v_2=708,86$ с⁻¹, $0,0068 < \alpha_z < 0,1118$; $v_2 \approx \gamma + \omega_{20}$, $v_2=\omega_1 + \omega_2=1182,06$ с⁻¹, $\omega_2 \neq \omega_{20}$, $1,52 \cdot 10^{-4} < \alpha_z < 0,77 \cdot 10^{-3}$, где $\alpha_x=d_1 v_1^{-1}$ рад, $\alpha_z=d_2 v_2^{-1}$ рад.

Приведенные исследования показывают, что учет нелинейных факторов в уравнениях движения позволяет оценить условия возбуждения и величины погрешностей гироскопа в более широком диапазоне частот поступательной и угловой вибрации, чем это следует из анализа линейной модели. Полученные результаты позволяют более точно осуществить динамическую настройку.

В зависимости от вида резонансных состояний по-разному проявляется влияние трения и расстройки частот. При этом трение гистерезисного типа во всех случаях ограничивает амплитуду колебаний.

Поступательная вибрация и ускорения вызывают изменение жесткости рассмотренных типов торсионов на кручение и нарушают условие динамической настройки, что может иметь определяющее влияние на чувствительность и точность гироскопа. Необходим выбор оптимального упругого подвеса, способного также обеспечить равную жесткость торсионов подвеса ротора на изгиб и растяжение — сжатие для исключения погрешности от неравножесткости системы.

Полученные аналитические выражения для погрешностей позволяют сформулировать требования к допустимому уровню вибрации и перегрузок основания в месте установки гироскопа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брозгуль Л. И., Смирнов Е. Л. Вибрационные гироскопы. М.: Машиностроение, 1970. 214 с.
2. Бурмистров В. П., Виноградов Г. М., Родионов Е. М. Динамика гироскопа на упругом подвесе. — Изв. вузов. Приборостроение, 1971, т. 14, вып. 3, с. 70.
3. Savet P. H. Dynamics of Ideal Suspensious Applied to Rotating Bodies in Spase. — J. Spacecraft and Rockets, 1966, v. 3, No. 9, p. 43. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1967, № 5, с. 48.)
4. Craig R. Theory of Errors of a Multigimbal Elastically Supported Turned Gyroscop. — IEEE Trans, 1972, v. 8, No. 3, p. 289.
5. Павловский М. А., Збруцкий А. В. О повышении чувствительности роторных вибрационных гироскопов. — Прикл. механика, 1978, т. 14, вып. 9, с. 95.
6. Павловский М. А., Збруцкий А. В., Виноградов Г. М. О главном резонансе в гироскопе на упругом подвесе. — Прикл. механика, 1978, т. 14, вып. 11, с. 89.
7. Ковалев М. П., Сивоконенко И. М., Явленский К. Н. Опоры приборов. М.: Машиностроение, 1967. 192 с.
8. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965. 480 с.
9. Полюмских М. В. Влияние скорости вращения ротора на угловую жесткость упругого подвеса гироскопа Хоува. — Изв. вузов. Приборостроение, 1974, т. 17, вып. 6, с. 62.
10. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Киев: Наукова думка, 1971. 376 с.
11. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.

Поступила в редакцию
24.IV.1979