

УДК 539.3

К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ

МАКСИМЕНКО В. Н.

(Новосибирск)

Задача расчета изотропных пластин, подкрепленных ребрами жесткости, рассматривалась многими авторами (см., например, [1–6]). Передача нагрузки от упругого ребра к краю полубесконечной анизотропной пластины исследовалась в [7, 8].

Ниже рассматривается задача о передаче нагрузки от поперечного ребра жесткости к полубесконечной упругой анизотропной пластине. В случае изотропного материала эта задача исследовалась в [9–12]. Задача решается в рамках гипотезы непрерывного контакта по линии и сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестных контактных усилий взаимодействия. Определяется характер поведения решения в случае выхода ребра на край пластины. Предлагается метод численного решения интегрального уравнения, приводятся результаты расчетов.

1. Предварительно выпишем решение для анизотропной полуплоскости под действием внутренних усилий, сосредоточенных в точках и на линиях.

Рассмотрим полубесконечную упругую пластину постоянной толщины h из анизотропного материала, имеющего одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластины $D = \{-\infty < y < \infty; x > 0\}$. Напряжения и перемещения в пластине определяются формулами [13]:

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_j^2 \Phi_j'(z_j) \right], \quad \sigma_y = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \Phi_j'(z_j) \right]$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \mu_j \Phi_j'(z_j) \right], \quad z_j = x + \mu_j y \quad (j=1,2) \quad (1.1)$$

$$u = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 p_j \Phi_j(z_j) \right], \quad v = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 q_j \Phi_j(z_j) \right]$$

$$p_j = a_{11} \mu_j^2 - a_{16} \mu_j + a_{12}, \quad q_j = a_{12} \mu_j + a_{22} \mu_j^{-1} - a_{26}$$

где Φ_j — аналитические функции комплексного переменного, а μ_j ($\operatorname{Im} \mu_j > 0$) — корни характеристического уравнения

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0$$

Коэффициенты a_{ij} характеризуют упругие свойства материала. Если пластина находится под действием сосредоточенной силы P , приложенной к произвольной точке (x_0, y_0) и образующей угол ω с осью x , то после некоторых преобразований с учетом [13] будем иметь

$$\Phi_j(z_j) = \frac{P}{4\pi h} \{ a_j \ln(z_j - \tau_j) + l_j \bar{a}_1 \ln(s_j z_j - \bar{\tau}_1) + n_j \bar{a}_2 \ln(t_j z_j - \bar{\tau}_2) \} \quad (1.2)$$

$$s_j = \frac{\bar{\mu}_1}{\mu_j}, \quad t_j = \frac{\bar{\mu}_2}{\mu_j}, \quad l_j = \frac{\mu_{j+1} - \bar{\mu}_1}{\mu_j - \mu_{j+1}}, \quad n_j = \frac{\mu_{j+1} - \bar{\mu}_2}{\mu_j - \mu_{j+1}}$$

где постоянные a_j определяются из системы уравнений

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_j^{h-2} a_j \right) = - \frac{a_{12} \cos \omega + a_{26} \sin \omega}{a_{22}} \quad (h=1), \quad -\sin \omega \quad (h=2) \quad (1.3)$$

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^2 \mu_j^{h-2} a_j \right) = \cos \omega \quad (h=3), \quad \frac{a_{16} \cos \omega + a_{12} \sin \omega}{a_{11}} \quad (h=4)$$

Значение индекса $j+1$ при $j=2$ в (1.2) принимаем равным единице.

С учетом (1.1), (1.2) выражение деформации ε_1^* на линии $y=0$ от действия единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке $(x_0, 0)$ и направленной вдоль оси x , равно

$$\varepsilon_1^*(x, x_0) = \frac{1}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 p_j \left[\frac{a_j}{x-x_0} + \frac{s_j l_j \bar{a}_1}{s_j x - x_0} + \frac{n_j t_j \bar{a}_2}{t_j x - x_0} \right] \right\} \quad (1.4)$$

где a_j определяются системой (1.3) с $\omega=0$.

Выражения для перемещений деформаций и усилий в случае загрузки по линиям получаются наложением соответствующих решений от действия сосредоточенных сил.

Например, с учетом (1.4) деформация ε_1 пластины на линии $y=0$ от действия внутренних усилий интенсивности $q(x)$, сосредоточенных на линии $ls < x < l(1+s)$, $y=0$ ($s \geq 0$) и направленных вдоль оси x , равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, 0) &= \int_{ls}^{l(1+s)} \varepsilon_1^*(x, y) q(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{ls}^{l(1+s)} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 p_j \left[\frac{a_j}{x-y} + \frac{s_j l_j \bar{a}_1}{s_j x - y} + \frac{t_j n_j \bar{a}_2}{t_j x - y} \right] \right\} q(y) dy \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. Рассмотрим полубесконечную упругую анизотропную пластину, к которой вдоль отрезка $ls < x < l(1+s)$ ($s \geq 0$) оси x непрерывно присоединено ребро жесткости длины l , нагруженное на конце $x=ls$ силой P .

Будем предполагать, что толщина пластины, а также размер поперечного сечения ребра малы в сравнении с длиной l скрепленного участка. Примем модель контакта по линии и будем считать, что ребро работает как одномерный упругий континуум, а пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии.

Определим величину и закон распределения контактных усилий $q(x)$, возникающих в ребре от пластины.

Деформация растяжения ребра равна

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{E_0 F_0} \int_x^{l(1+s)} q(y) dy \quad (ls < x < l(1+s)) \quad (2.1)$$

где E_0 , F_0 — модуль Юнга и площадь поперечного сечения ребра. Можно считать, что E_0 и F_0 являются переменными величинами. Поскольку учет этих факторов не имеет принципиального значения, то ограничимся случаем $E_0 = \text{const}$, $F_0 = \text{const}$.

Деформация ε_1 пластины на линии $y=0$ от действия неизвестных контактных усилий $q(x)$ определяется формулой (1.5).

Исходное уравнение задачи получаем из условия совместности деформаций ребра и пластины на линии контакта. С учетом (1.5), (2.1) имеем следующее сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $q(x)$:

$$\int_{l_s}^{l(1+s)} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 p_j \left[\frac{a_j}{y-x} + \frac{s_j l_j \bar{a}_1}{y-s_j x} + \frac{t_j n_j \bar{a}_2}{y-t_j x} \right] \right\} q(y) dy = \frac{2\pi h}{E_0 F_0} \int_x^{l(1+s)} q(y) dy \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) следует подчинить условию равновесия всего ребра

$$\int_{l_s}^{l(1+s)} q(y) dy = P \quad (2.3)$$

Вводя замену переменных $x=l(\xi+1+2c)/2$, $q(y)=P\varphi(\xi)/l$ ($-1<\xi<1$), получим следующее интегральное уравнение задачи для искомой функции $\varphi(\xi)$:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\eta-\xi} + \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = 0 \quad (2.4)$$

$$K(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^4 \frac{D_j}{\eta+1+2s-f_j(\xi+1+2s)} \right\} + A[1+\operatorname{sgn}(\eta-\xi)]$$

$$f_j = s_j, f_{j+2} = t_j, D_j = p_j s_j l_j \bar{a}_1 / C$$

($j=1, 2$)

$$D_{j+2} = \frac{p_j t_j n_j \bar{a}_2}{C}, \quad C = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 p_j a_j \right\}, \quad A = -\frac{\pi l h}{CE_0 F_0}$$

Дополнительное условие (2.3) примет вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\eta) d\eta = 2 \quad (2.5)$$

При $s=\infty$ уравнение (2.4) дает решение задачи о передаче нагрузки от ребра жесткости к бесконечной упругой анизотропной пластине. При $s=0$ ребро выходит на край пластины.

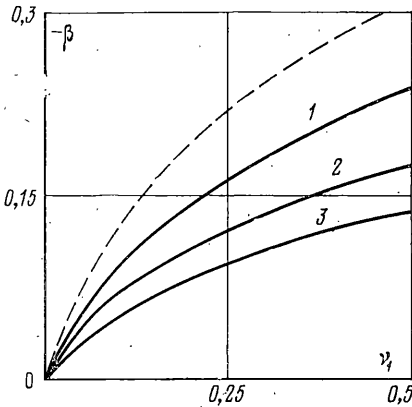
Уравнение (2.4) — сингулярное интегральное уравнение первого рода, имеющее особенность типа Коши при $\xi=\eta$. Ядро $K(\xi, \eta)$ при $s=0$ имеет неподвижную особенность при $\xi=\eta=-1$.

3. Определим характер поведения $\varphi(\xi)$ в окрестности концов $[-1, 1]$.

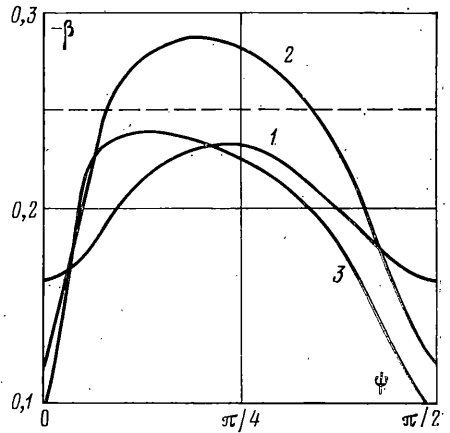
Будем предполагать, что существует непрерывная по Гельдеру на отрезке $[-1, 1]$ функция $\varphi_0(\xi)$ и две постоянные α, β ($-1<\alpha, \beta<0$), такие, что

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta \quad (3.1)$$

Если $s=0$, то $\alpha=\beta=-1/2$ [14]. Для определения α, β при $s=0$ используем асимптотические формулы поведения интеграла типа Коши в окрест-



Фиг. 1



Фиг. 2

ности концов линии интегрирования [14]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\eta-z} = \varphi_0(1) \frac{(z-1)^\alpha}{\sin \pi\alpha} - \varphi_0(-1) \frac{e^{-\pi i\beta} (z+1)^\beta}{\sin \pi\beta} + F_1(z)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\eta-\xi} = \varphi_0(1) \operatorname{ctg} \pi\alpha (1-\xi)^\alpha - \varphi_0(-1) \operatorname{ctg} \pi\beta (1+\xi)^\beta + F_2(\xi)$$

$$-1 < \xi < 1, z \in [-1, 1] \quad (3.2)$$

где $F_1(z)$, $F_2(\xi)$ ограничены всюду, за возможным исключением концов $[-1, 1]$, в окрестности которых

$$\lim_{\xi \rightarrow -1} (z+1)^{-\beta} F_1(z) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} (z-1)^{-\alpha} F_1(z) = 0$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -1} (\xi+1)^{-\beta} F_2(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-\alpha} F_2(\xi) = 0$$

С учетом формул (3.2) интегральное уравнение (2.4) представим в виде

$$\varphi_0(1) \operatorname{ctg} \pi\alpha (1-\xi)^\alpha - \varphi_0(-1) \operatorname{ctg} \pi\beta (1+\xi)^\beta -$$

$$- \varphi_0(-1) \frac{(1+\xi)^\beta}{\sin \pi\beta} \operatorname{Re} \left\{ e^{-\pi i\beta} \sum_{j=1}^4 D_j f_j^\beta \right\} + F_3(\xi) = 0$$

где поведение $F_3(\xi)$ аналогично поведению $F_2(\xi)$.

Умножая обе части последнего уравнения на $(1+\xi)^{-\beta}$ и устремляя $\xi \rightarrow -1$, а затем на $(1-\xi)^{-\alpha}$ и устремляя $\xi \rightarrow 1$, получим следующие характеристические уравнения для неизвестных постоянных α и β :

$$\cos \pi\beta + \operatorname{Re} \left\{ e^{-\pi i\beta} \sum_{j=1}^4 D_j (f_j)^\beta \right\} = 0, \quad \operatorname{ctg} \pi\alpha = 0, \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad (3.3)$$

Выполняя в формуле (3.3) предельный переход к случаю изотропной среды, получим формулу

$$\cos \pi \beta + \frac{2(1+\nu)}{3-\nu} (1-\beta)^2 + \frac{(3-\nu)(1+\nu)-8}{(3-\nu)(1+\nu)} = 0 \quad (3.4)$$

где ν — коэффициент Пуассона. (Ранее (3.4) получена в [11, 12].)

На фиг. 1, 2 приводятся результаты расчетов по формуле (3.3), (3.4) для стеклоэпоксидного (кривая 1), борэпоксидного (кривая 2) и графито-эпоксидного композита (кривая 3), а также для изотропного материала (штриховая линия); упругие постоянные материалов приведены ниже

$E_1 \cdot 10^{-6} \text{ Н / см}^2$	$E_2 \cdot 10^{-6} \text{ Н / см}^2$	$G_{xy} \cdot 10^{-6} \text{ Н / см}^2$	ν_1	μ_1	μ_2
7,8	2,6	1,25	0,25	2,2712i	0,7626i
40	4	1,5	0,25	5,0773i	0,6228i
40	1,6	0,8	0,25	6,9943i	0,7144i
40	40	16	0,25	1,0000i	1,0000i

Зависимость β от $\nu_1 = \nu_{xy}$ ($0 < \nu_1 < 0,5$) в предположении, что главное направление анизотропии E_1 совпадает с осью x , дана на фиг. 1.

Зависимость β от угла ψ , образованного главным направлением анизотропии E_1 с осью x , показывает фиг. 2.

4. Для численного решения уравнения (2.4) воспользуемся алгоритмом [15]. Имеют место следующие квадратурные формулы:

$$\int_{-1}^1 F(\xi, \eta) (1-\eta)^\alpha (1+\eta)^\beta d\eta \approx \sum_{k=1}^N W_k F(\xi, \eta_k) \quad (4.1)$$

$$\int_{-1}^1 (1-\eta)^\alpha (1+\eta)^\beta \frac{g(\eta) d\eta}{\eta - \xi} \approx \sum_{k=1}^N \frac{W_k}{\eta_k - \xi_j} g(\eta_k)$$

$$W_k = - \frac{2N + \alpha + \beta + 2}{(N+1)!(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(N + \alpha + 1) \Gamma(N + \beta + 1)}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \times \\ \times \frac{2^{\alpha+\beta}}{P_N^{(\alpha, \beta)}(t_k) P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(t_k)}$$

где η_k — корни уравнения

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(\eta_k) = 0 \quad (k = \overline{1, N}) \quad (4.2)$$

а ξ_j — корни уравнения

$$P_{N-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_j) = 0 \quad (j = \overline{1, N-1}) \quad (4.3)$$

Здесь $P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi)$ — полиномы Якоби. Выражения (4.1) дают возможность заменить уравнения (2.4), (2.5) системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции φ_0 в узловых точках η_k :

$$\sum_{k=1}^N W_k \varphi_0(\eta_k) \left[\frac{1}{\eta_k - \xi_j} + K(\xi_j, \eta_k) \right] = 0 \quad (j = \overline{1, N-1}) \quad (4.4)$$

$$\sum_{k=1}^N W_k \varphi_0(\eta_k) = 2$$

При $\alpha=\beta=-1/2$ и $\alpha=\beta=1/2$ полиномы Якоби совпадают с полиномами Чебышева соответственно первого и второго рода. В этом случае

$$\eta_k = \cos \frac{2k-1}{N} \pi, \quad W_k = \frac{\pi}{N} \quad (k=\overline{1, N}); \quad \xi_j = \cos \frac{\pi}{N} j \quad (j=\overline{1, N-1}) \quad (4.5)$$

Узлы и веса η_k, W_k, ξ_j квадратурных формул (4.1) находились с точностью до 10^{-10} [17].

Ниже приводятся результаты расчетов $\varphi(\xi)$ и интенсивности особенностей распределения контактных усилий взаимодействия

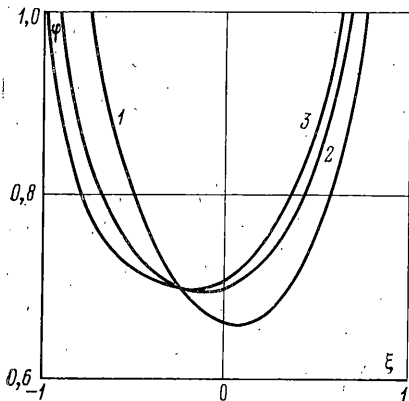
$$r_1 = \lim_{\xi \rightarrow -1} (1+\xi)^{-\alpha} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow -1} \varphi_0(\xi),$$

$$r_2 = \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-\beta} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 1} \varphi_0(\xi)$$

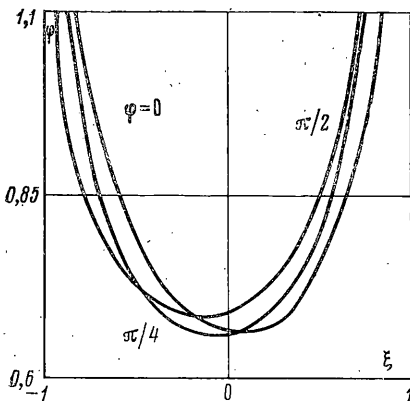
За независимые параметры задачи были приняты: $U = h l E_1 / E_0 F_0$ (относительная жесткость ребра), s — относительное расстояние от конца ребра до края пластины и ψ — угол, образованный главным направлением анизотропии E_1 с осью x .

Расчеты проводились для ортотропных материалов (см. фиг. 1.2).

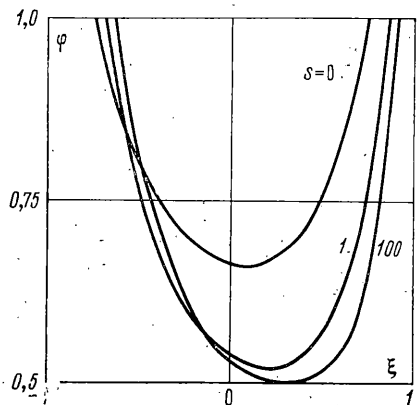
Результаты расчетов показали хорошую сходимость алгоритма. В таблице



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

приводятся для сравнения значения $r_1(N_1)$ и $r_2(N_2)$ в случае $s=0, \psi=0$ соответственно для стеклоэпоксидного, борэпоксидного и графито-эпоксидного композитов при различных значениях $U=0, 1, 10$. В системе (4.4) полагалось $N_{1,2}=10, 20, 30$.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов $\varphi(\xi)$ для различных материалов при $\psi=0, U=1, s=0$.

U	$N_1=10$	$N_1=20$	$N_1=30$	$N_2=10$	$N_2=20$	$N_2=30$
0	0,3069	0,3091	0,3104	0,7740	0,7705	0,7694
1	1,3079	1,3079	1,3050	0,6163	0,6156	0,6151
10	7,5937	8,2604	8,3539	0,2429	0,2557	0,2572
0	0,3125	0,2965	0,2926	0,7306	0,7267	0,7254
1	0,9859	0,9902	0,9908	0,6439	0,6416	0,6407
10	5,6905	6,2237	6,3641	0,3270	0,3336	0,3343
0	0,3245	0,2916	0,2820	0,7152	0,7110	0,7096
1	0,8875	0,8905	0,8918	0,6504	0,6475	0,6464
10	5,0260	5,5626	5,7408	0,3695	0,3742	0,3746

Фиг. 4, 5 показывают влияние величины ψ и s на характер распределения контактных усилий взаимодействия $\varphi(\xi)$ для стеклоэпоксидного композита при $U=1$ ($s=0$ на фиг. 4, $\psi=0$ на фиг. 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
2. Толкачев В. М. Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине.— Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4, с. 806.
3. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 632.
4. Александров В. М., Соловьев А. С. Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешностей тензоизмерений.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1, с. 122.
5. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 412.
6. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, т. 25, № 2, с. 15.
7. Саркисян В. С., Овсепян Л. О. Контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими креплениями.— Докл. АН АрмССР, 1971, т. 52, № 5, с. 273.
8. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереванск. ун-та, 1976. 536 с.
9. Reissner E. Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet.— Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1940, v. 26, No. 4, p. 300.
10. Goodier J. N., Hsu C. S. Transmission of tension from a bar to a plate.— J. Appl. Mech., 1954, v. 21, No. 2, p. 147.
11. Muki R., Sternberg E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheet.— Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 4, p. 737. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1968, т. 35, № 4, с. 124.)
12. Абрамян Б. Л. Об одной контактной задаче для полуплоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5, с. 4.
13. Лезницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
14. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
15. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations. In: Mechanics of fracture v. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Ed. G. C. Sih. Leyden, Noordhoff Internat. Publ. Co., 1973, p. 368.
16. Паргон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
17. Stroud A. H., Secrest D. Gaussian quadrature formulas. Englewood Cliffs. Prentice-Hall, 1966, 374 p.

Поступила в редакцию
17.IX.1979