МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1981

УДК 539.384:624.073

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ УПРУГОЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ

ДИДЕНКО Н. И.

(Ленинград)

Проблеме оптимального проектирования упругих пластин в последнее время уделяется большое внимание, однако в основном рассматриваются подобные задачи для круглых пластин. Из работ, относящихся к существенно двумерным задачам, можно указать исследования [1–5].

Ниже рассматривается задача оптимального управления упругой свободно опертой пластиной с целью минимизации энергии упругой деформации. Получены необходимые условия оптимальности и алгоритм расчета оптимального решения.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача минимизации энергии деформации

$$J=\iint\limits_G q\,w\,dx\,dy \tag{1.1}$$

для статического изгиба упругой свободно опертой пластины, занимающей односвязную область G с кусочно-гладкой границей ∂G. Уравнения равновесия для изгиба пластины переменной толщины $h(x, y)$, на которую действует равномерно распределенная нормальная нагрузка с интенсивностью q, имеет вид [6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[d\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]+\\+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]-q=0,\quad d=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь w — прогиб срединной поверхности пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Для свободно опертой пластины граничные условия имеют вид

$$w|_{\partial G}=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}=0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы внешней нормали и касательной к контуру пластины ∂G. В качестве функции управления выберем изгибную жесткость d, принадлежащую множеству M ограниченных измеримых функций, определяемому неравенством

$$0<d_1\leqslant \operatorname{vrai}\max d\leqslant d_2 \tag{1.4}$$

Присоединяя к (1.4) равенство изопериметрического типа

$$\iint\limits_G d^n\,dx\,dy=d_0{}^n\operatorname{mes} G \tag{1.5}$$

где d_0 — постоянная, удовлетворяющая неравенству $d_1<d_0<d_2$, n — целое положительное число, получим определение подмножества M^n.

2. Теорема существования. Сформулируем краевую проблему (1.2), (1.3) в виде интегрального тождества. Функцию $w\in W_2^{\circ 2}(G)$, где $W_2^{\circ 2}(G)$ — пространство функций, исчезающих на ∂G и обладающих в G интегрируемыми с квадратом обобщенными производными второго порядка, определим тождеством

$$\iint\limits_G d[\nabla^2\varphi\nabla^2 w-(1-\nu)L(\varphi,w)]dx\,dy=\iint\limits_G q\varphi\,dx\,dy \tag{2.1}$$

$$L(\varphi,w)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Тождество (2.1) справедливо для всех функций $\varphi\in W_2^{\circ 2}(G)$ и равносильно краевой задаче, совпадающей с исходной.

Перейдем к доказательству теоремы существования. Рассмотрим случай минимума J, считая, что $d\in M$. Учитывая тождество (2.1), можем переписать (1.1) в следующем виде:

$$J[d]=\iint\limits_G qw\,dx\,dy=\iint\limits_G d[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]dx\,dy$$

Следуя [7], будем считать, что d и w являются решением задачи (1.1) и (2.1) как допустимые функции и если для любой другой пары допустимых функций D и W:

$$\iint\limits_G qw\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_G qW\,dx\,dy \tag{2.2}$$

Пусть $d_n\in M$ — допустимые управления, а $w_n\in W_2^{\circ 2}(G)$ — соответствующие решения задачи (2.1). Так как последовательность d_n ограничена в $L_\infty(G)$, можно считать, что она слабо сходится к d в этом пространстве. Предельный элемент $d\in M$ в силу того, что множество M слабо компактно в себе. Обозначим через w решение задачи (2.1), соответствующее управлению d. Тогда будем иметь

$$J[d]=\iint\limits_G qw\,dx\,dy=\iint\limits_G d[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]dx\,dy=\iint\limits_G d_n[\nabla^2 w_n\nabla^2 w-$$

$$-(1-\nu)L(w_n,w)]dx\,dy=\iint\limits_G 2d_n(\nabla^2 w_n\nabla^2 w-(1-\nu)L(w_n,w)]dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_G d[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]dx\,dy$$

Но

$$J[d_n]=\iint\limits_G d_n[(\nabla^2 w_n)^2-(1-\nu)L(w_n,w_n)]dx\,dy$$

Объединяя оба эти равенства, после простых преобразований получим

$$J[d_n]-J[d]=\iint\limits_G d_n\{[\nabla^2(w_n-w)]^2-(1-\nu)L(w_n-w,w_n-w)\}dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_G (d_n-d)[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]dx\,dy \tag{2.3}$$

Выражение $(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w, w)$ можно представить в виде суммы неотрицательных слагаемых

$$(w_{nn}+\nu w_{\tau\tau})^2+(1-\nu^2)w_{\tau\tau}{}^2+2(1-\nu)w_{n\tau}{}^2>0 \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4) и слабую сходимость $d_n\to d$, в пределе из (2.3) получим

$$J[d]\leqslant \varliminf_{n\to\infty} J[d_n] \tag{2.5}$$

т. е. функционал $J[d]$ слабо полунепрерывен снизу. Пусть

$$j=\inf_{d\in M} J[d] \tag{2.6}$$

и пусть d_n — минимизирующая последовательность для $J[d]$, тогда $\lim J[d_n]=j$ при $d_n\to d$.

Согласно определению, для любого $d_n\in M$, имеем $J[d]\geqslant j$. С другой стороны, в силу (2.5) $J[d]\leqslant j$ и $J[d]=j$, т. е. функционал (1.1) достигает минимума.

Если теперь сузим класс допустимых управлений до множества M_1, то доказательство останется в силе, так как последовательность d_n, слабо сходящаяся к d в $L_\infty(G)$, слабо сходится к тому же пределу и в $L_1(G)$, причем предельный элемент $d\in M_1$, что вытекает из определения слабой сходимости и ограничения (1.5). Но при $n>1$ доказательство не проходит, так как сфера (1.5) в пространстве $L_n(G)$ не обладает свойством слабой компактности. Таким свойством обладает шар

$$\iint_G d^n\,dx\,dy\leqslant d_0{}^n \operatorname{mes} G, \quad d_1\leqslant d_0\leqslant d_2 \tag{2.7}$$

и существование решения исходной задачи можно доказать при более слабом ограничении (2.7).

3. Необходимые условия стационарности и необходимое условие Вейерштрасса. Необходимые условия стационарности для функционала (1.1) совпадают с необходимыми условиями стационарности функционала:

$$\begin{gathered} I=-\iint_G qw\,dx\,dy+\iint_G \{\eta d^n-\mu[(d_2-d)(d-d_1)-d_*{}^2]\}\,dx\,dy+ \\ +\iint_G \lambda\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(d\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)+\right. \\ \left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[d\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]-q\right\}dx\,dy \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь через λ, μ и η обозначены множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (1.2), (1.4) и (1.5); ограничение (1.4) эквивалентно равенству

$$(d_2-d)(d-d_1)-d_*{}^2=0 \tag{3.2}$$

Необходимые условия стационарности имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[d\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[d\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right)\right]+ \\ +2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(d\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}\right)-q=0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

при условиях на границе

$$\lambda/_{\partial G}=0,\ \Lambda_n/_{\partial G}=0 \tag{3.4}$$

и уравнения

$$\mu d_*=0$$

$$\eta n d^{n-1}+\lambda_{xx}(w_{xx}+\nu w_{yy})+2(1-\nu)\lambda_{xy}w_{xy}+$$
$$+\lambda_{yy}(w_{yy}+\nu w_{xx})+\mu(2d-d_1-d_2)=0 \tag{3.5}$$

Здесь через Λ_n обозначен «фиктивный изгибающий момент»

$$\Lambda_n=-d\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2\lambda}{\partial\tau^2}\right)$$

Сравнивая исходные уравнения (1.2), (1.3) с уравнениями для λ (3.3), (3.4), приходим к выводу, что $\lambda=w$.

Ограничение (2.7) при $n>1$ можно заменить эквивалентным равенством

$$\iint\limits_G d^n\,dx\,dy+d_*^2\operatorname{mes}G=d_0^n\operatorname{mes}G \tag{3.6}$$

Здесь введен дополнительный параметр ($d_*\geqslant0$); соответствующее ему условие стационарности имеет вид $\eta d_*=0$.

Переходим к выводу условия Вейерштрасса. Для того, чтобы функционал J достигал минимума, необходимо выполнение неравенства $\Delta J\geqslant0$ (или неравенства $E\leqslant0$) почти в каждой точке области G, где E — функция Вейерштрасса, определяемая равенством

$$\Delta(-J)=\iint\limits_G E\,dx\,dy \tag{3.7}$$

Приращение функционала равно

$$\Delta J=J[D,\ W]-J[d,\ w] \tag{3.8}$$

Здесь через D, W обозначены допустимые величины, а через d, w — оптимальные. Равенство (3.7) интегрированием по частям и с учетом необходимых условий стационарности (3.3), (3.4) можно представить в виде

$$\Delta(-J)=\iint\limits_G \eta\Delta d\sum_{i=1}^{n}d^{n-i}D^{i-1}dx\,dy+$$
$$+\iint\limits_G \Delta d[\nabla^2W\nabla^2\lambda-(1-\nu)L(W,\lambda)]dx\,dy \tag{3.9}$$

Дальнейшее преобразование функции E проводится по обычной схеме, следуя [8]. Перейдем к сильным локальным вариациям управления d. Введем полоску варьирования m и определим допустимое управление формулой

$$D(x,y)=\begin{cases} d(x,y), & \text{если}\quad (x,y)\in m\\ d(x,y)+\Delta d, & \text{если}\quad (x,y)\in m\end{cases}$$

Пусть $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к полоске; полоска стягивается с сохранением подобия к своему центру (дополнительными рассуждениями можно показать, что к наиболее сильным необходимым условиям экстремума приводит варьирование управляющей функции в узкой полоске-системе подобных эллипсов, стягивающихся к центру). Предельные значения на границе полоски функции прогиба w, ее нормальной производной, нормального изгибающего момента M_n и обобщенной перерезывающей силы $N_n+\partial H_{nt}/\partial S$ совпадают с соответствующими оптимальными значениями в данном месте

$$W(x,y)=w(x,y),\quad \frac{\partial W(x,y)}{\partial n}=\frac{\partial w(x,y)}{\partial n} \tag{3.10}$$

$$-D(W_{nn}+\nu W_{\tau\tau})=-d(w_{nn}+\nu w_{\tau\tau})$$

$$N_n(D,W)+\frac{\partial H_{nt}(D,W)}{\partial s}=N_n(d,w)+\frac{\partial H_{nt}(d,w)}{\partial s}$$

Формулы (3.10) дают возможность исключить из правой части равенства (3.9) производные W с точностью до величин порядка $o(1)$, так как именно с такой точностью справедливы равенства (3.10). Последнее равенство в (3.10) остается неиспользованным, так как выражение для приращения функционала не содержит третьих производных от прогиба w. После исключения переменной W приращение функционала запишется в виде

$$\Delta(-J)=\iint\limits_G \Delta d\left\{\eta\sum_{i=1}^{n} d^{n-i}D^{i-1}+[\nabla^2 w\nabla^2\lambda-(1-\nu)L(w,\lambda)]\right\}dn\,dt-$$

$$-\iint\limits_G \frac{(\Delta d)^2}{D}(w_{nn}+\nu w_{\tau\tau})(\lambda_{nn}+\nu\lambda_{\tau\tau})\,dn\,dt$$

Необходимое условие сильного относительного минимума, выполняющееся почти в каждой точке области G, с учетом того, что $\lambda=w$, имеет вид

$$E=\Delta d\left\{\eta\sum_{i=1}^{n} d^{n-i}D^{i-1}+[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]-\frac{\Delta d}{D}(w_{nn}+\nu w_{\tau\tau})^2\right\}\leqslant 0 \tag{3.11}$$

Пусть $d_*=0$, $\eta\neq 0$. Исследуя выражение для функции Вейерштрасса, приходим к выводу, что если главные значения m_1, m_2 тензора моментов имеют разные знаки, то критическое положение полоски отвечает обращению в нуль составляющей M_n; в противном случае полоска должна быть ориентирована таким образом, чтобы M_n было наименьшим главным значением.

Рассмотрим случай, когда оптимальное управление равно d_1. Из неравенства (3.11) следует, что

$$\eta\sum_{i=1}^{n} d_1^{n-i}D^{i-1}+[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]-\frac{(D-d_1)}{D}(w_{nn}+\nu w_{\tau\tau})^2\leqslant 0 \tag{3.12}$$

Максимум левой части последнего неравенства достигается при $D=d_1$ (ясно, что $\eta<0$). Отсюда следует, что для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы

$$\eta n d_1^{n-1}+[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]\leqslant 0 \tag{3.13}$$

Рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что $d=d_2$, если

$$\eta n d_2^{n-1}+[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]\geqslant 0 \tag{3.14}$$

В непрерывном режиме оптимальное управление удовлетворяет уравнению

$$\eta n d^{n-1}+(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,\ w)=0 \tag{3.15}$$

Откуда $\eta=-[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,\ w)]/(nd^{n-1})$.

Функция Вейерштрасса в этом случае имеет вид

$$E=-\frac{\Delta d}{nd^{n-1}}\left\{\frac{(w_{nn}+\nu w_{\tau\tau})^2}{D}\left[D\sum_{i=1}^{n} d^{n-i}D^{i-1}-nd^n\right]+\right.$$

$$\left.+[w_{\tau\tau}^2(1-\nu^2)+2(1-\nu)w_{n\tau}^2]\left[\sum_{i=1}^{n} d^{n-i}D^{i-1}-nd^{n-1}\right]\right\}$$

В данной задаче непрерывный режим возможен, так как при $d<D$ $(\Delta d>0)$ выражения в квадратных скобках положительны, а при $d>D$ $(\Delta d<0)$ — отрицательны. Случай $\eta=0$ приводит к неравенству

$$\Delta d\left\{\frac{d}{D}(w_{nn}+\nu w_{\tau\tau})^2+(1-\nu^2)w_{\tau\tau}^2+2(1-\nu)w_{n\tau}^2\right\}\leqslant 0 \tag{3.16}$$

откуда $d=d_2$.

Рассматривая условия Вейерштрасса и Эрдмана — Вейерштрасса [1] вблизи линии раздела областей с различными значениями управления d, приходим к выводу, что соседство дискретных режимов с постоянным значением оптимального управления $d=d_1$ и $d=d_2$ невозможно, т. е. между областями с постоянным значением изгибной жесткости должна обязательно присутствовать область с непрерывным изменением $d=d(x,\ y)$.

Следуя [8], легко доказать, что необходимые условия (3.13)—(3.16) являются и достаточными условиями, хотя они были получены для локальных вариаций.

4. Алгоритм расчета оптимального решения. Приведем алгоритм построения оптимального решения. Ограничение на управление примем в форме (1.4) и (3.6). Для приращения функционала легко получить формулу

$$\Delta J=-\iint_G \Delta d[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)+\eta n d^{n-1}]dx\,dy+$$

$$+\iint_G D[(\nabla^2(\Delta w))^2-(1-\nu)L(\Delta w,\Delta w)]dx\,dy-$$

$$-\eta\iint_G \Delta d\left[\sum_{i=1}^{n} d^{n-i}D^{i-1}-nd^{n-1}\right]dx\,dy-\eta\Delta d_*\operatorname{mes} G(d_*+D_*) \tag{4.1}$$

Пусть заданы измеримые управления $d=d_k$ и $d_*=d_{k_*}$, удовлетворяющие ограничениям (1.4) и (3.6), и $w=w_k$ — соответствующее решение краевой задачи (1.2), (1.3). Требуется указать правило выбора d_{k+1}, $d_{(k+1)}$

[1] Условие Эрдмана — Вейерштрасса вдоль линии раздела имеет вид

$$[w_{nn}\Lambda_n-M_\tau\lambda_{\tau\tau}-2\lambda_{n\tau}H_{n\tau}+\eta d^n]_-^+=0$$

и соответствующего решения w_{k+1}. Пусть $a_{k+1}=a_k+\rho_k(B_k-a_k)$ и $a_{(k+1)_*}=$ $=a_{k_*}+\rho_k(B_{k_*}-a_{k_*})$, где $\rho_k\in[0,(d_0^n-d_1^n)^{1/2}]$, причем $0\leqslant\rho_k\leqslant 1$. Из (4.1) получим

$$J[d_k+\rho_k(B_k-d_k)]-J[d_k]=-\rho_k\iint\limits_G(B_k-d_k)[(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+$$

$$+\eta n d_k^{n-1}]dx\,dy+\iint\limits_G[d_k+\rho_k(B_k-d_k)][(\nabla^2(\Delta w_k))^2-(1-\nu)L(\Delta w_k,\Delta w_k)]dxdy-$$

$$-2\eta\rho_k(B_{k_*}-d_{k_*})\operatorname{mes} G d_{k_*}-\eta\rho_k^2(B_{k_*}-d_{k_*})^2\operatorname{mes} G-\eta\rho_k\iint\limits_G(B_k-d_k)\times \tag{4.2}$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^n d_k^{n-i}[d_k+\rho_k(B_k-d_k)]^{i-1}-nd_k^{n-1}\right\}dx\,dy$$

При построении минимизирующей последовательности члены последовательности B_k следует выбирать согласно правилу

$$\iint\limits_G(B_k-B)\{(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}\}dx\,dy\geqslant 0$$

$$\forall B\in[d_1,d_2],\quad \eta_k(B_{k_*}-B_*)B_*\geqslant 0,\quad \forall B_*\in[0,(d_0^n-d_1^n)^{1/2}] \tag{4.3}$$

Множитель η_k $(\eta_k\leqslant 0)$ надо выбирать так, чтобы было выполнено условие $\|B_k\|_{L_n(G)}\leqslant d_0$; тогда элемент d_{k+1} будет удовлетворять ограничению (3.6). Из второго неравенства (4.3) следует, что $B_{k_*}=0$. Пусть в первом неравенстве (4.3) $B=d_k$, тогда

$$\iint\limits_G(B_k-d_k)\{(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}\}dx\,dy\geqslant 0$$

Если элемент B_k, выбранный по условию (4.3), совпадает с d_k, тогда элементы d_k, w_k образуют допустимую пару, удовлетворяющую условию

$$\iint\limits_G(d_k-B)\{(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}\}dx\,dy\geqslant 0 \tag{4.4}$$

Но это последнее неравенство равносильно условию Вейерштрасса для элементов d_k, w_k, которые являются тогда решением задачи. Ясно, что если элемент B_k совпадает с d_k только для тех точек, где $(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,$ $w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}\neq 0$, то пара элементов d_k, w_k также останется оптимальной. Из формулы (4.2) следует, что при этом $\Delta J\geqslant 0$.

Рассмотрим случай, когда элемент B_k, выбранный по условию (4.3) не совпадает с d_k даже для тех точек, где $(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,$ $w_k)+$ $+\eta_k n d_k^{n-1}\neq 0$. Для этого оценим интегралы в (4.2). Из (2.1) легко получить равенство

$$\iint\limits_G\Delta d[\nabla^2(\Delta w)\nabla^2 w-(1-\nu)L(\Delta w,w)]dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_G(d+\Delta d)[(\nabla^2(\Delta w))^2-(1-\nu)L(\Delta w,\Delta w)]dx\,dy=0$$

из которого следует неравенство

$$d_1\langle\!\langle \Delta w_k\rangle\!\rangle^2 \leqslant \|\Delta d_k\|_{L_\infty(G)}\langle\!\langle \Delta w_k\rangle\!\rangle\langle\!\langle w_k\rangle\!\rangle$$

откуда получим

$$\langle\!\langle \Delta w_k\rangle\!\rangle \leqslant \frac{1}{d_1}\|\Delta d_k\|_{L_\infty(G)}\langle\!\langle w_k\rangle\!\rangle$$

Здесь двойными угловыми скобками $\langle\!\langle w_k\rangle\!\rangle$ обозначена норма $\langle\!\langle w_k\rangle\!\rangle = \sqrt{\langle w_k, w_k\rangle}$, порождаемая скалярным произведением двух допустимых функций поперечных перемещений

$$\langle w_1, w_2\rangle = \iint\limits_G [\nabla^2 w_1 \nabla^2 w_2 - (1-\nu)L(w_1, w_2)]\,dx\,dy \tag{4.5}$$

Легко показать, что $\langle w_1, w_2\rangle$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Но

$$\iint\limits_G d[(\nabla^2(\Delta w_k))^2 - (1-\nu)L(\Delta w_k, \Delta w_k)]\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant d_2\langle\!\langle \Delta w_k\rangle\!\rangle^2 \leqslant \frac{d_2}{d_1^2}\|\Delta d_k\|^2_{L_\infty(G)}\langle\!\langle w_k\rangle\!\rangle^2$$

Имеем оценку (см. [8]):

$$(D-d)\left[\sum_{i=1}^{n} d^{n-i}D^{i-1} - nd^{n-1}\right] \leqslant (D-d)^2\frac{n(n-1)}{2}d_2^{n-2}$$

Тогда разность $J[d_k] - J[d_k + \rho_k(B_k - d_k)]$ оценивается снизу величиной

$$\rho_k\iint\limits_G (B_k - d_k)\{(\nabla^2 w_k)^2 - (1-\nu)L(w_k, w_k) + \eta_k n d_k^{n-1}\}\,dx\,dy -$$

$$-\rho_k^2\frac{d_2}{d_1^2}\|B_k - d_k\|^2_{L_\infty(G)}\langle\!\langle w_k\rangle\!\rangle^2 + \eta_k\rho_k^2\|B_k - d_k\|^2_{L_\infty(G)}\frac{n(n-1)}{2}d_2^{n-2}\,\mathrm{mes}\,G -$$

$$-2\eta_k\rho_k d_{k_*}^2\,\mathrm{mes}\,G + \eta_k\rho_k^2 d_{k_*}^2\,\mathrm{mes}\,G$$

Пусть

$$\rho_k^\circ = \left[\frac{1}{2}\iint\limits_G (B_k - d_k)\{(\nabla^2 w_k)^2 - (1-\nu)L(w_k, w_k) + \eta_k n d_k^{n-1}\}\,dx\,dy - \right.$$

$$\left. -\eta_k d_{k_*}^2\,\mathrm{mes}\,G\right]\left\{\left[\frac{d_2}{d_1^2}\langle\!\langle w_k\rangle\!\rangle^2 - \eta_k\frac{n(n-1)}{2}d_2^{n-1}\,\mathrm{mes}\,G\right]\|B_k - d_k\|^2_{L_\infty(G)} - \right.$$

$$\left. -\eta_k d_{k_*}^2\,\mathrm{mes}\,G\right\}^{-1} \tag{4.6}$$

Параметр ρ_k будем выбирать по правилу

$$\rho_k = \min(\rho_k^\circ, 1) \tag{4.7}$$

Предлагаемая схема построения решения состоит в следующем: выбираем элементы $B_k \in [d_1, d_2]$, $B_{k_*} \in [0, (d_0^n - d_1^n)^{1/2}]$, удовлетворяющие ограничению (4.3) и условию $\|B_k\|_{L_n(G)} \leqslant d_0$ (последнее ограничение достигается выбором достаточно большого по абсолютной величине η_k); определяем

ρ_k° по формуле (4.6) и ρ_k по формуле (4.7); вычисляем $d_{k+1}=d_k+\rho_k(B_k-d_k)$, $d_{(k+1)_*}=d_{k_*}+\rho_k(B_{k_*}-d_{k_*})$ и находим w_{k+1} из краевой задачи (2.1).

Докажем сходимость схемы. Рассмотрим случай $\rho_k^\circ>1$ $(\rho_k=1)$. Тогда разность $J[d_k]-J[d_k+\rho_k(B_k-d_k)]$ оценивается величиной

$$J[d_k]-J[d_k+\rho_k(B_k-d_k)]\geqslant\iint\limits_G(B_k-d_k)\{(\nabla^2w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,\ w_k)+$$
$$+\eta_k n d_k^{n-1}\}dx\,dy-\|B_k-d_k\|^2_{L_\infty(G)}\left[\frac{d_2}{d_1^2}\langle\langle w_k\rangle\rangle^2-\right.$$
$$\left.-\eta_k\frac{n(n-1)}{2}d_2^{n-2}\operatorname{mes}G\right]-\eta_k d_{k_*}^2\operatorname{mes}G\geqslant$$
$$\geqslant\|B_k-d_k\|^2_{L_\infty(G)}\left[\frac{d_2}{d_1^2}\langle\langle w_k\rangle\rangle^2-\eta_k\frac{n(n-1)}{2}d_2^{n-2}\operatorname{mes}G\right]-\eta_k d_{k_*}^2\operatorname{mes}G$$

Последняя оценка вытекает из определения (4.6) и неравенства $\rho_k^\circ>1$.

Случай $\rho_k^\circ<1$ $(\rho_k=\rho_k^\circ)$. Имеем оценку

$$J[d_k]-J[d_k+\rho_k^\circ(B_k-d_k)]\geqslant\left\{\iint\limits_G(B_k-d_k)[(\nabla^2w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+\right.$$
$$\left.+\eta_k n d_k^{n-1}]dx\,dy-2\eta_k d_{k_*}^2\operatorname{mes}G\right\}^2\left\{4\|B_k-d_k\|^2_{L_\infty(G)}\left[\frac{d_2}{d_1^2}\langle\langle w_k\rangle\rangle^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\eta_k\frac{n(n-1)}{2}d_2^{n-2}\operatorname{mes}G\right]-4\eta_k d_{k_*}^2\operatorname{mes}G\right\}^{-1}$$

Итак, последовательность $J[d_k]$ убывающая, но в силу того, что $J[d_k]\geqslant\geqslant0$ для всех k, справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\{J[d_k]-J[d_{k+1}]\}=0$$

Отсюда, учитывая полученные выше оценки, имеем (при $\rho_k=1$):

$$\lim_{k\to\infty}\|B_k-d_k\|_{L_\infty(G)}=0,\quad\lim_{k\to\infty}\eta_k d_{k_*}^2=0\tag{4.8}$$

А при $\rho_k=\rho_k^\circ$:

$$\lim_{k\to\infty}\eta_k d_{k_*}^2=0,\quad\lim_{k\to\infty}\iint\limits_G(B_k-d_k)[(\nabla^2w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}]dx\,dy=0\tag{4.9}$$

Случай $\lim\eta_k=0$, если $k\to\infty$ тривиален, но тогда $\lim d_{k_*}=0$ при $k\to\infty$. Это означает, что оптимальное управление удовлетворяет исходному ограничению (1.5), хотя при доказательстве теоремы существования приходилось вводить ослабленное ограничение в виде (2.7).

Перейдем к случаю (4.9). Для этого получим необходимые оценки. В силу (4.3) будем иметь

$$\iint\limits_G d_k[(\nabla^2w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}]dx\,dy+$$
$$+\iint\limits_G(B_k-d_k)[(\nabla^2w_k)^2-(1-\nu)L(w_k,w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}]dx\,dy\geqslant$$

$$\geqslant \iint_G B[(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k, w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}]\,dx\,dy, \quad \forall B\in[d_1, d_2] \tag{4.10}$$

или, учитывая (2.1), найдем

$$\iint_G q w_k\,dx\,dy+\iint_G \eta_k n d_k^{n-1}\,dx\,dy+$$

$$+\iint_G (B_k-d_k)[(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k, w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}]\,dx\,dy\geqslant$$

$$\geqslant \iint_G B[(\nabla^2 w_k)^2-(1-\nu)L(w_k, w_k)+\eta_k n d_k^{n-1}]\,dx\,dy, \forall B\in[d_1, d_2]$$

В силу ограниченности последовательности d_k в $L_\infty(G)$ из нее можно извлечь слабо сходящуюся последовательность. Ясно, что d_k стремится слабо к d и в $L_n(G)$. Тогда для $B\in L_n(G)$ и $d_k\in L_n(G)$ справедлива оценка

$$\iint_G B d_k^{n-1}\,dx\,dy \leqslant \|B\|_{L_n G}\|d_k\|_{L_n(G)}^{n-1}$$

Итак, переходя к пределу в (4.10), для случая (4.9) с учетом последнего неравенства будем иметь

$$\iint_G q w\,dx\,dy\geqslant \iint_G B[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w, w)]\,dx\,dy+$$

$$+\eta n[-\lim_{k\to\infty}\|d_k\|_{L_n(G)}^{n}+\|B\|_{L_n G)}\lim_{k\to\infty}\|d_k\|_{L_n(G)}^{n-1}]= \tag{4.11}$$

$$=\iint_G B[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w, w)]\,dx\,dy+$$

$$+\eta n\lim_{k\to\infty}\|d_k\|_{L_n(G)}^{n-1}[\|B\|_{L_n(G)}-\lim_{k\to\infty}\|d_k\|_{L_n(G)}]$$

Полагая $B=d$ и используя неравенство

$$\lim_{k\to\infty}\|d_k\|_{L_n(G)}\geqslant\|d\|_{L_n(G)} \tag{4.12}$$

получим

$$\iint_G q w\,dx\,dy\geqslant \iint_G d[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w, w)]\,dx\,dy \tag{4.13}$$

Переходя к пределу в равенстве

$$\iint_G d_k[(\nabla^2(w_k-w))^2-(1-\nu)L(w_k-w, w_k-w)]\,dx\,dy=$$

$$=\iint_G q w_k\,dx\,dy-\iint_G q w\,dx\,dy+$$

$$+\iint_G d_k[(\nabla^2 w)^2-(1-\nu)L(w,w)]dx\,dy$$

и учитывая (4.13), придем к равенству

$$\lim_{k\to\infty}\iint_G d_k[(\nabla^2(w_k-w))^2-(1-\nu)L(w_k-w,w_k-w)]dx\,dy=0$$

Так как $d_k>d_1$, то $\lim \langle\langle w_k-w\rangle\rangle=0$ при $k\to\infty$.

Пара d, w является допустимой; действительно, имеем

$$\iint_G d_k[(\nabla^2 w_k,\nabla^2\varphi)-(1-\nu)L(w_k,\varphi)]dx\,dy=$$

$$=\iint_G q\varphi\,dx\,dy,\quad \forall\varphi\in W_2^{02}(G)$$

или

$$\iint_G d_k[\nabla^2(w_k-w)\nabla^2\varphi-(1-\nu)L(w_k-w,\varphi)]dxdy+$$

$$+\iint_G d_k[\nabla^2 w\nabla^2\varphi-(1-\nu)L(w,\varphi)]dx\,dy=\iint_G q\varphi\,dx\,dy$$

Принимая во внимание изложенное выше и используя слабую сходимость $d_k\to d$, в пределе при $k\to\infty$ получим

$$\iint_G d[\nabla^2 w\nabla^2\varphi-(1-\nu)L(w,\varphi)dx\,dy=\iint_G q\varphi\,dx\,dy \tag{4.14}$$

что и требовалось доказать.

Из неравенства (4.11) и равенства (4.14) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\|d_k\|_{L_n(G)}=\|d\|_{L_n(G)} \tag{4.15}$$

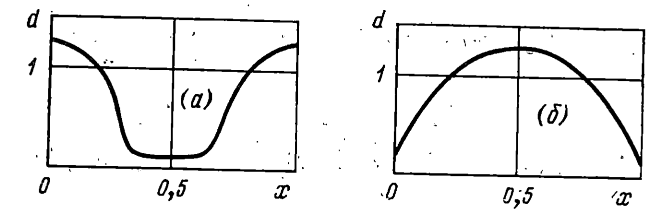
и в (4.12) будет равенство. Но d — слабый предел последовательности d_k, равенство (4.15) означает, что эта последовательность сильно сходится в $L_n(G)$.

5. Результаты расчетов. Описанный в п. 4 алгоритм расчета оптимального решения задачи реализован в виде программы для ЭВМ. С применением этой программы проводились расчеты оптимальных распределений жесткостей для свободно опертой пластины при различных значениях параметров d_1, d_2. Для удобства проведения и использования результатов расчетов используются безразмерные переменные $x'=x/S^{1/2}$, $y'=y/S^{1/2}$, $w'=w/S^{1/2}$, $h'=hS/V$, $q'=12(1-v^2)S^{9/2}E^{-1}V^{-3}q$ (в дальнейшем штрихи опускаются). Введение переменных позволяет записать соотношение (1.5) в виде

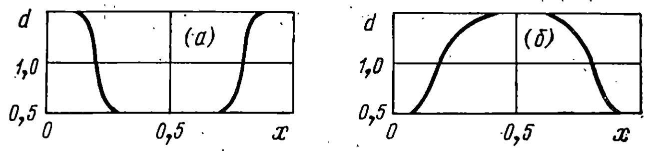
$$\iint_G d^n\,dx\,dy=d_0^n$$

Соотношение (1.4) при этом не изменится.

Расчеты проводились для квадратных пластин ($0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ для G). Нагрузка q полагалась постоянной $q(x,y)=1$. Вся область разбивалась прямоугольной сеткой 15×15. Для данной сетки различие между величинами прогибов (в случае пластин постоянной толщины), полученных в результате численных расчетов аналитическим методом [6], не превышает 5,4%. При проведении расчетов начальное распределение цилиндрической жесткости принималось постоянным $d(x,y)=1$ и в соответствии с ним определялось начальное приближение для функции w. При фиксированной жесткости d каждый раз решалась вариационная задача (1.2), (1.3)



Фиг. 1



Фиг. 2

методом локальных вариаций с локально оптимальным шагом варьирования [3], причем максимальный шаг варьирования принимался равным 10^{-9}.

На фиг. 1 показано полученное за 59 итераций для $d_1=0{,}5$, $d_2=1{,}5$ распределение жесткостей оптимальной пластинки в сечениях $y=0$ (фиг. 1, *а*) и $y=0{,}5$ (фиг. 1, *б*). Расчеты показывают, что материал пластинки концентрируется в центре и у углов, образованных опертыми краями. В этих областях жесткость пластинки достигает максимума, т. е. $d=d_2$. В середине шарнирно опертых краев использование материала оказывается менее эффективным, здесь $d=d_1$, что совпадает с результатами, приведенными в [3]. Выигрыш по функционалу J за счет оптимизации в данном случае составляет 10,65%.

На фиг. 2 показано оптимальное распределение жесткостей, полученное за 300 итераций, отвечающее значениям параметров $d_1=0{,}125$, $d_2=3{,}375$ в сечениях $y=0$ (фиг. 2, *а*) и $y=0{,}5$ (фиг. 2, *б*). Выигрыш по функционалу за счет оптимизации в данном случае составляет 10,42%.

Автор благодарит К. А. Лурье за постановку задачи и помощь при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов Ю. А.* Некоторые задачи оптимального проектирования упругих пластин при наличии ограничений.– В сб.: Материалы Всес. конф. «Проблемы оптимизации в механике твердого деформируемого тела». Вып. 1. Вильнюс: Вильнюск. инж.-строит. ин-т, 1974, с. 10.
2. *Баничук Н. В.* Об оптимальных формах упругих пластин в задачах изгиба.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5, с. 180.
3. *Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Миронов А. А.* Задачи оптимизации с локальными критериями качества в теории изгиба пластин.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 124.
4. *Armand J.-L.* Minimum mass design of a plate-like structure for specified fundamental frequency.— AIAA Journal, 1971, v. 9, No. 9, p. 1739. (Рус. перев.: Ракетная техника, 1971, т. 9, № 9, с. 94.)
5. *Komkov V.* Optimal control theory for the damping of vibrations of simple elastic systems. Berlin, Springer, 1972. (Рус. перев.: М.: Мир, 1975. 158 с.)
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
7. *Cea J., Malanowski K.* An example of a max-min problem in partial differential equations.— SIAM J. Control, 1970, v. 8, No. 3, p. 305.
8. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.

Поступила в редакцию
12.IX.1979