

УДК 539.375

К ТЕОРИИ ЗАМЕДЛЕННОГО РАЗРУШЕНИЯ

БОЛОТИН В. В.

(Москва)

Как известно [1–3], процесс замедленного разрушения (например, под действием постоянно приложенных или циклических нагрузок) может быть представлен в виде двух качественно отличных стадий. На первой стадии происходит накопление рассеянных повреждений — субмикротрещин и микротрещин во всем напряженном объеме материала. В конце этой стадии создаются условия для появления одной или нескольких макроскопических (магистральных) трещин, развитие одной из которых приводит в конце второй стадии к разрушению тела. Таким образом, процесс разрушения разделяется на подготовительную (инкубационную) стадию и стадию развития макроскопических трещин. Механизмы этих стадий существенно различны и должны описываться существенно различными математическими моделями. Для того чтобы прогнозировать долговечность элементов конструкций и деталей машин, необходимо совместное рассмотрение обеих стадий разрушения.

Первая попытка совместного рассмотрения была предпринята, по-видимому, в [4], где предложена феноменологическая модель двух стадий усталостного разрушения. Эта модель основана на введении двух феноменологических мер повреждения, одна из которых трактовалась как мера разрыхления — мера подготовки материала к образованию усталостной трещины. Вторая мера трактовалась как характеристика роста магистральной усталостной трещины. Этот подход был предложен для того, чтобы объяснить и описать известный опытный факт — отклонение от линейного закона суммирования повреждений при изменении порядка приложения нагрузок различной интенсивности. В публикуемой работе концепция двух стадий разрушения получает дальнейшее развитие и доводится до соотношений, позволяющих прогнозировать долговечность в условиях длительного и циклического нагружения. Центральным элементом развиваемой теории является новая интерпретация феноменологической меры повреждения для инкубационной стадии. Эта мера связывается с числом зародышей макроскопических трещин, образовавшихся к рассматриваемому моменту времени в некотором эталонном объеме. Такая интерпретация позволяет установить связь между историей нагружения и последовательностью возникновения макроскопических трещин.

Дополняя модель инкубационной стадии известными соотношениями, описывающими процесс роста макроскопических трещин вплоть до достижения ими критических размеров, получаем возможность полного описания процесса разрушения, а также прогнозирования долговечности при длительно действующих и циклических нагрузках.

1. Пусть тело объемом V подвергается длительному действию внешних нагрузок. Это могут быть, например, постоянные или медленно изменяющиеся во времени нагрузки; это могут быть циклические нагрузки, максимальные значения которых таковы, что разрушению предшествует весьма большое число циклов или блоков нагружения. Чтобы провести совместное рассмотрение перечисленных типов нагрузок, будем полагать, что параметры циклических нагрузок изменяются достаточно медленно (по сравнению с продолжительностью каждого цикла или блока), так что процесс циклического нагружения можно приближенно рассматривать как протекающий непрерывно в «медленном» времени t . Если это условие не выполняется, то процесс циклического нагружения должен быть рассмотрен отдельно в рамках разностной модели — аналога модели с непре-

рывным временем. Для упрощения дальнейшего изложения ограничимся моделями с непрерывным временем.

Под действием внешних нагрузок в теле возникает поле номинальных напряжений, которое будем описывать при помощи некоторого векторного процесса $s(x, t)$, $x \in V$, $0 \leq t < \infty$. Здесь x — радиус-вектор точек тела. Поскольку t — медленное время, то в число компонент процесса $s(x, t)$ могут быть включены все характеристики цикла или блока нагружения, влияющие на процессы накопления повреждений и роста трещин: максимальные и минимальные напряжения цикла, параметры внутренних экстремумов цикла, продолжительность каждого цикла и т. п.

Разобьем тело на части, размеры каждой из которых достаточно велики по сравнению с характерным масштабом микронеоднородности материала — размером первичного элемента макроструктуры (например, зерна, кристаллита или волокна), а также по сравнению с характерным размером l_* зародышевой макроскопической трещины. С другой стороны, эти размеры достаточно малы по сравнению с характерным размером λ изменения функции $s(x, t)$ по объему тела V , а также с характерным размером макроскопической неоднородности материала.

Такое разбиение можно сделать почти всегда. Так, в крупногабаритных металлических конструкциях масштаб неоднородности даже вблизи конструктивных концентраторов (например, заклепочных отверстий) обычно не превышает величины $\lambda \sim 10$ мм. В то же время минимальный размер обнаруживаемой макроскопической трещины имеет порядок $l_* \sim 1$ мм, а масштаб микронеоднородности металла составляет величину порядка 10—100 мкм.

Для упрощения дальнейших построений будем также предполагать, что характерный размер l развитой макроскопической трещины таков, что трещина не выходит за пределы выделенного объема вплоть до момента, когда этот размер достигает предельно допустимого или критического значения l_{**} . Если положение зародышей локализовано, то последнее ограничение легко снимается. Характерную величину выделенного объема тела обозначим через V_0 ; ниже будем называть объем V_0 эталонным. В обычной ситуации V_0 имеет порядок объема стандартного лабораторного образца при испытаниях на усталость или длительную прочность.

Рассмотрим процесс накопления повреждений и развития макроскопических трещин в объеме V_0 . С учетом ограничений на выбор этого объема поле номинальных напряжений $s(x, t)$ в V_0 будем считать не зависящим от x и обозначать просто через $s(t)$. На первой (инкубационной) стадии в слабейших и наиболее напряженных группах первичных элементов (зерен, кристаллитов, волокон и т. п.) образуются зародыши макроскопических трещин с характерным размером l_* . Возникновение зародышей представляет собой точечный случайный процесс, порождаемый, с одной стороны, случайным размещением в V_0 слабейших и наиболее напряженных первичных элементов, а с другой стороны — процессом нагружения $s(t)$.

На второй стадии происходит рост зародившихся макроскопических трещин. При этом каждая трещина в процессе развития пересекает весьма большое количество первичных элементов, механические свойства которых образуют сечение некоторого однородного и эргодического поля. Поэтому средняя скорость роста трещины dl/dt , определяемая по отношению к медленному времени t , зависит не от локальных свойств первичных элементов, а от их осредненных значений.

Таким образом, стохастические модели для описания каждой стадии должны быть существенно различны: если инкубационная стадия в основном определяется крайними членами вариационного ряда, характеризующего прочность и локальную напряженность первичных элементов, то ско-

рость роста макроскопических трещин в основном (помимо параметров нагружения) зависит от осредненных по объему механических характеристик материала. Это обстоятельство косвенно обнаруживается во многих экспериментах. В частности, если локализовать трещину с высокой степенью точности (что делается в экспериментальных работах по механике разрушения), то разброс скорости ее роста dl/dt оказывается весьма умеренным даже по сравнению с разбросом долговечности для образцов с концентраторами [2].

Процесс образования зародышей продолжается и после того, как началось развитие первой магистральной трещины. Более того, процесс разрыхления изменяет структуру материала в области, где должна пройти трещина, что непосредственно влияет на скорость dl/dt . Это обстоятельство уже учитывалось в ранних предложениях [4, 5].

Рассмотрим подробнее инкубационную стадию. Будем характеризовать степень подготовки материала в объеме V_0 к развитию макроскопической трещины при помощи скалярной меры повреждения ψ . При этом $\psi=0$ для неповрежденного материала, $\psi=1$ для момента окончания инкубационной стадии и $\psi>1$ для стадии развития макроскопической трещины. Мера $\psi(t)$ — неубывающая функция t и в каждый момент времени t является функционалом от истории нагружения на отрезке $[0, t]$:

$$\psi(t) = H[s(\tau)] \quad (1.1)$$

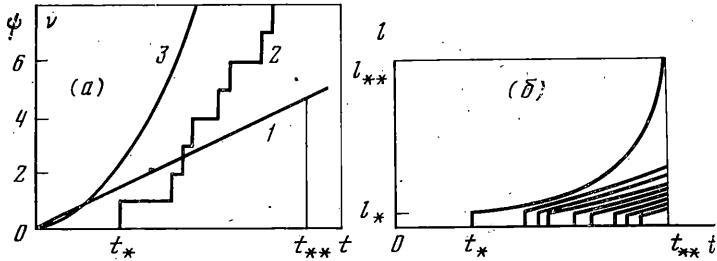
Узловое место развиваемой ниже теории — истолкование меры повреждения ψ в терминах образования зародышей макроскопических трещин. Число трещин в объеме V_0 — целочисленная случайная величина, принимающая значения $k=0, 1, 2, \dots$, в то время как мера ψ при заданном (детерминистическом) непрерывном процессе нагружения $s(t)$ является детерминистической непрерывной функцией времени. С другой стороны, экспериментатор, производящий испытания на усталость или длительную прочность, констатирует окончание инкубационной стадии в тот момент, когда обнаружит в образце первую макроскопическую трещину.

Чтобы согласовать все эти обстоятельства, выразим меру повреждения ψ через математическое ожидание $\nu = E(k)$ числа макроскопических трещин k в объеме V_0 . При этом математическое ожидание $E(k)$ берется по статистическому ансамблю аналогичных объемов, находящихся в статистически однородных условиях. Именно ансамбли такого типа рассматриваются на стадии проектирования, когда машина или конструкция еще не создана и объектом расчета в сущности является наугад выбранный элемент ансамбля в наугад выбранных (или достаточно редко встречающихся, но тяжелых) условиях эксплуатации. Итак, пусть

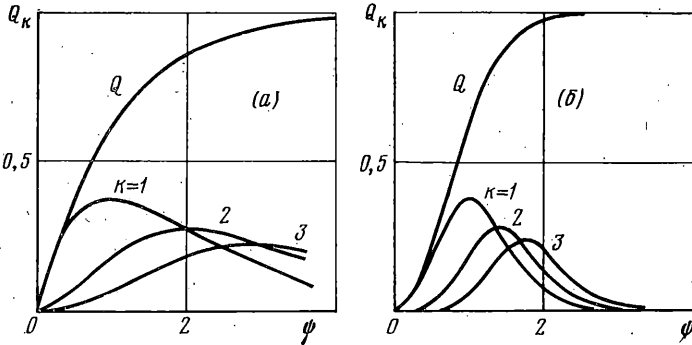
$$\nu = E(k) = f(\psi), \quad 0 \leq \psi < \infty \quad (1.2)$$

При этом $f(\psi)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $f'(\psi) > 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Смысл первых двух условий очевиден, а последнее имеет следующий смысл: при удачно выбранной модели вычисленному значению $\psi=1$ должно соответствовать в среднем по одной макроскопической трещине в каждом образце из достаточно представительной выборки. Отсюда видно, что эталонный объем V_0 должен иметь порядок объема стандартных образцов применительно к данному материалу и рассматриваемому классу конструкций.

Предлагаемая модель проиллюстрирована на фиг. 1, а, б, где кривая 1 показывает изменение во времени меры повреждения $\psi(t)$, кривая 2 — одну из реализаций целочисленного случайного процесса $k(t)$, а кривая 3



Фиг. 1



Фиг. 2

соответствует $\nu(t)$. При этом принято, что $f(\psi) = \psi^2$. Фиг. 1, б показывает изменения размеров макроскопических трещин $l(t)$ от начального значения l_* до критического значения l_{**} .

2. Дополним соотношения (1.1) и (1.2) вероятностной моделью, дающей возможность связать вероятности возникновения в объеме V_0 зародышей макроскопических трещин с математическим ожиданием ν их числа в этом объеме. Возникновение зародышей — достаточно редкое событие, причем их характерный размер l_* обычно составляет величину порядка десяти первичных элементов. Поэтому с близкой к единице вероятностью можно считать, что зародыши друг на друга не влияют и для их числа k справедлива модель редких событий (распределение Пуассона). Тогда вероятность обнаружения в объеме V_0 равно k зародышей или развившихся из них трещин определяется как $Q_k = e^{-\nu} \nu^k / k!$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Подставляя сюда (1.2), найдем, что вероятность нахождения в момент времени t равно k макроскопических трещин или их зародышей составляет

$$Q_k(t) = \frac{f^k[\psi(t)]}{k!} \exp\{-f[\psi(t)]\} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

Вероятность события, состоящего в том, что к моменту времени в объеме V_0 найдется хотя бы одна макроскопическая трещина или ее зародыш, вычисляется по формуле

$$Q(t) = 1 - \exp\{-f[\psi(t)]\} \quad (2.2)$$

Формулы (2.1) и (2.2) вместе с уравнениями типа (1.1) позволяют найти распределение времен до появления первого, второго и т. д. зародышей, что дает возможность сформулировать стохастические начальные условия для второй стадии процесса развития макроскопических трещин. Однако для получения достоверных результатов необходимо согласование

частного вида предлагаемых соотношений, а также входящих в них параметров с опытными данными. В литературе пока нет достаточных статистических данных о распределении времен до появления первой макроскопической трещины. Стадия развития магистральной трещины (если начальная трещина не инициирована преднамеренно) составляет, как правило, от 10 до 40% от общей долговечности [5]. Учитывая, что разброс суммарной долговечности, включающей обе стадии, составляет один порядок и даже более, можно в первом приближении при назначении параметров для инкубационной стадии использовать статистические данные, относящиеся к суммарной долговечности.

При истолковании и статистической обработке результатов испытаний на усталость при постоянном уровне напряжений часто [5, 6] используются распределения, порождаемые функцией

$$F(s, t) = 1 - \exp \left[- \frac{V}{V_0} \left(\frac{s-s_0}{s_c-s_0} \right)^\alpha \left(\frac{t-t_0}{t_c-t_0} \right)^\beta \right] \quad (2.3)$$

Здесь V — объем тела, в пределах которого характерное напряжение цикла s предполагается постоянным; s_0 и s_c — постоянные, имеющие размерность напряжений; t_0 и t_c — постоянные времена, а показатели α и β удовлетворяют условиям $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Отношение V/V_0 учитывает масштабный эффект.

Функция (2.3) определена при напряжениях и временах, превышающих пороговые значения s_0 и t_0 соответственно. При $t = \text{const}$ функция (2.3) трактуется как функция распределения разрушающих напряжений s при заданной продолжительности испытаний; при $s = \text{const}$ эта функция имеет смысл функции распределения долговечности при заданном уровне напряжений. Квантили этих распределений дают семейства кривых усталости, соответствующих заданному уровню надежности R , а показатель кривых усталости m связан с показателями из формулы (2.3) простым соотношением $m = \alpha/\beta$.

Допустим, что процесс нагружения характеризуется одним скалярным параметром $s = \text{const}$ и функция (2.3) отнесена к моменту t_* окончания инкубационной стадии, т. е. к появлению первой макроскопической трещины. Тогда между вероятностью $Q(t)$, определяемой по формуле (2.2), и функцией (2.3) имеет место связь $Q(t) = F(s, t)$, где s трактуется как постоянный параметр. Возьмем уравнение (1.1) в виде [5]:

$$\frac{d\psi}{dt} = \begin{cases} 0 & (s < s_0 \text{ или } t < t_0) \\ \frac{1}{t_c - t_0} \left(\frac{s - s_0}{s_c - s_0} \right)^m & (s > s_0, t > t_0) \end{cases} \quad (2.4)$$

Для функции $f(\psi)$ в соотношении (1.2) возьмем выражение

$$f(\psi) = \psi^\beta, \quad \beta > 0 \quad (2.5)$$

Подстановка выражений (2.4) и (2.5) в формулу (2.2) приводит к выражению для $Q(t)$, которые совпадают с правой частью в (2.3) при $V = V_0$. Если $V \neq V_0$, но уровень напряжений всюду в V одинаков и материал статистически однороден, то математическое ожидание числа зародышей в объеме V составляет $\nu V/V_0$. В результате приходим к функции (2.3), содержащей учет масштабного эффекта.

Весьма существенно, что параметры, входящие в формулы (2.4) и (2.5), могут быть извлечены из уже имеющейся информации об усталостных и длительных

испытаниях. Например, параметр α , характеризующий разброс предельных напряжений и масштабный эффект прочности, связан посредством формулы $m = \alpha/\beta$ с показателем кривых усталости m и показателем β , характеризующим связь между мерой повреждения ψ и математическим ожиданием ν числа макроскопических трещин (или их зародышей) в некотором эталонном объеме. Кроме того, показатель β оказывается равен параметру, определяющему в существенной степени разброс долговечности [5].

На фиг. 2 показана зависимость вероятности Q_k появления одного, двух и трех зародышей от меры повреждения ψ . Здесь использована зависимость (2.5) при $\beta=1$ (фиг. 2, а) и $\beta=2$ (фиг. 2, б). Заметим, что для конструкционных алюминиевых сплавов показатель кривой усталости m обычно принимает значения около 8, в то время как показатель α изменяется от 16 до 20 [7]. При $m=8$ и $\alpha=16$ имеем $\beta=2$, что отвечает графикам, представленным на фиг. 2, б.

3. Вторая стадия состоит в развитии макроскопической трещины до критического размера l_{**} , при котором трещина становится неустойчивой, или до предельно допустимого значения, после достижения которого данный элемент конструкции или деталь машины условно рассматриваются как разрушенные. Общее соотношение для размера l (длины краевой трещины, полудлины центральной трещины, радиуса дисковой трещины и т. п.) имеет вид

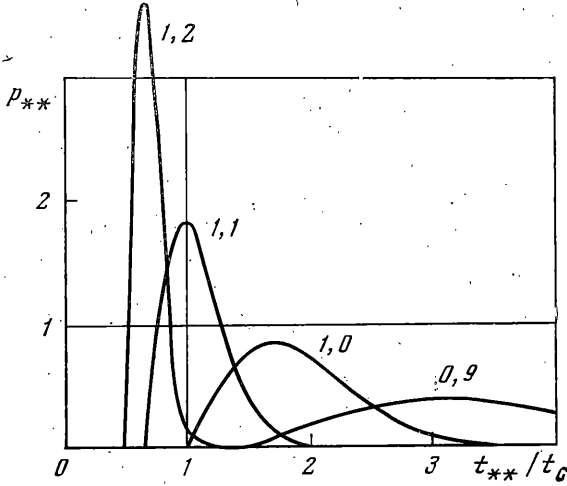
$$l(t) = \prod_{\tau=t_*}^{\tau=t} [s(\tau), \psi(\tau)] \quad (3.1)$$

т. е. размер l в момент времени t рассматривается как функционал истории нагружения и процесса накопления повреждений на отрезке времени $[t_*, t]$. Начальное условие для уравнения (3.1) имеет вид $l(t_*) = l_*$, где l_* — характерный размер зародыша макроскопической трещины. Момент времени t_* возникновения первой трещины является случайной величиной с функцией распределения

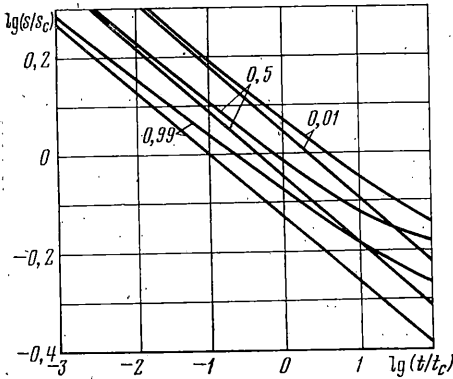
$$F_*(t_*) = 1 - \exp\{-f[\psi(t_*)]\} \quad (3.2)$$

Задача о нахождении размера трещины при $t > t_*$ и времени t_{**} достижения критического значения l_{**} оказывается стохастической даже в том случае, когда процесс нагружения — детерминистический. Остановимся подробнее именно на этом случае. Если найден закон изменения $l = L(t, t_*)$ размера трещины при заданном значении t_* , то поставленная задача решается элементарно. Достаточно разрешить зависимость $l = L(t, t_*)$ относительно переменной t_* и использовать известное уже выражение (3.2) для функции распределения t_* .

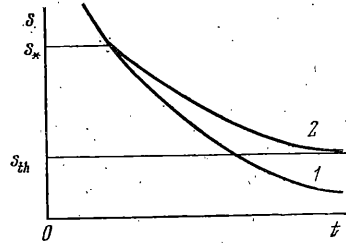
Обозначим обратную функцию через $t_* = T(l, t)$. Эта функция — монотонно убывающая; поэтому функция распределения $F_l(l; t)$ для размера трещины l в произвольный момент времени $t > t_*$ найдется как $F_l(l; t) = F_*[T(l, t)]$. При этом время t рассматривается как параметр. За разрушение принимается достижение размером l некоторого критического или предельно допустимого значения l_{**} . Соответствующий момент времени обозначим через t_{**} . Для времен разрушения t_{**} получаем функцию распределения $F_{**}(t_{**}) = F_*[T(l_{**}, t_{**})]$. Если допустимо пренебречь взаимодействием трещин, то аналогично формулируется задача о росте второй, третьей и т. д. трещины. Однако, поскольку поле номинальных напряжений и механические свойства материала макроскопически однородны в V_0 , то можно принять, что все развитые трещины в V_0 геометрически подобны и эквивалентно ориентированы. Тогда все трещины находятся в макроскопически одинаковых условиях, так что трещина, зародившаяся первой, обгонит по росту остальные трещины. Поэтому в дальнейшем ограничимся задачей о росте единственной трещины.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В рамках механики хрупкого разрушения субкритическая скорость роста трещины dl/dt рассматривается как функция коэффициента интенсивности напряжений на фронте трещины l , если нагрузка — постоянная или медленно меняющаяся, или как функция характерных (например, максимальных и минимальных) значений коэффициента интенсивности напряжений для каждого цикла, если нагрузка — циклическая. Введение коэффициента интенсивности напряжений как основного определяющего параметра позволяет совместно учесть уровень напряжений s и размер трещины l через один размерный комплекс $K = \gamma s l^{1/2}$, где γ — форм-фактор, имеющий порядок единицы. Это преимущество утрачивается, если учитывать влияние разрыхления на скорость роста трещины dl/dt : мера повреждения $\psi(t)$ зависит от истории нагружения и не зависит от размера трещины. Если же влияние разрыхления на скорость dl/dt пренебрежимо мало, то соотношения механики хрупкого разрушения применимы в полной мере.

В качестве примера рассмотрим применение простейшей модели роста усталостной трещины. Эта модель описывается уравнением Париса — Эрдогана [2]:

$$dl/dt = c(\Delta K)^n / \tau_0 \tag{3.3}$$

где ΔK — размах интенсивности напряжений в пределах одного цикла, τ_0 — продолжительность цикла, c и n — некоторые положительные постоянные (обычно принимается $n=4$).

Пусть все циклы — симметричные с амплитудой s . Тогда $\Delta K=2\gamma sl^{1/2}$. Интегрирование уравнения (3.3) при $s=\text{const}$ и начальном условии $l(t_*)=l_*$ дает $t_*=T(l, t)$, где

$$T(l, t) = t - t_{c1}(s_c/s)^n [1 - (l_*/l)^{n/2-1}] \quad (3.4)$$

$$l \geq l_*, \quad t > 0, \quad \tau_0/t_{c1} = (n/2-1)(2\gamma s_c)^n c l_*^{n/2-1}$$

Для инкубационной стадии возьмем модель, которая описывается уравнениями (2.4) и (2.5). Учитывая формулу (3.2), получим следующее выражение для функции распределения размеров трещин:

$$F_l(l; t) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{s-s_0}{s_c-s_0} \right)^\alpha \left[\frac{T(l, t) - t_0}{t_c - t_0} \right]^\beta \right\} \quad (3.5)$$

Здесь время t рассматривается как параметр. Для того чтобы получить функцию распределения $F_{**}(t_{**})$ времен до разрушения, достаточно в правой части (3.5) заменить t на t_{**} , а l — на соответствующее критическое значение l_{**} . Обычно выполняется соотношение $(l_*/l_{**})^{n/2-1} \ll 1$, что позволяет пренебречь соответствующим членом в правой части формулы (3.4).

Некоторые результаты вычислений по формулам (3.4) и (3.5) приведены на фиг. 3 в виде графиков для плотности вероятности $p_{**}(t_{**}) = -F_{**}'(t_{**})$. Вычисления сделаны при $n=4$, $s_0=0$, $t_0=0$, $t_{c1}=t_c$, $l_*/l_{**} \ll 1$, $\alpha=16$, $\beta=2$. Цифры у кривых обозначают величину отношения s/s_c .

На фиг. 4 показано семейство кривых усталости, причем проведено разграничение между инкубационной стадией и стадией роста макроскопической трещины. Прямые $t=t_*(s)$ и кривые $t=t_{**}(s)$ построены соответственно по уравнениям $F_*(t_*)=1-R$ и $F_{**}(t_{**})=1-R$ и отвечают уровням надежности $R=0,99, 0,5, 0,01$.

В последнее время был предложен ряд феноменологических уравнений для скорости субкритического роста усталостных трещин, обобщающих уравнение (3.3). Одно из предложений имеет вид [8]:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{c}{\tau_0} \frac{(\Delta K - K_{th})^n}{(K_* - K_{max})^{n_1}} \quad (\Delta K > K_{th}, K_{max} < K_*) \quad (3.6)$$

Здесь K_{th} — пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений, K_* — критическое значение этого коэффициента, n и n_1 — некоторые показатели степени.

Эта модель позволяет учесть нечувствительность трещины к циклам малой амплитуды, а также быстрое увеличение скорости dl/dt с приближением размера трещины к его критическому значению. Если разрыхление материала оказывает заметное влияние на скорость dl/dt , то естественно принять, что характеристики материала K_{th} и K_* зависят от меры повреждения ψ .

Качественное отличие кривых усталости, которые получаются при использовании уравнений (3.3) (кривая 1) и (3.6) (кривая 2), проиллюстрировано схематически на фиг. 5. При симметричных циклах напряжений существенную роль играют две величины, имеющие размерность напряжения

$$s_{th} = K_{th} / (2\gamma \sqrt{l_*}), \quad s_* = K_* / (\gamma \sqrt{l_*})$$

Первая из них соответствует пороговому значению коэффициента интенсивности напряжений и минимальному размеру l_* макроскопической трещины. Величину s_{th} можно истолковать как нижний предел выносливости материала при симметричных циклах напряжений. Вторая величина соответствует такому уровню напряжений, при котором зародышевая трещина оказывается критической. Таким образом, в рамках разработанной теории разброс долговечности при детерминистическом нагружении целиком формируется на инкубационной стадии, в то время как продолжительность стадии роста трещины является величиной детерминистической. Однако эта величина существенно зависит от уровня напряжений, изменяясь от нуля при очень высоких напряжениях до сколь угодно больших значений при напряжениях, которые ниже порогового значения s_{th} . Следовательно, отношение продолжительностей двух стадий есть случайная величина с изменением в весьма широких пределах. Возможно, что именно в этом состоит объяснение неопределенности и даже противоречивости, содержащихся в сведениях экспериментаторов о величине этого отношения.

4. Обсудим некоторые возможности обобщения предлагаемой теории. Одно из обобщений — распространение на тела с неоднородным распределением напряжений и (или) механических свойств материала. Пусть объем V достаточно велик, а поля напряжений механических свойств меняются в объеме V достаточно медленно, чтобы последний можно было представить в виде $V = V_1 \cup \dots \cup V_N$, где каждый подобъем V_j обладает всеми свойствами элементарного объема V_0 .

Тогда для каждого подобъема V_j применима формула (2.1), куда вместо $f[\psi(t)]$ следует подставить $f[\psi_j(t)] V_j/V_0$. Здесь $\psi_j(t)$ — некоторое среднее для V_j значение меры повреждения $\psi(x, t)$. Вероятность того, что к моменту времени t хотя бы в одном из объемов V_j возникнет макроскопическая трещина, определяется как

$$Q(t) = 1 - \prod_{j=1}^N \exp \left\{ -\frac{V_j}{V_0} f[\psi_j(t)] \right\}$$

Отсюда, переходя формально к пределу, получим обобщение формулы (2.2):

$$Q(t) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{V_0} \int_V f[\psi(x, t)] dV \right\} \quad (4.1)$$

Частный случай этой формулы для однородного в V поля напряжений был упомянут выше в связи с обсуждением формулы (2.3). Формула (4.1) позволяет вычислить показатели надежности и долговечности, если за наступление отказа принимается возникновение хотя бы одного зародыша макроскопической трещины. Если же за наступление отказа принимается развитие трещины до критического или предельно допустимого значения, то все же целесообразно рассматривать накопление повреждений в каждом эталонном объеме. При этом зародыши локализируются с точностью до размера каждого эталонного объема.

Рост макроскопических трещин, пересекающих ряд эталонных объемов, описывается далее при помощи уравнений типа (3.1), (3.3) и (3.6) с учетом зависимости функции $s(x, t)$ от координат. В практических расчетах достаточно выделить эти объемы вблизи наиболее напряженных узлов конструкции, например вблизи концентраторов напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Разрушение. / Под ред. ред. Либовица Г. Т. 2. М.: Мир, 1975. 764 с.
3. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
4. Бологин В. В. Некоторые обобщения теории суммирования усталостных повреждений и их приложение к анализу долговечности при действии случайных сил.— Изв. вузов. Машиностроение, 1959, № 8, с. 27.
5. Бологин В. В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
6. Фрейденталь А., Гумбел Э. Явление усталости в физическом и статистическом аспектах.— В кн.: Проблемы механики. Вып. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1959, с. 161.
7. Yang J.-N. Reliability analysis of structures under periodic proof tests in service.— AIAA Journal, 1976, v. 14, No. 9, p. 1225.
8. Dover W. D., Hibberd R. D. The influence of mean stress and amplitude distribution on random load fatigue crack growth.— Engng Fracture Mech., 1977, v. 9, No. 2, p. 251.

Поступила в редакцию
15.XI.1979