МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1981

УДК 539.376:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

МАЛИНИН Н. Н., РОМАНОВ К. И.

(Москва)

Устойчивость деформирования реономных тел изучена в работах [1, 2] на основе предположения о существовании возмущенного течения. Ниже для исследования локальной устойчивости элемента тела, деформируемого в условиях ползучести, использован постулат Друкера, обобщенный им на случай реономных сред. При этом возмущенное движение не рассматривается. Сформулировано условие, позволяющее определить критическое время. В качестве примера найдено критическое время при равномерном двухосном растяжении квадратного плоского листа в случае линейного закона изменения скоростей растяжения.

1. Согласно постулату устойчивости, предложенному Друкером для реономных сред [3], деформирование материала в изотермических условиях устойчиво в малом, если работа бесконечно малых приращений обобщенных сил (dQ_i) на соответствующих бесконечно малых приращениях скоростей обобщенных перемещений (dv_i) неотрицательна

$$dQ_i dv_i \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Постулат Друкера позволяет проанализировать устойчивость всего тела, если под Q_i понимать внешние обобщенные силы. Если же необходимо провести анализ локальной устойчивости (устойчивости материала) элемента тела, то в условии (1.1) необходимо использовать внутренние обобщенные силы. В общем случае [4] неустойчивость всего тела и неустойчивость материала наступают неодновременно. В технологических процессах, характеризующихся неоднородными полями напряжений и деформаций, важно изучить локальную устойчивость в опасных точках. Это позволяет предупредить разрушение заготовки в процессе формоизменения. Поэтому далее постулат (1.1) использован для анализа локальной устойчивости элементов заготовки.

Выделим в некоторый момент формоизменения из листовой заготовки малый элемент, находящийся в условиях двухосного напряженного состояния. Пусть оси 1 и 2 — главные оси, связанные с элементом; a_1 и a_2 — размеры элемента, h — его толщина; σ_1, σ_2 — напряжения, действующие по граням элемента. Согласно (1.1), деформирование материала устойчиво, если

$$\begin{gathered} d(\sigma_1 a_2 h)\, dv_1 + d(\sigma_2 a_1 h)\, dv_2 \geqslant 0 \\ v_1 = \xi_1 a_1, \quad v_2 = \xi_2 a_2, \quad \xi_1 = da_1/a_1 dt, \quad \xi_2 = da_2/a_2 dt \end{gathered} \tag{1.2}$$

где v_1 и v_2 — скорости растяжения в соответствующих направлениях, ξ_1 и ξ_2 — скорости деформаций, t — время.

Принимаем материал заготовки несжимаемым и изотропным; упругими и пластическими деформациями по сравнению с деформациями ползучести пренебрегаем. Согласно условию несжимаемости

$$da_1/a_1+da_2/a_2+dh/h=0 \qquad (1.3)$$

Используя формулу (1.3), преобразуем условие (1.2) к следующему виду:

$$\frac{d\sigma_1}{dt}\frac{d\xi_1}{dt}+\xi_1^2\frac{d\sigma_1}{dt}-\frac{d\xi_1}{dt}\sigma_1\xi_1-\sigma_1\xi_1^3+\frac{d\sigma_2}{dt}\frac{d\xi_2}{dt}+\xi_2^2\frac{d\sigma_2}{dt}-\frac{d\xi_2}{dt}\sigma_2\xi_2-\sigma_2\xi_2^3\geqslant 0 \qquad (1.4)$$

Представим главные напряжения и скорости деформаций в виде произведения некоторых функций времени φ_i и ψ_i на эквивалентное напряжение (σ_e) и эквивалентную скорость деформаций (ξ_e):

$$\sigma_i=\varphi_i\sigma_e,\quad \xi_i=\psi_i\xi_e \qquad (1.5)$$

Функции φ_i и ψ_i могут быть определены в результате решения задачи о напряженно-деформированном состоянии заготовки как это, например, сделано в [5].

Условие (1.4) может быть преобразовано при помощи формул (1.5) для любых путей нагружения элемента. Однако получающийся результат является громоздким и здесь не приводится. Преобразования существенно упрощаются при простом нагружении. В этом случае пропадают слагаемые, содержащие производные функций φ_i и ψ_i по времени. Для простого нагружения условие (1.4) принимает вид

$$1/z_1z_2+\Phi_1\xi_e(1/z_1-1/z_2)-\Phi_2\xi_e^2\geqslant 0 \qquad (1.6)$$

$$\Phi_1=\psi_i^2\varphi_i,\qquad \Phi_2=\psi_i^3\varphi_i,\qquad \frac{1}{z_1}=\frac{d\sigma_e}{\sigma_e\,dt},\qquad \frac{1}{z_2}=\frac{d\xi_e}{\xi_e\,dt}$$

Здесь производится суммирование по i, z_1 и z_2 — величины подкасательных к графикам зависимостей $\sigma_e(t)$ и $\xi_e(t)$, получаемых в результате решения технологической задачи.

Необходимо отметить, что величины z_1 и z_2 связаны между собой математической формулировкой принятой технической теории ползучести. В простейшем варианте теории течения принимается [6] $\xi_e=k\sigma_e^n$, где k и n — постоянные материала при определенной температуре. Для указанной формулировки имеем $1/z_1=1/(nz_2)$.

Выразим функции φ_i и ψ_i, входящие в условие устойчивости (1.6), в зависимости от отношения главных напряжений $m=\sigma_2/\sigma_1$. Используя величину эквивалентного напряжения при плоском напряженном состоянии $\sigma_e=(\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)^{1/2}$, получим

$$\varphi_1=(1-m+m^2)^{-1/2},\quad \varphi_2=m\varphi_1 \qquad (1.7)$$

Зависимости главных скоростей деформаций ξ_i от главных напряжений σ_i по теории течения имеют вид [6] (σ_0 — среднее нормальное напряжение):

$$\xi_i={}^3/_2\xi_e(\sigma_i-\sigma_0)/\sigma_e \qquad (1.8)$$

Из соотношений (1.8) при помощи формулы (1.7) получим

$$\psi_1=0{,}5(2-m)(1-m+m)^{-1/2},\quad \psi_2=0{,}5(2m-1)(1-m+m^2)^{-1/2}$$

В результате условие (1.6) можно представить в форме

$$1/nz_2^2-f(m)\xi_e(1-1/n)/z_2-g(m)\xi_e^2\geqslant 0 \qquad (1.9)$$

$$f(m)=\frac{(2-m)^2+m(2m-1)^2}{4(1-m+m^2)^{3/2}},\qquad g(m)=\frac{(2-m)^3+m(2m-1)^3}{8(1-m+m^2)^2}$$

Введем обозначение $\varkappa=(\xi_e z_2)^{-1}$, тогда условие устойчивости деформирования (1.9) принимает окончательный вид

$$\varkappa^2-f(m)(n-1)\varkappa-g(m)n\geqslant 0$$

Критическое значение $\varkappa_*$, соответствующее переходу деформирования из устойчивой области в неустойчивую, определяется решением квадратного уравнения, полученного заменой знака больше или равно на знак равенства.

Решением этого уравнения будет величина

$$\varkappa_*={}^1/_2\{f(m)(n-1)+[f^2(m)(n-1)^2+4g(m)n]^{1/2}\} \qquad (1.10)$$

Критическое время в момент наступления неустойчивости определяется величиной $\varkappa_*$ при помощи зависимости $\varkappa(t)$. Анализ формулы (1.10), в частности, выявляет, что с ростом показателя скоростного упрочнения n величина $\varkappa_*$ увеличивается. Постоянная k не влияет на устойчивость деформирования.

2. В качестве примера определим критическое время при равномерном двухосном растяжении квадратного плоского листа в случае следующих кинематических граничных условий: $v=v_1=v_2=l_0\xi_0{}^2t$, где l_0 — размер листа в начальный момент времени (l — текущий размер), ξ_0 — постоянная величина (некоторое характерное значение скорости деформации).

В рассматриваемой задаче $\xi_1=\xi_2$, следовательно, $\psi_1=\psi_2$ и $m=1$. При указанном значении m имеем: $f(m)={}^1/_2$, $g(m)={}^1/_4$. Положим $n=5$, тогда по формуле (1.10) получим, что при любом законе изменения скорости растяжения величина $\varkappa_*=2{,}5$.

Для нахождения критического времени необходимо располагать зависимостью $\varkappa(t)$. Определим эту зависимость. Текущий размер стороны листа находится по формуле

$$l=l_0+\int_0^t v\,dt=l_0(2+\tau^2)/2, \quad \tau=\xi_0 t$$

где τ — безразмерное время.

Эквивалентная скорость деформаций $\xi_e=2v/l=4\xi_0\tau/(2+\tau^2)$ позволяет получить зависимость $\varkappa=(2/\tau^2-1)/4$; откуда критическое безразмерное время $\tau_*=[2/(4\varkappa_*+1)]^{1/2}\approx 0{,}426$. Следовательно, критическое время $t_*=$ $=0{,}426\xi_0{}^{-1}$.

Аналогично можно проанализировать устойчивость одноосного растяжения стержня в условиях ползучести. Устойчивость растяжения стержня зависит от двух факторов: от геометрического разупрочнения в связи с уменьшением площади поперечного сечения и от механического упрочнения материала, обусловленного ростом деформаций ползучести. В критический момент времени растягивающая сила достигает максимума, стержень теряет способность к догружению и происходит быстрое сужение поперечного сечения, ведущее к разрушению.

При одноосном напряженном состоянии условие устойчивого деформирования имеет вид $d(\sigma F)\geqslant 0$, где σ — напряжение, F — площадь поперечного сечения.

Очевидно, что в этом случае вместо неравенства (1.6) получаем

$$1/z_1z_2+\xi(1/z_1-1/z_2)-\xi^2\geqslant 0 \qquad (2.1)$$

где ξ — скорость деформации, z_1 и z_2 — величины подкасательных к графикам зависимостей $\sigma(t)$ и $\xi(t)$. В частности, для нелинейно-вязкого тела из неравенства (2.1) следует, что в критический момент времени $\varkappa_*=n$. Последнее равенство вытекает и из равенства (1.10) при $m=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Деформация вязкопластического тела.— Ученые записки Моск. ун-та, 1940, № 39, с. 3.
2. *Ишлинский А. Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута.— ПММ, 1943, т. 7, вып. 2, с. 109.
3. *Drucker D.* A definition of stable inelastic material.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1959, v. 6, No. 1, p. 101. (рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1960, № 2, с. 55.)
4. *Романов К. И.* К вопросу об исследовании устойчивости двухосного пластического растяжения.— Изв. вузов. Машиностроение, 1979, № 10, с. 18.
5. *Романов К. И.* Исследование методом конечных элементов горячей осесимметричной осадки.— Машиноведение, 1978, № 5, с. 79.
6. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.

Поступила в редакцию
1.III.1979