МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1981

УДК 539.376

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

КАРНАУХОВ В. Г., СЕНЧЕНКОВ И. К.

(Киев)

В настоящее время все шире используются элементы конструкций из полимеров. В отличие от традиционных строительных и конструкционных материалов, характеризующихся частотно-независимым коэффициентом потерь [1–3], модуль потерь для полимеров существенно зависит от частоты [4, 5]. Это указывает на то, что в полимерах (по крайней мере, для умеренных напряжений) преобладает механизм вязкого рассеяния энергии. Естественной формой описания такого механизма является теория вязкоупругости. Отметим, что эта теория позволяет приближенно описать и частотно-независимое внутреннее трение [6].

Экспериментально установлено, что для некоторых вязкоупругих материалов комплексный модуль существенно зависит от амплитуды деформации [7]. При описании поведения таких материалов следует исходить из нелинейной теории. В [3] необходимые соотношения между напряжениями и деформациями были получены применением метода эквивалентной линеаризации к уравнениям типа Грина – Ривлина [8]. Однако для материалов, у которых модуль потерь существенно нелинейно зависит от амплитуды деформации, соотношения Грина – Ривлина, не могут служить основой построения теории.

Наблюдаемый в опытах разогрев элементов, а также сильная зависимость физико-механических, в частности диссипативных свойств полимеров от температуры указывают на необходимость изучения колебаний в рамках связанной термомеханической теории.

В данной работе в основу рассмотрения положена главная термомеханическая теория нелинейной вязкоупругости для термореологически простых материалов, обобщающая главную механическую теорию Ильюшина – Огибалова [8]. В случае установившихся колебаний с использованием метода эквивалентной линеаризации получена замкнутая система дифференциальных уравнений относительно температуры и комплексных амплитуд перемещений и напряжений. Для численной реализации дана вариационная формулировка задачи.

1. Тензор малой деформации $\mathbf{E}$ определим через вектор перемещений

$$2\mathbf{E}=\operatorname{grad}\mathbf{u}+(\operatorname{grad}\mathbf{u})^T \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbf{E}(\tau)$ и $\mathbf{E}_d=\mathbf{E}(\tau)-\mathbf{E}(t)$, $-\infty<\tau\leqslant t$ — история и разностная история деформации, ψ — свободная энергия Гельмгольца на единицу массы, η — удельная энтропия, θ — абсолютная температура, ρ — плотность, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, $\mathbf{b}$ — вектор массовых сил, $\mathbf{h}$ — вектор теплового потока, r — тепловые источники на единицу массы.

Будем рассматривать термореологически простые материалы, для которых приведенные время ξ и связанные с ним величины определяются по формулам

$$(\xi,\xi')=\int_0^{(t,\tau)} a[\theta(z)]dz,\quad \lambda=\xi-\xi'=\int_\tau^t a[\theta(z)]dz \tag{1.2}$$

где a — функция сдвига, причем $a>0$.

Основу главной термомеханической теории вязкоупругости составляет следующее представление функционала удельной свободной энергии:

$$\psi=\psi^{\infty}(\mathbf{E},\theta)+\int_{-\infty}^{t} N(\mathbf{E}_d,\theta_d,\mathbf{E},\theta,\lambda)\,a[\theta(\tau)]\,d\tau \tag{1.3}$$

где ψ^{∞} — равновесная свободная энергия, N — достаточно гладкая функция, а λ определяется формулой (1.2). Это представление обобщает на случай термомеханики ряд экспериментально обоснованных нелинейных механических теорий [8, 9].

Применение к уравнению (1.3) термодинамического формализма теории [10] приводит к соотношениям для напряжения $\mathbf{T}$, энтропии η и внутренней диссипации σ:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\rho}\mathbf{T}=\psi_{,\mathbf{E}}^{\infty}+\int_{-\infty}^{t}[N_{,\mathbf{E}}(\Gamma)-N_{,\mathbf{E}_d}(\Gamma)]\,a\,d\tau\\
\eta=-\psi_{,\theta}^{\infty}-\int_{-\infty}^{t}[N_{,\theta}(\Gamma)-N_{,\theta_d}(\Gamma)]\,a\,d\tau\\
\theta\sigma=-a[\theta]\int_{-\infty}^{t}N_{,\lambda}(\Gamma)\,a\,d\tau,
\end{gathered}\tag{1.4}$$

$$\Gamma=\left(\mathbf{E}_d,\theta_d,\mathbf{E},\theta,\lambda=\int_{\tau}^{t}a[\theta(z)]\,dz\right),\qquad \psi_{,\mathbf{E}}^{\infty}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{E}}\psi^{\infty}(\mathbf{E},\theta)$$

Можно показать, что представление (1.3) и второй закон термодинамики в форме неравенства Клаузиуса — Дюгема накладывают следующие ограничения на функцию N при постоянных историях $\mathbf{E}_d=O(\tau)$, $\theta_d=0(\tau)$, $-\infty<\tau\leqslant t$ (для всех $\mathbf{E}$, θ и $0\leqslant\lambda_0<\infty$):

$$\begin{gathered}
N(\Gamma_0)=N_{,\theta}(\Gamma_0)=N_{,\theta_d}(\Gamma_0)=N_{,\lambda}=0,\ N_{,\mathbf{E}}(\Gamma_0)=N_{,\mathbf{E}_d}(\Gamma_0)=0\\
\lim_{\xi\to\infty}\xi N(O,0,\mathbf{E},\theta,\xi)=0,\qquad \Gamma_0=(O,0,\mathbf{E},\theta,\lambda_0=a[\theta](t-\tau))
\end{gathered}\tag{1.5}$$

К определяющим соотношениям (1.4) необходимо добавить уравнение для вектора теплового потока $\mathbf{h}$, которое принимается в форме Фурье $\mathbf{h}=-\mathbf{k}\,\mathrm{grad}\,\theta$, где $\mathbf{k}=\mathbf{k}(\theta)$ — тензор теплопроводности.

Для удобства в дальнейшем представим уравнения (1.4) в приведенном времени

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\rho}\check{\mathbf{T}}=\psi^{\infty}_{,\check{E}}(\check{\mathbf{E}},\check{\theta})+\int_{0}^{\infty}[\check{N}_{,\check{\mathbf{E}}}(\check{\mathbf{P}})-\check{N}_{,\check{\mathbf{E}}_d}(\check{\mathbf{P}})]\,d\xi'\\
\check{\eta}=-\check{\psi}^{\infty}_{,\check{\theta}}(\check{\mathbf{E}},\check{\theta})-\int_{0}^{\infty}[\check{N}_{,\check{\theta}}(\check{\mathbf{P}})-\check{N}_{,\check{\theta}_d}(\check{\mathbf{P}})]\,d\xi'\\
\check{\theta}\check{\sigma}=-\dot{a}\int_{0}^{\infty}N_{,\xi-\xi'}(\check{\mathbf{P}})\,d\xi',\qquad \check{\mathbf{P}}=(\check{\mathbf{E}}_d,\check{\theta}_d,\check{\mathbf{E}},\check{\theta},\xi-\xi')
\end{gathered}\tag{1.6}$$

2. Предположим, что до момента $\tau=0$ тело находилось в изотермическом состоянии, а для $\tau>0$ подвергалось гармоническому возбуждению

с частотой ω. С учетом тепловых деформаций, возникающих вследствие саморазогрева, выражение для деформаций в точке тела представимо в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \tau)=\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) \cos \omega\tau-\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) \sin \omega\tau+\mathbf{E}_\theta(\mathbf{x}, \tau), \quad 0\leqslant\tau<\infty \tag{2.1}$$

где выделена осциллирующая деформация с амплитудами $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и «медленная» тепловая деформация $\mathbf{E}_\theta$. Ниже будем рассматривать, главным образом, задачу саморазогрева. Для таких задач приняты следующие упрощения.

1. Приведенное время аппроксимируется выражением $\xi=a[\theta]t$.

2. Переходным процессом можно пренебречь и рассматривать задачу об установившихся колебаниях.

3. Температуру, диссипативную функцию и энтропию можно заменить усредненными за цикл значениями

$$[\theta^{\vee\circ}, \eta^{\vee\circ}, \theta^{\vee\circ}\sigma^{\vee\circ}]=\frac{\Omega}{2\pi}\int\limits_{\xi}^{\xi+\frac{2\pi}{\Omega}}[\theta^{\vee}, \eta^{\vee}, \theta^{\vee}\sigma^{\vee}](\xi')\,d\xi'$$

где приведенная частота Ω определяется формулой $\Omega=\omega/a[\theta]$.

4. Влиянием тепловых напряжений и деформаций на температуру саморазогрева можно пренебречь. Поскольку рассматриваются физически нелинейные материалы, допущения (1) — (4) дополняются следующим условием.

5. Гармоническому возбуждению (деформации или напряжения), воздействующему на нелинейное вязкоупругое тело, соответствует гармонический отклик (напряжение или деформация). Это допущение приближенно выполняется, если период колебаний значительно меньше характерного времени изменения механических свойств материала и, кроме того, система находится вдали от резонансов на суб- и супергармониках.

В соответствии с (4) полную деформацию $\mathbf{E}$ можно отождествить с осциллирующими слагаемыми в (2.1). Подставим выражение для деформации с учетом (1) и (3) в уравнения (1.6) и, используя (2), разложим функции $\mathbf{T}^{\vee}$, $\eta^{\vee}$ и $\theta^{\vee}\sigma^{\vee}$ в ряды Фурье на интервале $[0, 2\pi/\Omega]$:

$$(\mathbf{T}^{\vee}, \eta^{\vee}, \theta^{\vee}\sigma^{\vee})=\frac{1}{2}A^{\circ}_{(\mathrm{T},\eta,\sigma)}+\sum_{n=1}^{\infty}(A^{n}_{(\mathrm{T},\eta,\sigma)}\cos n\Omega\xi+B^{n}_{(\mathrm{T},\eta,\sigma)}\sin n\Omega\xi) \tag{2.2}$$

где в формулы для коэффициентов

$$\begin{bmatrix} A^n \\ B^n \end{bmatrix}_{(\mathrm{T},\eta,\sigma)}=\frac{\Omega}{\pi}\int\limits_0^{2\pi/\Omega}(\mathbf{T}^{\vee}, \eta^{\vee}, \theta^{\vee}\sigma^{\vee})\begin{bmatrix}\cos n\Omega\xi \\ \sin n\Omega\xi\end{bmatrix}d\xi \tag{2.3}$$

в качестве подынтегральных функций подставляются правые части уравнений (2.6). Предположения (3) и (5) позволяют заменить систему интегродифференциальных уравнений (1.6) системой уравнений

$$\mathbf{T}^{\vee}=\rho\mathbf{A}_{\mathrm{T}}^{1}(\mathbf{Q}^{\vee})\cos\Omega\xi+\rho\mathbf{B}_{\mathrm{T}}^{1}(\mathbf{Q}^{\vee})\sin\Omega\xi \tag{2.4}$$

$$\eta^{\vee}=\eta^{\vee 0}=A_{\eta}^{\circ}(\mathbf{Q}^{\vee}) \tag{2.5}$$

$$\theta^{\vee}\sigma^{\vee}=\theta^{\vee 0}\sigma^{\vee 0}=A_{\sigma}^{\circ}(Q^{\vee}), \qquad \mathbf{Q}^{\vee}=(\theta^{\vee}, \Omega, \mathbf{E}_1^{\vee}, \mathbf{E}_2^{\vee}) \tag{2.6}$$

Перейдем к физическому времени и определим тензоры второго ранга T_1, T_2 и тензоры четвертого ранга G' и G'':

$$T_1=\rho A_T^1=G'[E_1]-G''[E_2],\quad T_2=-\rho B_T^1=G'[E_2]+G''[E_1]$$
$$G'=G'(Q),\quad G''=G''(Q),\quad Q=(\theta^\circ, \Omega, E_1, E_2) \tag{2.7}$$

Величины G' и G'' являются аналогами модулей накопления и потерь в линейной вязкоупругости, но зависят от амплитуд E_1 и E_2. Поскольку функция A_σ° в (2.6) совпадает с усредненной мощностью $W=T\cdot E^{\cdot}$, то с учетом (2.1), (2.4) и (2.7) получим

$$\theta^\circ\sigma^\circ=D={}^1/_2\omega\{G''[E_1]\cdot E_1+G''[E_2]\cdot E_2\} \tag{2.8}$$

Здесь использованы тензорные операции $G[A]\cdot B=G_{ijkl}A_{kl}B_{ij}$.

Для установления связи модулей G' и G'' с соответствующими модулями линейной теории термореологически простых материалов [12] разложим функции ψ^∞ и N в окрестности точки $\Gamma_0=(O,\ 0,\ O,\ \theta^\circ,\ \lambda)$ по степеням E_d и E при $E=E_1\cos\omega t-E_2\sin\omega t$. Подставляя эти разложения в (2.3), с учетом (1.5) и (2.7) находим

$$G'(Q)=G_0'(\theta^\circ,\Omega)+G_1'(\theta^\circ,\Omega)([E_1]\cdot E_1+[E_2]\cdot E_2)+O(|E_1|^4+|E_2|^4)$$
$$G''(Q)=G_0''(\theta^\circ,\Omega)+G_1''(\theta^\circ,\Omega)([E_1]\cdot E_1+[E_2]\cdot E_2)+O(|E_1|^4+|E_2|^4)$$
$$G_0'=\rho\psi^\infty_{,EE}(Q,\theta^\circ)+\rho\int_0^\infty \Phi^{\cdot}(\Gamma_0)(\cos\Omega\lambda-1)\,d\lambda$$
$$G_0''=-\rho\int_0^\infty \Phi^{\cdot}(\Gamma_0)\sin\Omega\lambda\,d\lambda,\qquad \Phi(\theta^\circ,\lambda)=\int_\lambda^\infty N_{,E_dE_d}(O,0,O,\theta^\circ,s)\,ds$$
$$\Phi^{\cdot}(\theta^\circ,\lambda)=-N_{,E_dE_d}(\ldots,\lambda),\ \Phi_{\alpha\beta}{}^{\cdot}(\theta^\circ,\lambda)=$$
$$=-N_{,E_dE_d\alpha\beta}(O,0,\ O,\theta^\circ,\lambda),\qquad |E|=(\operatorname{tr}E^2)^{1/2} \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\rho}G_1'=\frac{1}{8}\psi^\infty_{,EEEE}(O,\theta^\circ)+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{8}(\Phi^{\cdot}_{EE_d}-\Phi^{\cdot}_{EE})[3(\cos\Omega\lambda-1)^2+\sin^2\Omega\lambda]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}(\Phi^{\cdot}_{E_dE}-\Phi^{\cdot}_{E_dE_d})(\cos\Omega\lambda-1)^2+\frac{3}{8}\Phi^{\cdot}_{EE}(\cos\Omega\lambda-1)\right\}d\lambda([E_1]\cdot E_1+[E_2]\cdot$$
$$\cdot E_2)$$

$$\frac{1}{\rho}G_1''=-\int_0^\infty\left[\frac{1}{4}(\Phi^{\cdot}_{EE}-2\Phi^{\cdot}_{EE_d}+\Phi^{\cdot}_{E_dE_d})(\cos\Omega\lambda-1)\sin\Omega\lambda-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}\Phi^{\cdot}_{EE}\sin\Omega\lambda\right]d\lambda([E_1]\cdot E_1+[E_2]\cdot E_2)$$

Здесь G_0' и G_0'' — модули в линейной теории.

После аналогичных выкладок найдем уравнение для энтропии

$$\eta^0=\psi^\infty_{,\theta}(O,\theta^\circ)-\left[\psi^\infty_{,\theta EE}(O,\theta^\circ)+\int_0^\infty\Phi^{\cdot}_{\theta}(\cos\Omega\lambda-1)\,d\lambda\right]\times$$
$$\times([E_1]\cdot E_1+[E_2]\cdot E_2+O(|E_1|^4+|E_2|^4) \tag{2.10}$$

В результате получим замкнутую систему для связанной задачи об установившихся колебаниях вязкоупругих тел с деформационно-зависимым комплексным модулем:

уравнения движения и энергии

$$\operatorname{div}\mathbf{T}^*+\rho\mathbf{b}^*+\rho w^2\mathbf{u}^*=\boldsymbol{O}, \quad \operatorname{div}\mathbf{h}-\rho r-D=-\rho\theta^\circ\eta^{\circ\cdot} \tag{2.11}$$

определяющие уравнения

$$\mathbf{T}^*=\mathbf{G}^*[\mathbf{E}^*], \quad \mathbf{h}=-\mathbf{k}(\theta^\circ)\operatorname{grad}\theta^\circ \tag{2.12}$$

граничные условия

$$\mathbf{T}^*\mathbf{n}=\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) \text{ на } S_T, \quad \mathbf{u}^*=\mathbf{g}^*(\mathbf{x}) \text{ на } S_u \tag{2.13}$$

$$\theta^\circ=\varphi(\mathbf{x}, t) \text{ на } S_\theta, \quad \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}=q(\mathbf{x}, t) \text{ на } S_q \tag{2.14}$$

начальное условие $\theta^\circ(\mathbf{x}, 0)=\theta_0(\mathbf{x})$.

Здесь $\mathbf{T}^*(\mathbf{x})=\mathbf{T}_1+i\mathbf{T}_2$ и $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})=\mathbf{u}_1+i\mathbf{u}_2$ — комплексные амплитуды напряжения и перемещения, причем $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ связаны с $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ формулой (1.1); $\mathbf{G}^*(\mathbf{Q})=\mathbf{G}'+i\mathbf{G}''$ — тензор комплексных модулей; диссипативная функция D определяется уравнением (2.8); $\mathbf{b}^*(\mathbf{x})=\mathbf{b}_1+i\mathbf{b}_2$ — массовые силы; r — плотность тепловых источников; $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})=\mathbf{f}_1+i\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}^*(x)=\mathbf{g}_1+i\mathbf{g}_2$; φ и q — заданные функции; n — нормаль к поверхности тела S.

Предположим, что энтропия η является функцией только температуры. Тогда во втором уравнении (2.11) имеем $\rho\theta^\circ\eta^{\circ\cdot}=\rho C_e(\theta^\circ)\theta^{\circ\cdot}$; где C_e — теплоемкость при постоянной деформации. Часто практический интерес представляет стационарное температурное поле, установившееся в результате баланса теплообмена и диссипации. В этом случае, подставляя (2.12) в (2.11) и разделяя вещественные и мнимые части в первом соотношении (2.11) и (2.13), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}(\mathbf{G}'[\mathbf{E}_1]-\mathbf{G}''[\mathbf{E}_2])+\rho\mathbf{b}_1+\rho\omega^2\mathbf{u}_1=\boldsymbol{O}\\
\operatorname{div}(\mathbf{G}'[\mathbf{E}_2]+\mathbf{G}''[\mathbf{E}_1])+\rho\mathbf{b}_2+\rho\omega^2\mathbf{u}_2=\boldsymbol{O}\\
\operatorname{div}[\mathbf{k}(\theta^\circ)\operatorname{grad}\theta^\circ]+\rho r+D=0\\
\mathbf{T}_1\mathbf{n}=\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{T}_2\mathbf{n}=\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \text{ на } S_T\\
\mathbf{u}_1=\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \; \mathbf{u}_2=\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \text{ на } S_u
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Альтернативную постановку задачи (2.15), (2.14) дает вариационный принцип: среди всех полей $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ и $\theta^\circ(\mathbf{x})$, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям, при условии выполнения уравнений (1.1), (2.12) решением задачи являются те, которые удовлетворяют равенствам

$$\delta_{\mathbf{u}_1}\left\{\int_V (U_1-K_1-\rho\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{u}_1)\,dv-\int_{S_T}\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{u}_1\,ds\right\}=0$$

$$\delta_{\mathbf{u}_2}\left\{\int_V (U_2-K_2-\rho\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{u}_2)\,dv-\int_{S_T}\mathbf{f}_2\cdot\mathbf{u}_2\,ds\right\}=0$$

$$\delta_\theta\left\{\int_V (H_\theta-H_D)\,dv+\int_{S_q} q\theta^\circ\,ds\right\}=0$$

$$U_1=\int_0^1\{\mathbf{G}'(\theta^\circ,\Omega,\gamma\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)[\gamma\mathbf{E}_1]\cdot\mathbf{E}_1-\mathbf{G}''(\theta^\circ,\Omega,\gamma\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)[\mathbf{E}_2]\cdot\mathbf{E}_1\}\,d\gamma$$

$$U_2=\int_0^1\{\mathbf{G}'(\theta^\circ,\Omega,\mathbf{E}_1,\gamma\mathbf{E}_2)[\gamma\mathbf{E}_2]\cdot\mathbf{E}_2+G''(\theta^\circ,\Omega,\mathbf{E}_1,\gamma\mathbf{E}_2)[\mathbf{E}_1]\cdot\mathbf{E}_2\}\,d\gamma$$

$$K_{1,2}={}^1/_2\,\omega^2\rho\mathbf{u}_{1,2}\cdot\mathbf{u}_{1,2}, \quad H_\theta={}^1/_2\,\mathbf{k}(\theta^\circ)\operatorname{grad}\theta^\circ\cdot\operatorname{grad}\theta^\circ$$

$$H_D=\theta^\circ\int_0^1 D\left(\gamma\theta^\circ, \frac{\omega}{a[\gamma\theta^\circ]}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\right) d\gamma+\rho\theta^\circ r$$

Символы δ_{u_1}, δ_{u_2}, δ_θ означают, что варьирование соответствующих функционалов осуществляется только по $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и θ° при фиксированных значениях остальных искомых функций. Для изотропных материалов имеем

$$T_{ij}^*=\lambda^*\overset{*}{u}_{k,k}\delta_{ij}+\mu^*(\overset{*}{u}_{i,j}+\overset{*}{u}_{j,i})$$

$$D=\frac{1}{2}\omega[\lambda_2\overset{*}{u}_{k,k}\overset{*}{\bar{u}}_{k,k}+\mu_2(\overset{*}{u}_{i,j}\overset{*}{\bar{u}}_{i,j}+\overset{*}{u}_{i,j}\overset{*}{\bar{u}}_{j,i})]$$

$$U_1=\int_0^1[\lambda_1(P_1)\gamma u_{1k,k}-\lambda_2(P_1)u_{2k,k}]\delta_{ij}+$$
$$+\mu_1(P_1)(u_{1i,j}+u_{1j,i})-\mu_2(P_1)(u_{2i,j}+u_{2j,i})\}u_{1i,j}\,d\gamma$$

$$U_2=\int_0^1\{[\lambda_1(\mathbf{P}_2)\gamma u_{2k,k}+\lambda_2(\mathbf{P}_2)u_{1k,k}]\delta_{ij}+$$
$$+\mu_1(\mathbf{P}_2)(u_{2i,j}+u_{2j,i})+\mu_2(\mathbf{P}_2)(u_{1i,j}+u_{1j,i})\}u_{2i,j}\,d\gamma$$

$$H_D=\frac{1}{2}\omega\theta^\circ\int_0^1[\lambda_2(\mathbf{P}_3)E_{kk}^*\bar{E}_{kk}^*+2\mu_2(\mathbf{P}_3)E_{ij}^*\bar{E}_{ij}^*]d\gamma+\rho\theta^\circ r$$

$$\mathbf{P}_1=(\theta^\circ,\Omega,\gamma\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2),\ \mathbf{P}_2=(\theta^\circ,\Omega,\mathbf{E}_1,\gamma\mathbf{E}_2),\ \mathbf{P}_3=(\gamma\theta^\circ,\ \omega/a[\gamma\theta^\circ],\ \mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2)$$

где $\lambda^*=\lambda_1+i\lambda_2$ и $\mu^*=\mu_1+i\mu_2$ — комплексные параметры Лямэ.

Для изотропных материалов зависимость λ^* и μ^* от $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ имеет вид: $[\lambda^*, \mu^*](\ldots, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)=[\lambda^*, \mu^*](\ldots, J_{1\alpha}, J_{2\alpha}, P_k)$, $J_{(1,2)1}=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_{1,2}$, $J_{(1,2)2}=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_{1,2}^2$, $J_{(1,2)3}=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_{1,2}^3$, $P_1=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$, $P_2=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_1^2\mathbf{E}_2$, $P_3=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^2$, $P_4=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_1^2\mathbf{E}_2^2$

Сформулированный выше принцип и может быть использован для численной реализации краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. Киев: Наукова думка, 1971. 328 с.
2. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 132 с.
3. *Мешков С. И.* Вязкоупругие свойства металлов. М.: Металлургия, 1974. 192 с.
4. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 536 с.
5. *Huang N. C., Lee E. H.* Thermomechanical coupling behavior of viscoelastic rods subjected to cyclic loading.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 1, p. 127 (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е., 1967, т. 34, № 3, с. 57).
6. *Сорокин Е. С., Муравский Г. В.* Об учете упругих несовершенств материалов методами теории наследственной упругости.— Строит. механ. и расчет сооружений, 1975, № 4, с. 52.
7. *Parker N. S., Hibbert G. E.* The interpretation of dynamic measurements on nonlinear viscoelastic materials.— Rheol. acta, 1974, v. 13, No. 6, p. 910.
8. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
9. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
10. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.

Поступила в редакцию
6.III.1978