

УДК 678/539.376.001

ИЗГИБ КОРОТКИХ БАЛОК ИЗ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО АРМИРОВАННОГО ПЛАСТИКА

АФАНАСЕНКО Н. Н., ЕКЕЛЬЧИК В. С., РИВКИНД В. Я., РЯБОВ В. М.

(Ленинград)

Характерной особенностью армированных пластиков следует считать относительно низкую прочность при межслойном сдвиге, в ряде случаев определяющую несущую способность конструкций. Поскольку при увеличении длительности нагружения, а также с повышением температуры прочность при межслойном сдвиге существенно уменьшается, для учета этой особенности при расчете элементов конструкций необходимо располагать надежной информацией о кратковременной и длительной межслойной прочности армированных пластиков.

Для определения характеристик межслойной сдвиговой прочности слоистых композитов обычно проводят опыты по изгибу коротких балок. Как правило, результаты испытаний обрабатываются с помощью элементарных зависимостей сопротивления материалов. В связи с этим представляет интерес сопоставление найденных приближенных значений с более точными, полученными из решения плоской задачи наследственной теории упругости при учете анизотропии вязкоупругих свойств материала.

В данной работе рассматривается изгиб коротких балок из армированных пластиков на основе решения плоской задачи теории наследственной упругости. Для решения используются метод сеток по координатам и времени, а также сочетание метода сеток по координатам с преобразованием Лапласа по времени. Анализируется состояние напряженное и деформированное состояние балки.

1. В качестве метода экспериментального определения разрушающего напряжения τ_* и модуля G_{xy0} при межслойном сдвиге широкое распространение получили испытания коротких балок на изгиб сосредоточенной силой¹. Результаты таких экспериментов обрабатываются при помощи формулы Журавского

$$\tau_* = \frac{3}{4} P / (b_0 h_0) \quad (1.1)$$

где b_0 и h_0 — ширина и высота сечения балки, P — сосредоточенная сила.

Межслойный модуль сдвига находится из зависимости

$$v_* = v_0 \left(1 + \frac{6}{5} \frac{E_{x0}}{G_{xy0}} \frac{h_0^2}{l_0^2} \right), \quad v_0 = \frac{Pl_0^3}{48E_{x0}I} \quad (1.2)$$

учитывающей влияние поперечного сдвига на прогиб балки [1], где l_0 — длина балки.

Соотношения (1.1) и (1.2) использовались также при длительном нагружении как для выявления длительной прочности стеклопластика при межслойном сдвиге, так и для построения оператора межслойной ползу-

¹ Стеклопластики. Методы определения физико-механических свойств. ГОСТ 5.9127-73, М.

ASTM D 2344-67. Test for apparent horizontal shear strength of reinforced plastics by short beam method. In: Annual book of ASTM Standards. 1973, pt 26.

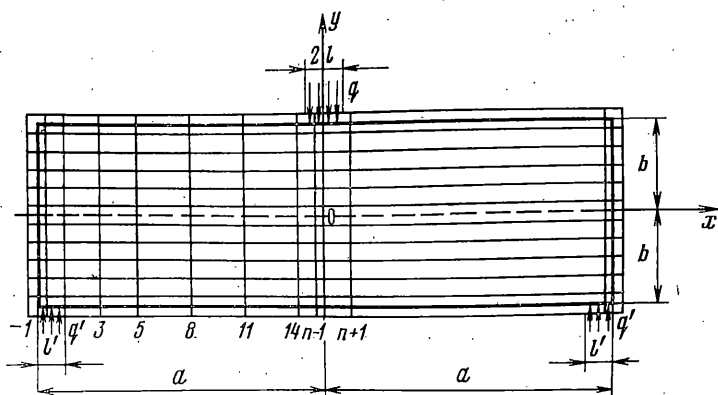
чести

$$D^0 = (G^0)^{-1}, \quad D^0 f(t) = D_0 \left[f(t) + \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \quad (1.3)$$

по кривым ползучести при изгибе коротких балок [2].

В некоторых работах последнего времени [3–5] метод испытаний коротких балок на изгиб критиковался в связи с тем, что действительное распределение касательных напряжений по высоте существенно отличается от параболического, а максимальная величина касательных напряжений значительно превосходит величину τ_* , определенную по формуле (1.1). Такие выводы были получены на основании сопоставления решения плоской задачи теории упругости для ортотропной полосы и решения (1.1), соответствующего элементарной теории сопротивления материалов.

При длительном нагружении стеклопластиков и других армированных пластиков отчетливо проявляются неупругие свойства, особенно заметные при сдвиге [6]. Неупругость армированных пластиков обычно описывается при помощи наследственной теории упругости [7, 8], поэтому применимость формул (1.1) и (1.2) для анализа напряженно-деформированного состояния коротких балок, нагруженных в течение длительного времени, следует оценивать сопоставляя решения (1.1), (1.2) с решениями, полученными для наследственно-упругой ортотропной полосы. Этой цели и посвящена данная работа. Для решения плоской (двумерной) задачи применяются два различных метода: метод сеток и преобразование Лапласа с численной реализацией обращения. Эти численные методы принадлежат к числу наиболее распространенных в теории наследственно-упругих (вязкоупругих) сред.



Фиг. 1

В работе существенно используются результаты, полученные ранее при решении одномерной задачи изгиба вязкоупругой балки на упругом основании [9].

2. Рассмотрим изгиб ортотропной полосы, лежащей на двух опорах и нагруженной сосредоточенной силой в середине пролета (фиг. 1). Реакции опор и сосредоточенную силу заменим распределенной нагрузкой, действующей на небольших по длине участках l' и l ($q = 1/2 P/l$, $q' = 1/2 P/l'$).

Далее используются уравнения линейной теории наследственной упругости [6–8, 10]. Разрешающее уравнение имеет вид

$$\frac{1}{E_x^\circ} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \left(\frac{1}{2G_{xy}^\circ} - \frac{\mu_{yx}^\circ}{E_x^\circ} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y^\circ} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0 \quad (2.1)$$

где $F(x, y, t)$ — функция напряжений, $1/E_x^\circ$, $1/G_{xy}^\circ$, μ_{yx}° , $1/E_y^\circ$ — операторы, определяемые соотношениями

$$\frac{1}{E_x^\circ} f(t) = \frac{1}{E_{x0}} \left[f(t) + \lambda_x \int_0^t \partial_\alpha(-\beta_x, t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \quad (2.2)$$

$$\mu_{yx}^\circ f(t) = \mu_{yx0} \left[f(t) + \lambda_{\mu_{yx}} \int_0^t \partial_\alpha(-\beta_{\mu_{yx}}, t-\tau) f(\tau) d\tau \right]$$

Здесь в качестве ядра интегрального оператора применяется ∂_α — функция Работнова [6]. Аналогично определяются операторы $1/E_y^\circ$, $1/G_{xy}^\circ$.

Здесь α , $\beta_x, \dots, \mu_{yx0}$, E_{x0} , E_{y0} , G_{xy0} — некоторые постоянные. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} (F_{xx}'')_{y=b} &= -P \quad (-l \leq x \leq l), \quad (F_{xx}'')_{y=b} = 0 \quad (x > l, x < -l) \\ (F_{xx}'')_{y=-b} &= -\frac{P}{2} \begin{pmatrix} x \geq a-l' \\ x \leq l'-a \end{pmatrix}, \quad (F_{xx}'')_{y=-b} = 0 \quad \begin{pmatrix} x > l'-a \\ x < a-l \end{pmatrix} \\ (F_{yy}'')_{x=\pm a} &= 0, \quad (F_{xy}'')_{x=\pm a} = 0_{y=\pm b} \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. При решении задачи (2.1)–(2.3) методом сеток задавать ядро $\partial_\alpha(-\beta, t)$ интегрального члена в (2.2) с помощью таблицы, хранимой в памяти ЭВМ, нецелесообразно, поскольку рассматриваемая задача громоздка в смысле хранимой информации. Поэтому была проведена кусочно-полиномиальная аппроксимация табличных значений вспомогательной функции $F_1(\alpha, x)$, описанной в [8] полиномом вида

$$F_1(\alpha, x) \approx \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \left(F_1(\alpha, x) = \frac{\partial_\alpha(-\beta, t)}{t^\alpha}, \quad x = \beta t^{1+\alpha} \right)$$

Такие полиномы были построены для $\alpha = -0.8$ на четырех участках изменения аргумента x : $0 \leq x < 1$, $1 \leq x < 6$, $6 \leq x < 20$, $20 \leq x < 100$, при этом максимальная степень полинома равна девяти. Существенным моментом является наличие особенности в ядре интегрального оператора при $t-\tau \rightarrow 0$, поэтому каждый из интегралов в уравнении (2.1) разбиваем на сумму двух

$$\int_0^t \partial_\alpha(-\beta, t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{t-h} \partial_\alpha(-\beta, t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_{t-h}^t \partial_\alpha(-\beta, t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

На участке $[0, t-h]$ ядро особенности не имеет и к тому же является гладкой слабо изменяющейся функцией, так что для вычисления первого интеграла можно применить составную (или большую) формулу трапеций. Для вычисления второго интеграла в (3.1) воспользуемся мультипликативным методом выделения особенности [11], построив интерполя-

ционную квадратурную формулу с весом $\partial_\alpha(-\beta, t)$:

$$\int_0^h \partial_\alpha(-\beta, \tau) f(t-\tau) d\tau = A(h) f(t) + B(h) f(t-h)$$

Функция напряжения $F(x, y, t)$ определяется однозначно, если фиксировать ее значения на прямой $x=a$ при $y=\pm b$ и считать ее симметричной относительно оси y . На плоскости (x, y) (фиг. 1) строится сетка с шагом h по оси x и шагом h_1 по оси y : $h=a/n$, $h_1=2b/n_1$, где n, n_1 — натуральные числа. На фиг. 1 и при выполнении числовых расчетов в дальнейшем принималось $n=16$, $n_1=9$.

Обозначим через (x_i, y_j) узлы сетки $x_i=-a+(i+1/2)h$, $i=-1, 0, \dots, n-1$; $y_j=-b+(j+1/2)h_1$, $j=-1, 0, \dots, n_1$.

Примем $F_{ij}^s = F(x_i, y_j, t_s)$, тогда в силу симметрии относительно оси y (фиг. 1):

$$F_{n-2,j}^s = F_{n+1,j}^s, \quad F_{n-1,j}^s = F_{n,j}^s \quad (j=-1, 0, \dots, n_1)$$

Граница области расположена между двумя соседними сеточными слоями, поэтому значения функций $F(x, y, t)$ и $\partial F/\partial n$, заданные на границе, аппроксимируем по значениям сеточной функции F_{ij}^s на этих пограничных слоях. Далее, заменяя производные, входящие в уравнение (2.1), соответствующими разделенными разностями, а интегралы — квадратурными суммами, приходим к системе сеточных уравнений с тринадцатиточечным шаблоном на каждом слое по времени, которую можно записать в матричной форме

$$D_2 F_{i+2}^s + D_1 F_{i+1}^s + D_3 F_i^s + D_1 F_{i-1}^s + D_2 F_{i-2}^s = \Phi_i \quad (3.2)$$

где D_1, D_2, D_3 — матрицы размерности $(n_1-2) \times (n_1-2)$, Φ_i — вектор-столбец размерности n_1-2 , F_i^s — вектор-столбец величин F_{ij}^s при $j=1, 2, \dots, n_1-2$.

Система уравнений (3.2) решается методом матричной прогонки.

4. Применяя преобразование Лапласа по переменной t к уравнению (2.1) с учетом свойств входящих в него операторов и положив

$$F^\sim(x, y, z) = \int_0^\infty e^{-zt} F(x, y, t) dt$$

придем к уравнению

$$\begin{aligned} a_y \frac{\partial^4 F^\sim}{\partial y^4} + a_{xy} \frac{\partial^4 F^\sim}{\partial x^2 \partial y^2} + a_x \frac{\partial^4 F^\sim}{\partial x^4} &= 0 \\ a_y &= \frac{1}{E_{x0}} \left(1 + \frac{\lambda_x}{z^{1+\alpha} + \beta_x} \right), \quad a_x = \frac{1}{E_{y0}} \left(1 + \frac{\lambda_y}{z^{1+\alpha} + \beta_y} \right) \\ \frac{1}{2} a_{xy} &= \left(\frac{1}{2G_{xy0}} - \frac{\mu_{yx0}}{E_{x0}} \right) - \frac{\mu_{yx0} \lambda_{\mu yx}}{E_{x0}} \left(1 + \frac{\lambda_x}{\beta_x - \beta_{\mu yx}} \right) \frac{1}{z^{1+\alpha} + \beta_{\mu yx}} - \\ &- \frac{\mu_{yx0} \lambda_{\mu yx}}{E_{x0}} \left(1 - \frac{\lambda_x}{\beta_x - \beta_{\mu yx}} \right) \frac{1}{z^{1+\alpha} + \beta_x} + \frac{\lambda_{xy}}{2G_{xy0}} \frac{1}{z^{1+\alpha} + \beta_{xy}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (4.1), легко получаются из условий (2.3). При фиксированном z уравнение (4.1) представляет уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными, т. е. эта задача значительно проще, чем задача (2.1) — (2.3). Предположим, что решение (4.1) найдено. Теперь следует

осуществить обращение преобразования Лапласа, значит, найти по изображению $F^\sim(x, y, z)$ функцию $F(x, y, t)$. Теоретически это сделать трудно, ибо $F(x, y, t)$ можно представить интегралом Римана — Меллина

$$F(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} F^\sim(x, y, z) dz \quad (4.2)$$

при достаточно большом значении c . Практически, однако, точно вычислить входящий в (4.2) интеграл удастся лишь в очень редких случаях, и к тому же функция $F^\sim(x, y, z)$ может быть известна приближенно и не всюду, а только при определенных значениях аргументов. Поэтому преобразование Лапласа будем осуществлять приближенно при помощи формул механических квадратур [12, 13]. Из свойств функции $F(x, y, t)$ вытекает, что $F^\sim(x, y, z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$, а функция $W^\sim(x, y, z) = zF^\sim(x, y, z)$ аналитична в некоторой полуплоскости справа от мнимой оси, и к тому же справедливы равенства $W^\sim(x, y, 0) = F(x, y, \infty)$, $W^\sim(x, y, \infty) = F(x, y, 0)$.

Следовательно, целесообразно вместо функции $F^\sim(x, y, z)$ разыскивать функцию $W^\sim(x, y, z)$, удовлетворяющую тому же уравнению (4.1). Граничные условия для $W^\sim(x, y, z)$, как нетрудно проверить, имеют вид (2.3). Решение задачи (4.1), (2.3) может быть найдено методом сеток, приводящим к уравнениям вида (3.2). После этого искомая функция $F(x, y, t)$ восстанавливается с помощью квадратурной формулы [13]:

$$F(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{z} W^\sim(x, y, z) dz \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} W^\sim\left(x, y, \frac{z_k^{(n)}}{t}\right) \quad (4.3)$$

Здесь $A_k^{(n)}$, $z_k^{(n)}$ ($k=1, \dots, n$) — коэффициенты и узлы формул квадратур (вообще говоря, комплексные числа). Формулы вида (4.3), как показано в [13], более удобны и точнее, чем приведенные в [12].

Частным случаем (4.3) при $n=1$, $A_1^{(1)} = z_1^{(1)} = 1$ является известная формула Тер-Хаара обращения преобразования Лапласа.

Следовательно, при применении формулы Тер-Хаара искомая величина $F(x, y, t)$ находится как решение задачи (4.1), (2.3) при фиксированном $z=1/t$.

В общем случае $F(x, y, t)$ получается как линейная комбинация значений решения задачи (4.1), (2.3) при $Z=Z_k^{(n)}/t$ с коэффициентами $A_k^{(n)}$. Объем вычислений при этом увеличивается практически в n раз.

5. Перемещения $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ можно найти по известным деформациям, интегрируя соотношения Коши. Не останавливаясь на промежуточных вычислениях, приведем окончательные формулы для них (для краткости аргументы у $F(x, y, t)$ опущены):

$$u(x, y, t) = \frac{1}{E_x^\circ} \int_0^x F_{yy}'' dx - \frac{\mu_{yx}^\circ}{E_y^\circ} F_x', \quad v(x, y, t) = \frac{\mu_{yx}^\circ}{E_x^\circ} F_y' + \frac{1}{E_y^\circ} \int_0^y F_{xx}'' dy - \int_x^a \left[2 \frac{\mu_{yx}^\circ}{E_y^\circ} F_{xy}'' - \frac{1}{G_{xy}^\circ} F_{xy}'' - \frac{1}{E_x^\circ} \int_0^x F_{yy}''' dx - \frac{1}{E_y^\circ} \int_0^y F_{xx}''' dx \right] dx \quad (5.1)$$

Далее рассмотрим величину $v(x, 0, t)$, для которой из (5.1) получим искомое выражение.

Применяя преобразование Лапласа к (5.1), найдем изображение перемещения $v(x, 0, t)$ как функцию ранее найденной величины $zF^{\sim}(x, y, z)$, после чего снова вычислим обращение преобразования по формуле (4.3). Заметим, что функция $zF^{\sim}(x, y, z)$ известна лишь на сетке значений по x, y , так что при вычислении входящих в (5.1) производных необходимо использовать соответствующие разностные аппроксимации, а при вычислении интеграла — применять квадратурные формулы (например, формулу трапеций).

6. Касательные напряжения $\tau(x, y, t)$ вычислялись по методу сеток и с помощью преобразования Лапласа. При этом были получены практически совпадающие результаты. Поэтому перемещения $v(x, 0, t)$, определяемые по формулам (5.1) после вычисления напряжений, в дальнейшем находились только с помощью преобразования Лапласа, более экономичного с точки зрения затрат машинного времени.

Программы вычислений были записаны на языке АЛГОЛ-60, расчет производился на ЭВМ БЭСМ-3М и М-222. Вычисления выполнялись для различных вариантов, в которых варьировались: геометрический параметр — отношение сторон полосы a/b и параметры, характеризующие анизотропию упругости при $t=0$ (E_{x0}/G_{xy0} , E_{x0}/E_{y0}) и при $t \rightarrow \infty$ (длительное нагружение в течение десятков лет в стеклообразном состоянии, $E_{x\infty}/G_{xy\infty}$, $E_{x\infty}/E_{y\infty}$).

Некоторые из полученных результатов приведены ниже.

Для восьми вариантов, различающихся геометрией и степенью анизотропии, исследовалось начальное распределение касательных напряжений ($t=0$).

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
a/b	4	4	4	4	4	4	5	6
E_{x0}/E_{y0}	20	20	1	1	5	7	5	5
E_{x0}/G_{xy0}	20	2.6	2.6	20	10	100	10	10
μ_{yx0}	0.1	0.1	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

Соотношения упругих констант и геометрия первого варианта выбраны такими же, как в [3] для углепластика, третий вариант характеризует изотропный материал, второй и четвертый варианты по отношениям упругих констант являются промежуточными между первым и третьим. Пятый, седьмой и восьмой варианты, различающиеся отношениями сторон a/b , по величинам E_{x0}/E_{y0} , $E_{x\infty}/E_{y\infty}$ характерны для стеклопластика при $t=0$, седьмой вариант по отношению сторон $a/b=5$ соответствует известной методике². Шестой вариант характеризует стеклопластик в стеклообразном состоянии при длительном нагружении (десятки лет).

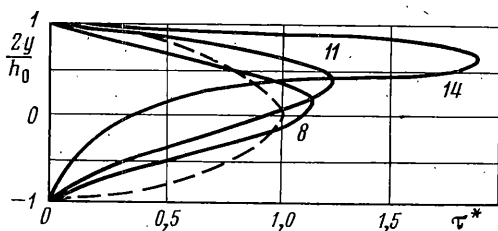
Как показали результаты вычислений, распределение касательных напряжений $\tau(x, y, 0)$ по высоте и длине балки в первом варианте качественно соответствует результатам, полученным в [3] с помощью метода конечных элементов, однако имеется количественное различие — максимальные напряжения $\tau_{\max}(x, y, 0)$ в [3] несколько больше.

Параболическое распределение касательных напряжений

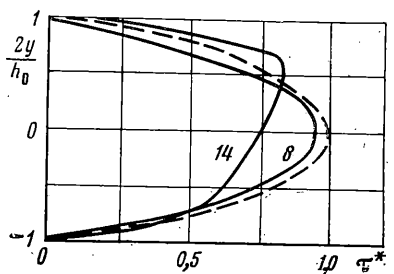
$$\tau_0(x, y) = Q(x)S(y)/(Ib_0) \quad (6.1)$$

соответствующее элементарной теории сопротивления материалов и приводящее для максимальных напряжений на нейтральной оси балки к формуле (1.1), для сечений балки по длине вне области действия нагрузки во всех вариантах, кроме второго, удовлетворительно описывает зависимость $\tau(x, y, 0)$, получаемую по более точной теории (2.1). В местах приложения нагрузки максимальные касательные напряжения замет-

² См. подстрочное примечание к стр. 118.



Фиг. 2



Фиг. 3

но возрастают и смещаются с нейтральной оси балки к области действия нагрузки.

На фиг. 2, 3 приведены графики распределения касательных напряжений $\tau(x, y, 0)$ по высоте для различных вертикальных сечений балки по длине для второго и четвертого вариантов соответственно ($\tau^* = \tau/\tau_*$). Штриховой линией показано параболическое распределение (6.1). Анизотропия упругих свойств приводит к некоторому перераспределению касательных напряжений, причем наибольшее различие между $\tau(x, y, 0)$ и $\tau_0(x, y)$ наблюдается тогда, когда отношение E_{x0}/E_{y0} достаточно велико, а отношение E_{x0}/G_{xy0} мало (вариант 2, фиг. 2).

Величина максимальных касательных напряжений $\tau(x, y, 0)$ в седьмом варианте, соответствующем известной методике, в большей части длины балки незначительно отличается от величины τ_* по формуле (1.1). В вязкоупругой балке с течением времени напряжения перераспределяются. Это видно из сопоставления кривых на фиг. 4, где приведены начальные распределения напряжений $\tau(x, y, 0)$ (кривые 1, 3) и распределения $\tau(x, y, t_1)$ при $t_1 = 10^4$ мин (кривые 2, 4).

Кривые 1, 2 соответствуют сечению 14, а кривые 3, 4 — сечению 7.

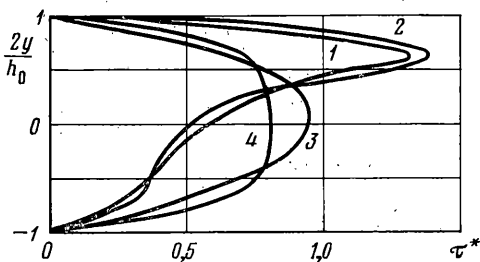
При выполнении этого расчета использовались следующие значения исходных параметров: $a/b=4$, $E_{x0}/E_{y0}=20$, $E_{x0}/G_{xy0}=40$, $\lambda_x=0.01$, $\lambda_y=\lambda_{xy}=2$, $\lambda_{\mu x}=0.35$, $\beta_x=\beta_y=\beta_{xy}=0.1 \text{ мин}^{-0.2}$, $\beta_{\mu x}=0.3 \text{ мин}^{-0.2}$, $\alpha=-0.8$, $\mu_{yx0}=0.33$.

В количественном отношении величина максимальных касательных напряжений во времени практически не изменяется. Таким образом, возможность применения формулы Журавского (1.1) для оценки максимальных касательных напряжений при изгибе коротких образцов зависит от геометрии образца a/b и степени анизотропии E_{x0}/E_{y0} , E_{x0}/G_{xy0} .

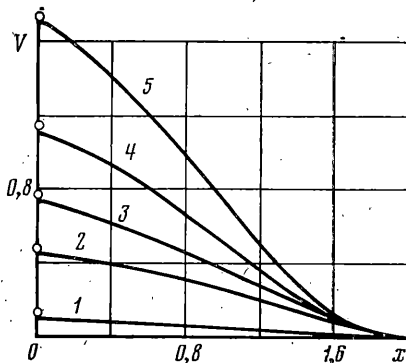
При испытании стеклопластиков судостроительного назначения по известной методике погрешность формулы (1.1) невелика. Для среднего по длине сечения упругой балки (между опорой и силой P) этот вывод был получен раньше [14] при использовании другого численного метода. Разумеется, при испытании коротких образцов необходимо следить за характером разрушения, не допуская разрушения образцов от действия нормальных напряжений σ_x , поверхностной неустойчивости в сжатой зоне, смятия и т. д.

Перейдем к рассмотрению деформированного состояния вязкоупругой балки. На фиг. 5 приведены кривые прогибов в различные моменты времени (ввиду симметрии показана половина балки по длине), найденные по формуле (5.1) с помощью численного обращения преобразования Лапласа ($V = [\nu E_{x0} I / (P l_0^3)] \cdot 10^4$).

Кривые 1–5 соответствуют моментам времени в минутах: $t=0, 10^2, 10^4, 10^6, \infty$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Вычисления проводились для исходных данных, приведенных выше, причем было принято: $E_{x0}=10^5$ МПа, $a=2$ см. Максимальные перемещения вязкоупругой балки в различные моменты времени можно также найти, если применить принцип Вольтерра к приближенной зависимости (1.2). Используя теоремы обращения и умножения для ∂_α -функции [6], получим

$$v_*(t) = \frac{Pl_0^3}{48E_{x0}I} \left[1 + \frac{6}{5} \frac{E_{x0}}{G_{xy0}} \frac{h_0^2}{l_0^2} + \lambda_x \partial_\alpha^* (-\beta_x) + \frac{6}{5} \frac{E_{x0}}{G_{xy0}} \frac{h_0^2}{l_0^2} \lambda_{xy} \partial_\alpha^* (-\beta_{xy}) \right]$$

Параметры P , h_0 , l_0 имеют тот же смысл, что и в (1.1), (1.2). Интегралы

$$\partial_\alpha^* (-\beta_x) = \int_0^t \partial_\alpha (-\beta_x, \tau) d\tau$$

вычислялись при помощи таблиц дробно-экспоненциальной функции [8].

Результаты расчета максимальных прогибов образца показаны светлыми точками на фиг. 5; они практически совпадают с величинами прогибов, полученными из более точной теории. Таким образом, эффект сжатия нормали, не учитываемой зависимостью (1.2), в рассмотренном диапазоне изменения исходных параметров оказывается незначительным, и поэтому зависимость (1.2) может быть использована для построения оператора межслойной податливости по кривым прогибов коротких балок при изгибе, как это было сделано в [2].

В рассмотренной выше плоской задаче наследственной упругости для ортотропной полосы применение двух различных методов решения — сеточного и преобразования Лапласа с численной реализацией обращения — привело к практически совпадающим результатам. Преобразование Лапласа позволяет находить решение в требуемый момент времени независимо от решения в предыдущие моменты времени и этим выгодно отличается от сеточного метода. Поэтому при практической реализации на ЭВМ преобразование Лапласа оказывается более простым и требующим меньших затрат машинного времени. Однако в задачах наследственной механики этот метод применим не всегда, например, его нельзя использовать в задачах с переменными границами [6], кроме того, он вообще не применим для стареющих материалов, описываемых неразностным ядром [7]. В этом отношении преимущество имеет более универсальный сеточный метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. 2. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 456 с.
2. Туник А. Л., Тóмашевский В. Т. Ползучесть и длительная прочность при междуслойном сдвиге ориентированных стеклопластиков.— Механ. полимеров, 1971, № 6, с. 1003.
3. Berg C. A., Tirosh I., Israeli M. Analysis of short beam bending of fiber reinforced composites. In: Composite materials: testing and design. 2nd Conference. Anahaim, Calif., Philadelphia, 1971, p. 206.
4. Жигун И. Г., Якушин В. А., Ивонин Ю. Н. Анализ методов определения межслойной сдвиговой прочности композитных материалов.— Механ. полимеров, 1976, № 4, с. 640.
5. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. Анализ распределения касательных напряжений при трехточечном изгибе балок из композитов.— Механ. полимеров, 1977, № 1, с. 56.
6. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
7. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
8. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
9. Афанасенко Н. Н., Екельчик В. С., Ривкин В. Я., Рябов В. М. Вычислительные аспекты в задачах вязкоупругости.— В сб.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы IV Всес. конф. Ч. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 5.
10. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1959. 464 с.
12. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа: М.: Наука, 1974. 223 с.
13. Рябов В. М. Обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул.— В сб.: Методы вычислений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976, вып. 10, с. 48.
14. Абрамов С. Г., Екельчик В. С. Изгиб ортотропной балки-стенки.— В сб.: Свойства судостроительных стеклопластиков и методы их контроля. Л.: Судостроение, 1974, вып. 3, с. 38.

Поступила в редакцию
2.VII.1978