

УДК 539.214;539.374

ПРОЦЕССЫ С НЕИЗМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБЩЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

ДОЩИНСКИЙ Г. А., МАРГЫНЕНКО М. Г.

(Томск)

Основные затруднения теоретического описания процессов сложного нагружения связаны не только с противоречиями в оценках подобных процессов соответственно различным вариантам новейших теорий пластичности, но главным образом с тем, что эти процессы еще недостаточно изучены экспериментально.

Влияние сложности процесса деформирования — отражение векторных свойств упрочняющегося пластического материала — можно исследовать в таких условиях, в которых остается фиксированной скалярная характеристика нагружения — интенсивность напряжений. Проведенные исследования таких процессов [1—6] позволили отметить свойственные им характерные закономерности, использование которых дает возможность теоретического описания этих процессов различными теориями.

В данной работе рассматривается описание процессов с фиксированной интенсивностью напряжений $\sigma_i = \text{const}$ в общей математической теории пластичности.

1. Траектории нагружения в трехмерном подпространстве пространства Ильюшина [7] представляются различными кривыми L на поверхности сферы радиуса $r = |s| = s = \sqrt{2/3} \sigma_i$.

Если за обобщенные координаты точки траектории нагружения взять угол поворота главных осей тензора напряжений α и характеристику вида напряженного состояния $m = \sigma_2 / \sigma_1$, то радиус-вектор сферической кривой в ортогональном базисе представится в виде

$$s = s^i e_i, \quad s^i = \|s^1 s^2 s^3\| \quad (1.1)$$

$$s^1 = \frac{s}{4(1+m^2-m)^{1/2}} [(1+m) + 3(1-m) \cos 2\alpha]$$

$$s^2 = \frac{\sqrt{3}s}{4(1+m^2-m)^{1/2}} [(1+m) + (1-m) \cos 2\alpha]$$

$$s^3 = \frac{\sqrt{3}s}{4(1+m^2-m)^{1/2}} (1-m) \sin 2\alpha$$

Обозначив

$$\frac{1+m}{2(1+m^2-m)^{1/2}} = \cos \beta, \quad \frac{\sqrt{3}(1-m)}{2(1+m^2-m)^{1/2}} = \sin \beta$$

компоненты матрицы (1.1) можно переписать в форме

$$s^i = \begin{pmatrix} s [1/2 \cos \beta + (\sqrt{3}/2) \sin \beta \cos 2\alpha] \\ s [(\sqrt{3}/2) \cos \beta - 1/2 \sin \beta \cos 2\alpha] \\ s \sin \beta \sin 2\alpha \end{pmatrix}$$

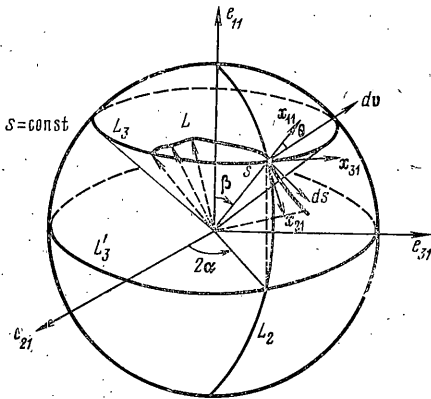
Переходом от базиса e_i к новому e_{i1} с матрицей преобразования

$$a_{i1}^{j1} = \begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

приходим к виду

$$s^{i1} = \| s \cos \beta \quad s \sin \beta \cos 2\alpha \quad s \sin \beta \sin 2\alpha \| \quad (1.3)$$

В результате модуль вектора — s , углы β и 2α приобретают смысл сферических координат (фиг. 1). При этом изменение вида напряженного состояния будет характеризоваться движением по меридианам сферы, а поворот главных осей — движением по параллелям.



Фиг. 1

Согласно общей математической теории пластичности Ильюшина [7], вектор деформации v связан с вектором напряжения зависимостью $v = A^i p_i$, где p_i — репер Френе, A^i — функционалы, зависящие от характеристик внутренней геометрии траектории нагружения.

Уравнение элементов трехгранника Френе требует, чтобы радиус-вектор точки кривой был задан как функция длины дуги. Если же радиус-вектор задан как функция произвольного параметра, то уравнения, преобразованные к этому параметру, претерпевают существенные измене-

ния и практическое использование репера Френе становится затруднительным, в особенности для неплоских кривых. Поэтому в данной работе используем векторно-параметрическое задание траектории нагружения, рассматриваемой как линия на поверхности (на сфере $s = \text{const}$), и тогда вектор v разлагаем в локальном репере x_{i1} на поверхности, точки которой отнесены к криволинейным (сферическим координатам), приведенным к одному параметру

$$\begin{aligned} x^{i1} &= x^{i1}(t) \quad (i=1, 2, 3) \\ x^{11} &= s = \text{const}, \quad x^{21} = \beta \quad (0 < x^{21} < \pi), \quad x^{31} = 2\alpha \quad (0 \leq x^{31} \leq 2\pi) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Заметим, что для плоских траекторий $x^{31} = \text{const}$ (меридианы сферы) локальный репер x_{i1} совпадает с точностью до отражения с репером Френе.

Таким образом, имеем

$$v = V^i x_{i1}^0, \quad x_{i1}^0 = x_{i1} / |x_{i1}| = B^{i1} x_{i1}, \quad x_{i1} = \partial s / \partial x^{i1} = b_{i1}^{j1} e_{j1} \quad (1.5)$$

Функционалы V^{i1} зависят от внутренней геометрии поверхности, которой принадлежит линия нагружения. В конечном итоге можно считать $V^{i1} = V^{i1}(t)$. История нагружения отражается изменением V^{i1} .

Продифференцируем выражение (1.5):

$$dV = dV^{i1} B^{i1} x_{i1} + V^{i1} dB^{i1} x_{i1} + V^{i1} B^{i1} dx_{i1} \quad (1.6)$$

Используя деривационные формулы для локального репера [8]

$$dx_{i1} = \Gamma_{i1j1}^{k1} dx^{j1} x_{k1} \quad (i1, j1, k1=1, 2, 3)$$

где Γ_{ij1}^{k1} — символы Кристоффеля — Шварца второго рода

$$\Gamma_{ij1}^{k1} = \frac{1}{2} g^{k1i1} \left(\frac{\partial g_{l1i1}}{\partial x^{j1}} + \frac{\partial g_{lij1}}{\partial x^{i1}} + \frac{\partial g_{lij1}}{\partial x^{i1}} \right)$$

$g_{ij1} = (x_{i1} x_{j1})$ — метрический тензор, отнесенный к криволинейным координатам x^{i1} , запишем (1.6) в форме

$$dv = (dV^{i1} B^{i1} + V^{k1} B^{k1} \Gamma_{kij1} dx^{j1} + V^{i1} dB^{i1}) x_{i1}^{\circ} \quad (1.7)$$

Для сферической системы координат масштабные коэффициенты B^{i1} и символы Γ_{kij1}^{i1} будут иметь вид

$$B^{11} = 1, \quad B^{21} = 1/x^{11}, \quad B^{31} = 1/x^{11} \sin x^{21}, \quad \Gamma_{1121}^{21} = \Gamma_{2111}^{21} = \Gamma_{1131}^{31} = \Gamma_{3111}^{31} = 1/x^{11}$$

$$\Gamma_{2121}^{11} = -x^{11}, \quad \Gamma_{2131}^{31} = \Gamma_{3121}^{31} = \text{ctg } x^{21}, \quad \Gamma_{3131}^{11} = -x^{11} \sin^2 x^{21}, \quad \Gamma_{3131}^{21} = -1/2 \sin 2x^{21}$$

Пусть в результате эксперимента установлено

$$dv = h^{i1} x_{i1}^{\circ}, \quad h^{i1} = h^{i1}(t) \quad (1.8)$$

Приравнивая компоненты при одноименных векторах в выражениях (1.7) и (1.8) и поделив на dt , получаем нормальную систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой существует на всем интервале изменения t и определяется единственным образом при любых начальных условиях вида $V^{i1} = V_0^{i1}$ при $t = t_0$. Если эту систему представить в векторно-матричном виде

$$dv/dt = U(t)v + h(t) \quad (1.9)$$

при начальном условии $v(t_0) = c$, то ее решением будет функция

$$v = X(t)c + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\varphi)h(\varphi)d\varphi \quad (1.10)$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы для (1.9):

$$X(t) = E + \int_{t_0}^t U(t)dt + \int_{t_0}^t U(t) \int_{t_0}^t U(t)dt^2 + \dots \quad (1.11)$$

Матричный ряд (1.11) сходится абсолютно и равномерно на $[t_0, t_1]$, в котором функция $U(t)$ непрерывна [9].

2. На сфере $s = \text{const}$ можно выделить три типа кривых (фиг. 1): L_2 (меридианы) — плоские кривые нагружения, при движении вдоль которых непрерывно изменяется вид напряженного состояния ($x^{21} \neq \text{const}$, $x^{31} = \text{const}$); L_3 (параллели) — плоские кривые, вдоль которых изменяется угол поворота главных осей тензора напряжений ($x^{31} \neq \text{const}$, $x^{21} = \text{const}$); L — поверхностные кривые (с кривизной и кручением), вдоль которых $x^{31} \neq \text{const}$, $x^{21} \neq \text{const}$.

В экспериментальных исследованиях, проведенных ранее, были изучены закономерности прироста пластической деформации, проявляющиеся отдельно на кривых L_2 и L_3 [4–6]. Эти эксперименты проводились на машине ZDMU-30 на тонкостенных трубках из различных первоначально изотропных металлов (Ст. 3, Ст. 45, 40X, УН, медь, латунь, дюралюминий) с осуществлением различных типов опытов: $P-M-q$ (растяжение — кручение — внутреннее давление), $P-M$, $M-q$, $P-q$.

Угол вида напряженного состояния и угол поворота главных осей изменялся в пределах $0^\circ-180^\circ$. Деформации изучались в диапазоне $2\div 10\%$, при этом величина прироста пластической деформации в процессе $\sigma_i = \text{const}$ достигала иногда 20% и более от предварительной.

Рассмотрим определение V^{i1} для кривых L_2 и L_3 . Радиус-векторы траектории нагружения (см. (1.3)) имеют вид

$$s = s \cos t e_{11} + s \sin t e_{21} \quad (2.1)$$

$$x^{11} = s, \quad \beta = x^{21} = t, \quad dx^{21} = dt, \quad 2\alpha = x^{31} = 0, \quad dx^{31} = 0$$

$$s = s \cos \beta e_{11} + s \sin \beta \cos t e_{21} + s \sin \beta \sin t e_{31} \quad (2.2)$$

$$2\alpha = x^{31} = t, \quad dx^{31} = dt, \quad dx^{21} = d\beta = 0$$

Матрицы b_{i1}^{j1} и B^{i1} в выражениях (1.5) соответственно будут иметь вид

$$b_{i1}^{j1} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -s \sin t & s \cos t \end{vmatrix}, \quad B^{i1} = \begin{vmatrix} 1 & 1/s \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

$$b_{i1}^{j1} = \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta \cos t & \sin \beta \sin t \\ -s \sin \beta & s \cos \beta \cos t & s \cos \beta \sin t \\ 0 & -s \sin \beta \sin t & s \sin \beta \cos t \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

$$B^{i1} = \begin{vmatrix} 1 & 1/s & 1/(s \sin \beta) \end{vmatrix}$$

В результате анализа экспериментов с процессами $\sigma_i = \text{const}$ было установлено (для обоих случаев) следующее:

1. Вектор dv располагается в плоскости $s-ds$ и угол отклонения его от вектора s (фиг. 1) можно приближенно определить выражением

$$\sin \theta = E_c / (3\pi E_k) \quad (2.5)$$

где E_c и E_k — секущий σ_i / e_i и касательный $d\sigma_i / de_i$ модули на диаграмме растяжения при соответствующей $\sigma_i = \sqrt{s/2}$.

Следует, однако, заметить, что последняя зависимость для слабо упрочняющихся материалов с $E_c / E_k \geq 3\pi$ неприемлема, а в пределе (для идеально пластического тела) свободные пластические деформации становятся вообще неопределенными.

2. Модуль вектора dv пропорционален дифференциалу дуги траектории нагружения ($d\Sigma$):

$$|dv| = dv = nd\Sigma, \quad n = \frac{1}{2\pi} \frac{de_i}{d\sigma_i} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{E_k} \quad (2.6)$$

Формулу (2.6) с учетом (2.5) можно записать в виде

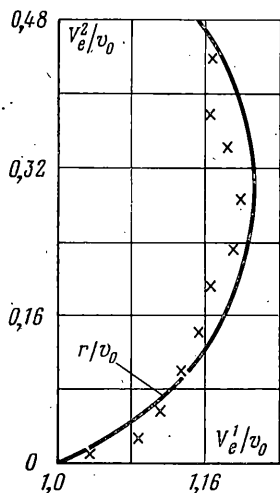
$$dv = v_0 \sin \theta d\Sigma / ds, \quad v_0 = |v_0| = \sqrt{s/2} E_c \quad (2.7)$$

где v_0 — предварительная пластическая деформация при выходе простым нагружением на сферу $s = \text{const}$, величина $d\Sigma = sd\beta = sdt$ для кривых L_2 и $d\Sigma = s \sin \beta d(2\alpha) = s \sin \beta dt$ для кривых L_3 .

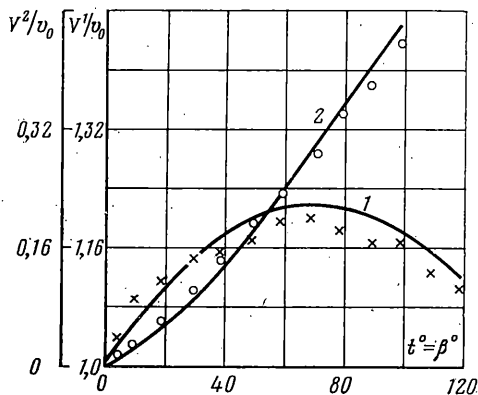
Разложение вектора dv в локальном репере x_{i1} для этих случаев будет

$$dv = \frac{1}{2} v_0 \sin 2\theta dt x_{11}^\circ + \frac{1}{s} v_0 \sin^2 \theta dt x_{21}^\circ \quad (2.8)$$

$$dv = \frac{1}{2} v_0 \sin 2\theta \sin \beta dt x_{11}^\circ + \frac{1}{s} v_0 \sin^2 \theta dt x_{31}^\circ$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Матрицы $U(t)$, $h(t)$ и решение (1.10) примут вид (первый случай):

$$U(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad h(t) = \begin{vmatrix} 1/2 v_0 \sin 2\theta \\ v_0 \sin^2 \theta \end{vmatrix}, \quad v(t_0) = c = \begin{vmatrix} v_0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}, \quad v^{i1} = \begin{vmatrix} V^{11} & V^{21} \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

$$V^{11} = 1/2 v_0 \sin 2\theta \sin t + v_0 \sin^2 \theta + v_0 \cos^2 \theta \cos t$$

$$V^{21} = 1/2 v_0 \sin 2\theta \cos t - 1/2 v_0 \sin 2\theta - v_0 \cos^2 \theta \sin t$$

В неподвижном репере e_{i1} выражения для V^{i1} будут равны

$$V_e^{11} = v_0 (\cos^2 \theta + \sin \theta \sin(\theta+t)), \quad V_e^{21} = v_0 (1/2 \sin 2\theta - \sin \theta \cos(\theta+t)) \quad (2.10)$$

Если от векторно-параметрических уравнений (2.10) перейти к параметрическим и затем исключить параметр t , то получим уравнение окружности (фиг. 2), по которой перемещается конец вектора v при движении конца вектора s по сфере $\sigma_i = \text{const}$ при $2\alpha = \text{const}$:

$$(V_e^{11} - v_0 \cos^2 \theta)^2 + (V_e^{21} - 1/2 v_0 \sin 2\theta)^2 = v_0^2 \sin^2 \theta \quad (2.11)$$

Расположение центра этой окружности и ее радиус зависят от характеристик материала и начальных параметров процесса (на фиг. 2 представлены результаты для Ст. 3, образца № 20, $s = 186,3$ МПа, $r/v_0 = \sin \theta = 0,3156$). Модуль вектора деформации определится выражением

$$|v| = v = v_0 \sqrt{1 + \sin 2\theta \sin t} \quad (2.12)$$

Во втором случае (для L_3) будем иметь

$$U(t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin \beta \\ 0 & 0 & \cos \beta \\ -\sin \beta & -\cos \beta & 0 \end{vmatrix}, \quad h(t) = \begin{vmatrix} v_0 \sin 2\theta \sin \beta \\ 0 \\ v_0 \sin^2 \theta \sin \beta \end{vmatrix}, \quad v(t_0) = c = \begin{vmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

$$X(t) = \begin{vmatrix} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos t & 1/2 \sin 2\beta (\cos t - 1) & \sin \beta \sin t \\ 1/2 \sin 2\beta (\cos t - 1) & \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos t & \cos \beta \sin t \\ -\sin \beta \sin t & -\cos \beta \sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$V^{11} = v_0 \{ (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \theta) + \sin^2 \beta \cos^2 \theta \cos t + 1/2 \sin^3 \beta \sin 2\theta \sin t + 1/2 t \sin \beta \sin 2\theta \cos^2 \beta \}$$

$$V^{21} = v_0 \left\{ -\frac{1}{2} \sin 2\beta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos^2 \theta \cos t + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sin \beta \sin 2\beta \sin 2\theta \sin t - \frac{1}{4} t \sin \beta \sin 2\beta \sin 2\theta \right\} \\ V^{31} = v_0 \left\{ -\frac{1}{2} \sin^2 \beta \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin^2 \beta \cos t - \sin \beta \cos^2 \theta \sin t \right\}$$

Переходя к неподвижному реперу e_{i1} , получим

$$V_{e^{21}} = d_1 + Dt, \quad V_{e^{31}} = -d_2 + d \cos t + d_3 \sin t \quad (2.14)$$

$$V_{e^{31}} = d_3 + d \sin t - d_3 \cos t \\ d = v_0 \sin \beta (2 - \cos^2 \theta), \quad d_1 = v_0 \cos \beta, \quad d_2 = v_0 \sin^2 \theta \sin \beta \\ d_3 = \frac{1}{2} v_0 \sin 2\theta \sin^2 \beta, \quad D = \frac{1}{2} v_0 \sin 2\theta \sin^2 \beta$$

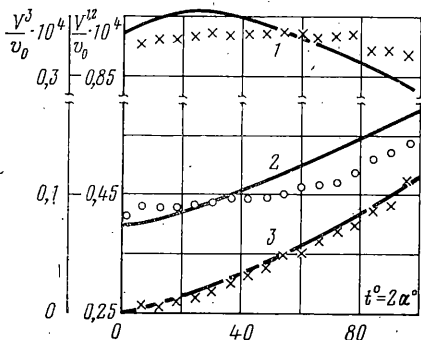
Траектория деформации при изменении угла поворота главных осей тензора напряжений представляет собой винтовую линию на цилиндре, уравнение направляющей окружности которого в плоскости $e_{21} - e_{31}$ имеет вид

$$(V_{e^{21}} + d_2)^2 + (V_{e^{31}} - d)^2 = d^2 + d_2^2$$

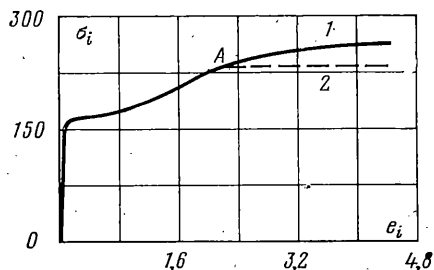
а кривизны траектории

$$\kappa_1 = (1 - \cos^2 \theta \cos^2 \beta)^{1/2} / [v_0 \sin \theta \sin \beta (1 + \sin^2 \theta \sin^2 \beta)] \\ \kappa_2 = \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} \beta / [v_0 (1 + \sin^2 \theta \sin^2 \beta)]$$

Сравнение полученных теоретических зависимостей с экспериментальными данными показывает удовлетворительное соответствие. Так, на фиг. 3 сплошными линиями показаны расчетные (по (2.10)) значения функционалов V^1 (кривая 1) и V^2 (кривая 2) для нагружения $\sigma_i = 186,3$ МПа с непрерывным изменением вида напряженного состояния и соответствующие экспериментальные точки.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 приведено аналогичное сопоставление расчетных и экспериментальных значений V^i при повороте главных осей (кривые 1-3).

Диаграмма растяжения испытанного материала σ_i (МПа) - e_i (%) представлена на фиг. 5. Участок 1 соответствует $\sigma_i = 810,91 e_i^{0,33}$, а прямая 2 соответствует $\sigma_i = 228,3$ МПа; в точке А касательный модуль $E_n = 3452$ МПа, а секущий - $E_c = 10277,4$ МПа. Выражения (2.10), (2.13) были пересчитаны в репер e_i , в котором программировались опыты, при условиях: $s = 186,3$ МПа, $\theta = 18,4^\circ$, $\beta = 0,4$.

3. Перейдем к определению функционалов деформации в общем случае (кривых L). Характерная общность закономерностей развития пластической деформации в условиях неизменной интенсивности напряжений как

при повороте главных осей, так и при изменении вида напряженного состояния (при фиксированных главных направлениях) позволяет сделать следующие предположения для произвольного нагружения $\sigma_i = \text{const}$.

1. Вектор $d\nu$ при нагружениях по сфере $\sigma_i = \text{const}$ всегда располагается в плоскости $s-ds$ (фиг. 1). Действительно, для кривых L_2 ($P-q$ -опыты) это очевидно. Согласно постулату изотропии, условие должно выполняться и для кривой L_3 , которая является совмещаемой с кривой L_2 преобразованием вращения. Вектор $d\nu$, располагаясь в плоскости $s-ds$ (а эта плоскость — касательная к конической поверхности, формируемой вектором s), является вектором на поверхности [10].

2. Модуль вектора $d\nu$ пропорционален $d\Sigma = (g_{i1i1} dx^i dx^i)^{1/2}$ при определении зависимостью (2.7).

3. Угол между векторами $d\nu$ и s (или x_{i1}) остается постоянным при данной интенсивности напряжений и может быть определен выражением (2.5). Поскольку вектор образует коническую поверхность, то при ее развертывании на плоскости координаты векторов на поверхности в базисе $x_{i1}-ds$ остаются без изменения [10]. При постоянстве модуля $|d\nu/d\Sigma|$ угол θ должен также оставаться постоянным.

Для проверки принятых постулатов и последующего решения системы уравнений (1.9) был экспериментально реализован процесс нагружения по линии Вивиани (фиг. 7, а). Испытано четыре образца. Траектории задавались в репере e_i :

$$s = s^i e_i, \quad s^i = \|s \cos t \quad s \sin^2 t \quad 1/2 s \sin 2t\| \quad (3.1)$$

Графическим дифференцированием экспериментальных кривых

$$V^i = V^i(\Sigma), \quad \Sigma = \int_0^{\pi/2} s \sqrt{1 + \sin^2 t} dt$$

на каждой ступени ($\Delta t = 2^\circ - 3^\circ$) определяли dV^i , затем $|d\nu| = \sum_{i=1}^3 (dV^i)^2$.

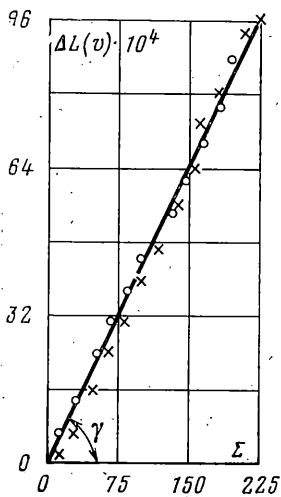
Далее строился график зависимости дополнительной деформации $\Delta L(\nu) = \int_L |d\nu|$ от пути нагружения Σ на сфере.

На фиг. 6 косыми крестами показана такая зависимость для одного из образцов (образец № 18, $s = 186,3$ МПа). Здесь же точками показана аналогичная зависимость для траектории с изменением вида напряженного состояния (кривая типа L_2 на фиг. 1). Видно, что точки располагаются вблизи прямой и коэффициент пропорциональности равен $n = 1/(2\pi E_n) = 0,000452$ (см. диаграмму растяжения для материала, фиг. 5). Таким образом, второе предположение можно считать экспериментально обоснованным и для произвольной сферической кривой.

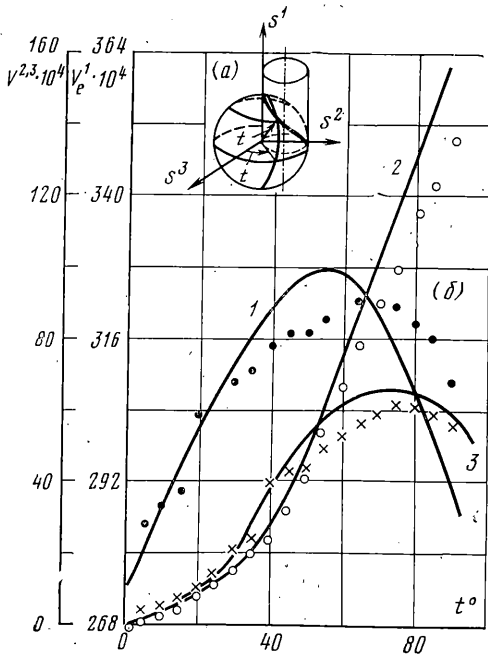
Для оценки первого предположения на каждом шаге Δt° вычислялся определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} dV^1 & dV^2 & dV^3 \\ ds^1 & ds^2 & ds^3 \\ s^1 & s^2 & s^3 \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

который должен быть равным нулю, если вектор $d\nu$ располагается в плоскости $s-ds$. Значения этого определителя были близки к нулю с отклонением в среднем 0,053.



Фиг. 6



Фиг. 7

Получим систему уравнений (1.9) для определения функционалов деформации V^i в случае произвольной кривой. Согласно указанным выше предположениям, можем записать

$$dv = n \cos \theta d\Sigma x_{i1} + n \sin \theta d\Sigma ds \tag{3.3}$$

Разложим вектор ds в локальном репере x_{i1}

$$ds = ds^{i1} x_{i1}, \quad ds^{i1} = \frac{dx^{i1}}{|ds|}, \quad |ds| = \left[\sum_{i1=2,3} (dx^{i1})^2 \right]^{1/2} \tag{3.4}$$

Подставив в (3.3) выражения (3.4), а также значения $d\Sigma$ и n из (2.7), получим

$$dv = h^{i1} x_{i1}^0, \quad h^{i1} = \left[\frac{1}{2} v_0 s a \sin 2\theta \left(\frac{v_0}{s} \right) \sin^2 \theta ds^{21} a \left(\frac{a_0}{s} \right) \sin^2 \theta ds^{31} a \right] \tag{3.5}$$

$$a = \left[(dx^{21})^2 + (\sin x^{21} dx^{31})^2 \right]^{1/2}$$

С учетом (3.5) запишем систему дифференциальных уравнений для определения V^{i1} в случае произвольной кривой

$$\begin{aligned} \frac{dV^{11}}{dt} &= \frac{dx^{21}}{dt} V^{21} + \frac{dx^{31}}{dt} \sin x^{21} V^{31} + f^{11} \\ \frac{dV^{21}}{dt} &= \frac{dx^{21}}{dt} V^{11} + \frac{dx^{31}}{dt} \cos x^{21} V^{31} + f^{21} \\ \frac{dV^{31}}{dt} &= - \frac{dx^{31}}{dt} \sin x^{21} V^{11} - \frac{dx^{31}}{dt} \cos x^{21} V^{21} + f^{31}, \quad f^{i1} = \frac{h^{i1}}{dt} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если траекторию нагружения задавать в репере e_i , то, используя связь между криволинейными координатами x^{i1} и x^i

$$\begin{aligned} x^{11} &= x^1 = s, & x^{21} &= \arccos \left[\frac{1}{2} \cos x^{21} + \left(\sqrt{3}/2 \right) \sin x^{21} \cos x^{31} \right] \\ x^{31} &= \arccos \left(\sin x^{21} \sin x^{31} / \sin x^2 \right) \end{aligned}$$

можно найти компоненты вектора деформации в локальном базисе x_i , а затем перейти к неподвижному реперу e_i :

$$\mathbf{v} = V^{i1} x_i^0 = V^{i1} c_{i1}^0 x_i^0 = V^i x_i^0 = V^i b_i^{*j} e_j = \bar{V}_e^i e_i, c_{i1}^0 \partial x^i / \partial x^{i1} \quad (3.7)$$

где b_i^{*j} — обратная матрица к b_i^j , b_i^j — матрица разложения единичного локального базиса в репере e_i :

$$b_i^j = \begin{vmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 \sin x^3 & \sin x^2 \cos x^3 \\ -\sin x^2 & \cos x^2 \sin x^3 & \cos x^2 \cos x^3 \\ 0 & \cos x^3 & -\sin x^3 \end{vmatrix}$$

Для линии Вивиани (3.1):

$$x^2 = x^3 = t, \quad \cos x^{21} = \frac{1}{2} \cos t + (\sqrt{3}/2) \sin^2 t \\ \sin x^{31} = \sin^2 t / \{1 - [\frac{1}{2} \cos t + (\sqrt{3}/2) \sin^2 t]^2\}^{1/2}$$

$$b_i^j = \begin{vmatrix} \cos t & \sin^2 t & \frac{1}{2} \sin 2t \\ -\sin t & \frac{1}{2} \sin 2t & \cos^2 t \\ 0 & \cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

Система (3.6) была решена численно с шагом $\Delta t = 2^\circ$, затем по формулам (3.7) V^{i1} пересчитаны в репере e_i . На фиг. 7 показаны кривые $1(V^1)$, $2(V^2)$, $3(V^3)$ и экспериментально полученные точки.

Сравнение расчетных и экспериментальных значений деформации показывает удовлетворительное соответствие с отклонениями, не превышающими 10% как и при предварительном простом нагружении, обусловленными, видимо, неидеальной изотропностью материала.

Рассмотренная в публикуемой работе возможность определения функционалов общей математической теории пластичности для процессов с изменением направления вектора напряжений (при фиксированном модуле) позволит в дальнейшем подойти к описанию произвольных нагружений, которые в дифференциальном виде могут представляться как комбинации простых нагружений и нагружений $\sigma_i = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доцинский Г. А., Максак В. И. Пластическая деформация стали при сложном напряженном состоянии с постоянной интенсивностью напряжений. — Инж. ж. МТТ, 1966, № 3, с. 153.
2. Доцинский Г. А., Максак В. И. Экспериментальное исследование пластических деформаций при сложном нагружении. — Инж. ж. МТТ, 1966, № 5, с. 118.
3. Доцинский Г. А., Коренева А. М. Пластическое течение при постоянной интенсивности напряжений. — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 5, с. 163.
4. Доцинский Г. А., Погожева Н. В. О закономерностях прироста пластической деформации при сложном нагружении постоянной интенсивности с фиксированным направлением главных напряжений. — Изв. Томск. политехн. ин-та, 1975, т. 241, с. 3.
5. Доцинский Г. А., Погожева Н. В. Исследование закономерностей пластической деформации при повороте главных осей тензора напряжений. — Изв. Томск. политехн. ин-та, 1975, т. 241, с. 9.
6. Доцинский Г. А. О сложном нагружении в теории пластических деформаций. — В сб.: Материалы научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. И. Ленина. Томск. инж.-строит. ин-т. Секция сопротивления материалов и строит. механ., 1970, с. 21.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
8. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. 664 с.
9. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973. 431 с.
10. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 428 с.

Поступила в редакцию
25.VIII.1978