

УДК 539.621

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

БЫСТРОУМОВ В. А., ИГНАШОВ И. А.

(Вологда)

Рассмотрена задача определения термоупругих напряжений в цилиндре конечной длины, вращающемся вокруг неподвижной оси относительно источника тепла с некоторой угловой скоростью. При граничных условиях первого рода, несимметричных относительно оси цилиндра, найдено нестационарное плоское температурное поле в поперечном сечении.

Получены формулы для определения напряжений, продольной силы и изгибающего момента. В численных расчетах использованы экспериментальные данные распределения температуры на контуре поперечного сечения роликов машин непрерывного литья металла и валков листопркатных станов. В цилиндре конечной длины условия на торцах удовлетворяются интегрально, поэтому достоверность полученного решения лимитируется принципом Сен-Венана.

1. Постановка задачи. Пусть длинный цилиндр, имеющий неподвижную ось вращения, по некоторой части образующих наружную поверхность контактирует с поступательно перемещающейся полосой горячего металла; вследствие контакта цилиндр вращается с некоторой угловой скоростью ω . Тепловосприятие цилиндром реализуется непосредственно через контакт с горячим металлом и путем лучистого нагрева наружной поверхности. Принимается, что температура на наружной поверхности устанавливается мгновенно и с течением времени не меняется. При сделанных допущениях температурное поле в объеме цилиндра будет плоским, т. е. не зависящим от осевой координаты, но градиент температуры в радиальном сечении отличен от нуля.

В плоскости поперечного сечения цилиндра введем две системы координат: $\xi\eta$ — жестко связанная с поперечным сечением цилиндра (переменные Лагранжа), xoy — неподвижная система (переменные Эйлера) (фиг. 1).

Уравнение теплопроводности в переменных Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \omega \frac{R^2}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial F} \quad (1.1)$$

Граничное и начальное условия примем в форме

$$\theta(1, \varphi) = \theta^{\circ} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi) \right], \quad \theta(\rho, \varphi, F) \Big|_{F=0} = \theta, \quad (1.2)$$

$$\theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}, \quad \theta^{\circ} = \frac{T^{\circ} - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}, \quad \gamma_n = \frac{T^{\circ} a_n}{T_{\max} - T_{\min}}, \quad \beta_n = \frac{T^{\circ} b_n}{T_{\max} - T_{\min}}$$

$$\rho = r/R, \quad F = at/R^2, \quad P = R^2 \omega / a$$

Здесь T — текущая размерная температура; T_{\max} и T_{\min} — максимальная и минимальная температуры цилиндра; r и φ — координаты точки в систе-

ме ρ и φ ; T° — средняя температура на контуре поперечного сечения; a_n и b_n — коэффициенты разложения размерной температуры в ряд Фурье на контуре поперечного сечения; a — коэффициент температуропроводности; F и P — критерий Фурье и число Прудоманга.

Требуется по температурному полю, удовлетворяющему уравнению (1.1), граничному и начальному условиям (1.2) определить термоупругое напряженное и деформированное состояние цилиндра, вращающегося относительно источника тепла с угловой скоростью ω .

Решение задачи (1.1) — (1.2) следует из общего выражения температуры [1] при $\rho_0 \rightarrow 0$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(\rho, \varphi, F) = & \theta^\circ + 2(\theta_1 - \theta^\circ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 F} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_n^{(1)} \text{ber}_n(\rho) - \gamma_n^{(2)} \text{bei}_n(\rho)] \cos(n\varphi) + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_n^{(2)} \text{ber}_n(\rho) + \gamma_n^{(1)} \text{bei}_n(\rho)] \sin(n\varphi) - \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{nk}^{(1)} J_n(\lambda_{nk} \rho) e^{-\lambda_{nk}^2 F} \cos n(\varphi - PF) - \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{nk}^{(2)} J_n(\lambda_{nk} \rho) e^{-\lambda_{nk}^2 F} \sin n(\varphi - PF) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{ber}_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos[(2k+n)\pi/4]}{k!(n+k)!} \left(\frac{\sqrt{nP}}{2} \rho \right)^{2k+n}$$

$$\text{bei}_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin[(2k+n)\pi/4]}{k!(n+k)!} \left(\frac{\sqrt{nP}}{2} \rho \right)^{2k+n}$$

$$\gamma_n^{(1)} = \frac{1}{2\Delta} [\gamma_n \text{ber}_n(\sqrt{nP}) + \beta_n \text{bei}_n(\sqrt{nP})], \quad \gamma_n^{(2)} = \frac{1}{2\Delta} [\beta_n \text{ber}_n(\sqrt{nP}) - \gamma_n \text{bei}_n(\sqrt{nP})]$$

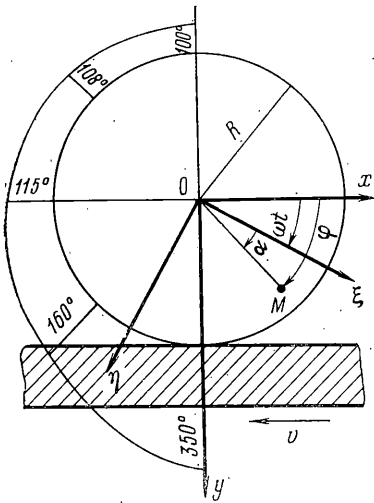
$$\Delta = [\text{ber}_n(\sqrt{nP})]^2 + [\text{bei}_n(\sqrt{nP})]^2$$

$$A_{nk}^{(1)} = \frac{\lambda_{nk} J_{n+1}(\lambda_{nk})}{\lambda_{nk}^4 + (nP)^2} [\lambda_{nk}^2 \text{ber}_n(\sqrt{nP}) - nP \text{bei}_n(\sqrt{nP})]$$

$$A_{nk}^{(2)} = \frac{\lambda_{nk} J_{n+1}(\lambda_{nk})}{\lambda_{nk}^4 + (nP)^2} [\lambda_{nk}^2 \text{bei}_n(\sqrt{nP}) + nP \text{ber}_n(\sqrt{nP})]$$

$$\omega_{nk}^{(1)} = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_{nk})} [\gamma_n^{(1)} A_{nk}^{(1)} - \gamma_n^{(2)} A_{nk}^{(2)}], \quad \omega_{nk}^{(2)} = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_{nk})} [\gamma_n^{(1)} A_{nk}^{(2)} + \gamma_n^{(2)} A_{nk}^{(1)}]$$

Здесь $\text{ber}_n(\rho)$ и $\text{bei}_n(\rho)$ — действительная и мнимая части функции Бесселя $J_n(z)$ при $z = (-inP)^{1/2} \rho$; λ_n и λ_{nk} — корни характеристических



Фиг. 1

уравнений $J_0(\lambda)=0$ и $J_n(\lambda)=0$; $J_0(x)$ и $J_n(x)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и n -го порядков.

2. Термоупругое напряженное состояние. Как известно [2], задача определения термонапряженного и деформированного состояния сводится к нахождению потенциала перемещений Φ , через который выражаются компоненты вектора напряжений и вектора перемещений.

Получаемые при этом напряжения, как правило, не удовлетворяют граничным условиям, так как функция Φ является частным решением уравнения Пуассона

$$\Delta \Phi = \alpha_1 \theta(\rho, \varphi, F), \quad \alpha_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha (T_{\max} - T_{\min}) \tag{2.1}$$

где Δ — оператор Лапласа, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент температурного расширения; причем на Φ не налагается никаких условий, кроме удовлетворения уравнению (2.1).

Чтобы получить решение задачи термоупругости, удовлетворяющее заданным краевым условиям, необходимо на напряжения от функции Φ наложить решение уравнений теории упругости при $T=0$ ($\theta=0$), содержащее должное количество постоянных величин; последнее достигается путем подбора функции напряжений Q соответствующего вида.

Температуру (1.3) можно представить как сумму

$$\theta(\rho, \varphi, F) = \theta_1(\rho, \varphi) + \theta_2(\rho, \varphi, F) \tag{2.2}$$

Если в качестве минимальной принять начальную температуру, то постоянная θ_1 в формуле (1.3) будет равна нулю. Тогда из формулы (2.2) следует $\theta_2(\rho, \varphi, 0) = -\theta_1(\rho, \varphi)$. Легко видеть, что с учетом (2.2) функция

$$\Phi = \alpha_1 \int_0^F \theta(\rho, \varphi, F) dF + F\Phi_1 \tag{2.3}$$

удовлетворяет уравнению (2.1). Здесь Φ_1 — гармоническая функция, определяемая равенством [3]: $\Phi_1 = -\alpha_1 \theta_1(\rho, \varphi)$.

После подстановки в (2.3) функции (1.3) с учетом разложения ρ^n в ряд по функциям Бесселя $J_0(\lambda_n \rho)$ ($\rho < 1$) [3] потенциал Φ запишется

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{1}{4} \theta^\circ \alpha_1 (1-\rho^2) + 2\theta^\circ \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 F} - \\ & - 2\alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} J_n(\lambda_n \rho) [\omega_{nh}^{(1)} f_{nh}^{(1)}(\varphi, F) + \omega_{nh}^{(2)} f_{nh}^{(2)}(\varphi, F)] \\ f_{nh}^{(1)}(\varphi, F) = & \frac{\lambda_{nh}^2}{\lambda_{nh}^4 + (nP)^2} \left\{ \left[\cos(n\varphi) + \frac{nP}{\lambda_{nh}^2} \sin(n\varphi) \right] - \right. \\ & \left. - e^{-\lambda_{nh}^2 F} \left[\cos n(\varphi - PF) + \frac{nP}{\lambda_{nh}^2} \sin n(\varphi - PF) \right] \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$f_{nk}^{(2)}(\varphi, F) = \frac{\lambda_{nk}^2}{\lambda_{nk}^4 + (nP)^2} \left\{ \left[\sin(n\varphi) - \frac{nP}{\lambda_{nk}^2} \cos(n\varphi) \right] - e^{-\lambda_{nk}^2 F} \left[\sin n(\varphi - PF) - \frac{nP}{\lambda_{nk}^2} \cos n(\varphi - PF) \right] \right\}$$

Далее, по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{\circ} &= -2G \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \right), & \sigma_{\varphi\varphi}^{\circ} &= -2G \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} \\ \sigma_{\rho\varphi}^{\circ} &= 2G \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right), & \sigma_{zz}^{\circ} &= \sigma_{\rho\rho}^{\circ} + \sigma_{\varphi\varphi}^{\circ} \end{aligned} \quad (2.5)$$

определяются компоненты вектора напряжений, обусловленные потенциалом перемещений Φ .

Дополнительное напряженное состояние для осесимметричной составляющей (2.4) находится из решения известной задачи Ламе. Для остальных слагаемых потенциала Φ функция напряжений выбирается в форме ряда

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} (A_{nh}\rho^n + B_{nh}\rho^{n+2}) [\omega_{nh}^{(1)} f_{nh}^{(1)}(\varphi, F) + \omega_{nh}^{(2)} f_{nh}^{(2)}(\varphi, F)] \quad (2.6)$$

Нетрудно заметить, что каждое слагаемое ряда (2.6) удовлетворяет бигармоническому уравнению; следовательно, функция Q бигармоническая. Напряжения от функции Q вычисляются по формулам, приведенным в [2].

Суммарные напряжения, обусловленные термоупругим потенциалом перемещений Φ и функцией напряжений Q , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\rho\rho}}{2G\alpha_1} &= 2\theta^{\circ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 F}}{\lambda_n^2} \left[\frac{J_1(\lambda_n \rho)}{\rho J_1(\lambda_n)} - 1 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{2J_n'(\lambda_{nh}\rho)}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2n^2}{\rho^2} J_n(\lambda_{nh}\rho) + n(1-n) J_n'(\lambda_{nh}) \rho^{n-2} + (n+1)(n-2) J_n'(\lambda_{nh}) \rho^n \right] \times \\ &\quad \times [\omega_{nh}^{(1)} f_{nh}^{(1)} + \omega_{nh}^{(2)} f_{nh}^{(2)}] \\ \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{2G\alpha_1} &= 2\theta^{\circ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 F}}{\lambda_n^2} \left[\frac{\lambda_n J_0(\lambda_n \rho)}{J_1(\lambda_n)} - \frac{J_1(\lambda_n \rho)}{J_1(\lambda_n)} - 1 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} [2J_n''(\lambda_{nh}\rho) + \\ &\quad + J_n'(\lambda_{nh}) n(n-1) \rho^{n-2} - J_n'(\lambda_{nh}) (n+1)(n+2) \rho^n] [\omega_{nh}^{(1)} f_{nh}^{(1)} + \omega_{nh}^{(2)} f_{nh}^{(2)}] \\ \frac{\sigma_{\rho\varphi}}{2G\alpha_1} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{\rho^2} J_n(\lambda_{nh}\rho) - \frac{2n}{\rho} J_n'(\lambda_{nh}\rho) - n(n-1) J_n'(\lambda_{nh}) \rho^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + n(n+1) J_n'(\lambda_{nh}) \rho^n \right] [\omega_{nh}^{(1)} f_{nh}^{(2)} - \omega_{nh}^{(2)} f_{nh}^{(1)}] \\ \frac{\sigma_{zz}}{2G\alpha_1} &= 2\theta^{\circ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 F}}{\lambda_n} \left[\frac{J_0(\lambda_n \rho)}{J_1(\lambda_n)} - \frac{2}{\lambda_n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} [2\lambda_{nh}^2 J_n(\lambda_{nh}\rho) + \\ &\quad + 4\nu(n+1) J_n'(\lambda_{nh}) \rho^n] [\omega_{nh}^{(1)} f_{nh}^{(1)} + \omega_{nh}^{(2)} f_{nh}^{(2)}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Коэффициенты A_{nk} и B_{nk} определяются из условия, налагаемого на напряжения $\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0$ при $\rho = 1$. Откуда следует, что $A_{nk} = -B_{nk} = J_n'(\lambda_{nk})$.

Напряжения (2.7) удовлетворяют условию свободной поверхности бесконечно длинного цилиндра и определяют плоскую деформацию, вызванную несимметричным относительно оси температурным полем (1.3).

С точки зрения практических приложений полученного решения представляет интерес рассмотреть напряженное состояние цилиндра конечной длины, торцевые сечения которого свободны от внешних нагрузок. В таких условиях работают, например, валки листопрокатных станов.

Чтобы определить напряжения в цилиндре конечной длины со свободными торцевыми сечениями, необходимо найти результирующую силу N и изгибающий момент M в поперечном сечении бесконечно длинного цилиндра и вычислить дополнительное напряженное состояние, вызванное этой силой и моментом, взятыми с обратным знаком. При этом, как известно, изменится лишь осевое напряжение σ_{zz} .

Сила N и момент M с учетом последней формулы (2.7) определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{N}{2G\alpha_1} &= R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sigma_{zz} \rho \, d\rho \, d\varphi = \theta^\circ (\nu - 1) \pi R^2 + 4\pi R^2 \theta^\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 F}}{\lambda_n} \left[\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\nu}{\lambda_n} \right] \\ \frac{M}{2G\alpha_1} &= R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sigma_{zz} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi = \\ &= -2\pi R^3 \sum_{n=1}^{\infty} [\omega_{1k}^{(1)} f_{1k}^{(01)}(F) + \omega_{1k}^{(2)} f_{1k}^{(02)}(F)] [\lambda_{1k} J_2(\lambda_{1k}) + \nu J_1'(\lambda_{1k})] \\ f_{1k}^{(01)} &= \frac{\lambda_{1k}^2}{\lambda_{1k}^4 + P^2} \left\{ \frac{P}{\lambda_{1k}^2} - e^{-\lambda_{1k}^2 F} \left[\sin(PF) + \frac{P}{\lambda_{1k}^2} \cos(PF) \right] \right\} \\ f_{1k}^{(02)} &= \frac{\lambda_{1k}^2}{\lambda_{1k}^4 + P^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda_{1k}^2 F} \left[\cos(PF) - \frac{P}{\lambda_{1k}^2} \sin(PF) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

По формулам

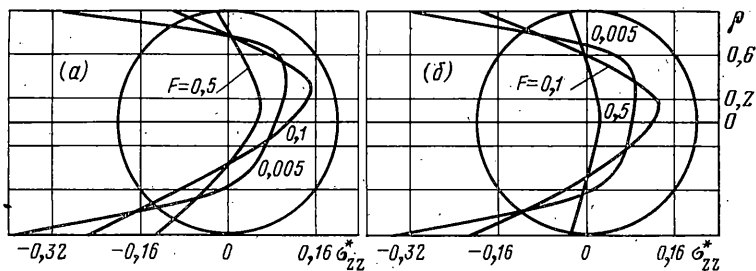
$$\sigma_{zz}^{(N)} = N/(\pi R^2), \quad \sigma_{zz}^{(M)} = 4M\rho \sin \varphi / (\pi R^3) \quad (2.9)$$

находятся напряжения от силы N и изгибающего момента M .

Сумма выражений (2.7) и (2.9) дает осевое напряжение, удовлетворяющее интегрально условию свободных торцевых сечений, и пригодное, по принципу Сен-Венана, для средней части цилиндра конечной длины

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}}{2G\alpha_1} &= 2\theta^\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 F}}{\lambda_n} \left[\frac{J_0(\lambda_n \rho)}{J_1(\lambda_n)} - \frac{2}{\lambda_n} \right] + 8\rho \sin \varphi \sum_{k=1}^{\infty} [\omega_{1k}^{(1)} f_{1k}^{(01)}(F) + \\ &+ \omega_{1k}^{(2)} f_{1k}^{(02)}(F)] [\lambda_{1k} J_2(\lambda_{1k}) + \nu J_1'(\lambda_{1k})] - \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_{nk}^2 J_n(\lambda_{nk} \rho) + 2\nu(n+1)J_n'(\lambda_{nk})\rho^n] [\omega_{nk}^{(1)} f_{nk}^{(1)}(\varphi, F) + \omega_{nk}^{(2)} f_{nk}^{(2)}(\varphi, F)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Формулы (2.7), исключая последнюю, и (2.10) описывают напряженное термоупругое состояние цилиндра конечной длины, концы которого могут свободно перемещаться в осевом направлении. Область применения полученного решения лимитируется отсутствием градиента температуры



Фиг. 2

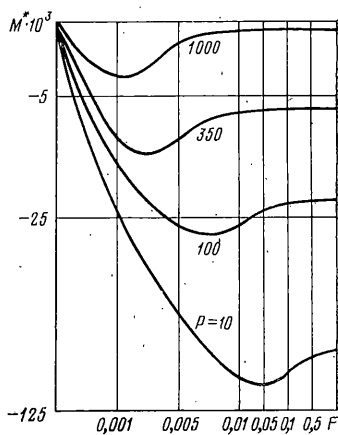
по осевой координате и условиями, вытекающими из принципа Сен-Венана. Например, в валках листопркатных станов и роликаx машин непрерывного литья металла при длине бочки около трех метров формулы (2.7) и (2.10) применимы в средней части, равной ширине прокатываемого металла ($\frac{2}{3}$ общей длины валька).

В квазистатической постановке решение рассмотренной задачи содержит F в качестве параметра. Когда $F \rightarrow \infty$, напряжения, продольная сила N и изгибающий момент M стремятся к стационарным значениям, зависящим в этом случае от величины угловой скорости вращения. При $\omega \rightarrow \infty$ ($P \rightarrow \infty$) все компоненты вектора напряжения определяются осесимметричной составляющей температурного поля (1.3), а изгибающий момент стремится к нулю.

Продольная сила N и изгибающий момент M , возникающие в поперечном сечении бесконечно длинного цилиндра и обусловленные воздействием несимметричного относительно оси температурного поля, обеспечивают условия плоской деформации. В цилиндре конечной длины, торцевые сечения которого свободны от внешних нагрузок, при том же распределении температуры по объему деформация цилиндра уже не будет плоской. Первоначально прямолинейная ось при удалении изгибающих моментов с торцов деформируется с наибольшей стрелой прогиба по середине. Очевидно, если такой же величины момент приложить к торцам ненагретого цилиндра, то прогиб получится равным температурному. Последнее обстоятельство оказалось удобным для проверки полученного решения при сопоставлении теоретического и экспериментально определенного прогибов. В диапазоне температур $0-500^\circ\text{C}$ теоретически вычисленный прогиб превышает экспериментальный на 10–14% [4]. По характеру поверхностей излома рабочих цилиндрических органов металлургического оборудования можно сделать выводы о том, что основной причиной поломки является осевое напряжение (2.10), зависящее в известной мере от M (2.8); влияние напряжений (2.7) сводится к трещинообразованию на рабочих поверхностях.

3. Численный анализ. Численные расчеты выполнены для осевого напряжения σ_{zz} цилиндра конечной длины и изгибающего момента в поперечном сечении бесконечно длинного цилиндра (последний, как отмечалось выше, характеризует наибольшую стрелу прогиба оси).

Распределение температуры на контуре поперечного сечения в переменных Эйлера приведено на фиг. 1 и аппроксимировано конечным рядом [4]. Коэффици-



Фиг. 3

коэффициенты разложения (1.2) имеют следующие значения:

β_1	β_3	β_5	β_7	γ_2	γ_4	γ_6	γ_8	θ°
0,2545	-0,0908	0,0343	0,0008	-0,1503	0,0606	-0,0164	-0,0057	0,3996

Эпюры осевых напряжений $\sigma_{zz}^* = \sigma_{zz} / (2G\alpha_1)$ при $P=10, 100$, вычисленные для значений угла $\pm\pi/2$ при различных F , представлены на фиг. 2, а, б; изменение изгибающего момента $M^* = M / (2R^3G\alpha_1)$ — на фиг. 3. При вычислении напряжений использованы таблицы [5].

Распределение напряжений в поперечном сечении на переходном режиме существенно зависит от величины угловой скорости вращения цилиндра. Когда $P \rightarrow \infty$ (практически при $P \geq 1000$), распределение температуры в поперечном сечении стремится к осесимметричному; следовательно, напряжения будут определяться первым членом в (1.3), при этом изгибающий момент M стремится к нулю. Отсюда следует, что при расчетах термонапряженного состояния вращающихся цилиндров с угловой скоростью, соответствующей $P \geq 1000$, необходимо учесть в выражении (1.3) только первый член, т. е. считать температурное поле в поперечном сечении осесимметричным при любом распределении температуры на границе.

При помощи формулы (2.10) можно изучать изменение напряжения σ_{zz} материального волокна, параллельного оси, в зависимости от P при различных F , для этого достаточно в (2.10) положить $\varphi = \alpha + PF$, где α — лагранжева координата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Игнашов И. А., Быстроумов В. А.* Температурное поле вращающегося полого цилиндра. — Инж.-физ. ж., 1979, т. 37, № 4, с. 705.
2. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 165 с.
3. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
4. *Шичков А. Н., Игнашов И. А., Быстроумов В. А.* Термоупругое напряженное и деформированное состояние ролика МНЛ в режиме остановки. — Машиноведение, 1979, № 2, с. 72.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1969. 344 с.

Поступила в редакцию
18.IV.1979