МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1980

УДК 539.3

РАЗОГРЕВ МАТЕРИАЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ВСЛЕДСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ

Р. Л. САЛГАНИК

(Москва)

Неоднородности в материале под действием электрического поля приводят к концентрации его напряженности. Если происходящее в результате движение электрических зарядов сопровождается существенными потерями, возникает также концентрация тепловыделения, что может вызвать появление значительных температурных напряжений, влияющих на механическое поведение материала.

Так, если неоднородность представляет собой трещину в проводнике, расположенную перпендикулярно полю, то в стационарных условиях возникают механические напряжения, раскрывающие трещину [1].

Задача об определении температурного поля в материале, содержащем неоднородность, является основной для рассмотрения механических эффектов, связанных с электрическими потерями.

В предлагаемой работе рассматривается задача об установившемся возмущении температурного поля, вызываемом эллипсоидальной неоднородностью при выделении тепла за счет электрических потерь внутри и вне неоднородности. Размеры неоднородности предполагаются малыми по сравнению со всеми внешними размерами. Это позволяет считать, что она находится в однородном поле токов и тепловых потоков. Все характеристики окружающего материала и неоднородности предполагаются постоянными, что допустимо при не очень больших изменениях температуры и напряженности электрического поля. Рассматриваются условия, в которых термоэлектрические эффекты незначительны и ими можно пренебречь.

1. Постановка задачи. Предположим, что материал подвергается воздействию гармонически колеблющегося (пропорционально $\exp(-i\omega t)$) электрического поля с комплексной амплитудой напряженности $\mathbf{E}$ и круговой частотой ω. При этом комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)$ с $\varepsilon''(\omega)\geqslant 0$, так что комплексная амплитуда вектора электрической индукции $\mathbf{D}=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}$. Средняя за период мощность тепловыделения Q в единице объема за счет электрических потерь (магнитными пренебрегаем) пропорциональна $|E|^2$. Выражение для нее имеет вид [2]: $Q={}^1/_2\omega\varepsilon''(\omega)|\mathbf{E}|^2$ (здесь и далее формулы записываются применительно к рациональной системе единиц с размерными диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями). Ограничимся рассмотрением случая относительно небольших частот, в котором характерный размер неоднородности мал по сравнению с длиной волны электромагнитных колебаний в материале и неоднородности, и электрическое поле в неоднородности и ее окрестности можно считать потенциальным с комплексной амплитудой электрического потенциала φ, т. е. $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$.

Если, с другой стороны, частота ω достаточно велика по сравнению с обратным временем установления температуры в масштабах неоднородности как в ней самой, так и в материале, то при нахождении температуры можно использовать в уравнении теплопроводности среднюю за период мощность тепловыделения Q. Записывая также, что при отсутствии свободных зарядов поле $\mathbf{D}$ соленоидально, и используя приведенные выше выражения для $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, Q, получаем следующие уравнения

$$\nabla^2\varphi=0,\ \lambda\nabla^2 T+\gamma|\nabla\varphi|^2=0,\ \gamma={}^1/_2\omega\varepsilon''(\omega) \tag{1.1}$$

Здесь T — температура, λ — коэффициент теплопроводности, причем внутри эллипсоида $\varepsilon=\varepsilon^{(i)}$, $\gamma=\gamma^{(i)}$, $\lambda=\lambda^{(i)}$, вне эллипсоида $\varepsilon=\varepsilon^{(e)}$, $\gamma=\gamma^{(e)}$, $\lambda=\lambda^{(e)}$. Индексами (e) и (i) будут отмечаться и другие величины, относящиеся к области вне и внутри эллипсоида соответственно.

На поверхности эллипсоида принимаются условия непрерывности электрического потенциала, нормальной составляющей вектора индукции, температуры и теплового потока (тем самым предполагается, что отсутствуют или пренебрежимо малы контактная разность потенциалов и другие сосредоточенные на поверхности эффекты). Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\varphi^{(e)}=\varphi^{(i)}=\varphi_\Gamma,\quad \varepsilon^{(e)}\varphi_{,\nu}^{(e)}=\varepsilon^{(i)}\varphi_{,\nu}^{(i)} \tag{1.2}$$

$$T^{(e)}=T^{(i)},\quad \lambda^{(e)}T_{,\nu}^{(e)}=\lambda^{(i)}T_{,\nu}^{(i)} \tag{1.3}$$

Здесь и далее нижний индекс, стоящий после запятой, означает дифференцирование; в данном случае — по внешней нормали к эллипсоиду. Компоненты ее единичного вектора будем обозначать через ν_j.

Обозначая верхним индексом (H) поля при отсутствии неоднородности, имеем

$$\nabla^2\varphi^{(H)}=0,\ \lambda^{(e)}\nabla^2 T^{(H)}+\gamma^{(e)}|\nabla\varphi^{(H)}|^2=0 \tag{1.4}$$

Для функции f, удовлетворяющей уравнению Лапласа, имеет место равенство $(\nabla f)^2={}^1/_2\nabla^2 f^2$. Записывая это равенство отдельно для действительных и мнимых частей $\varphi^{(e)}$, $\varphi^{(i)}$, $\varphi^{(H)}$, и вычитая после деления на соответствующий коэффициент теплопроводности уравнение (1.4) из (1.1), получаем следующую систему уравнений

$$\nabla^2\chi^{(e)}=0,\quad \chi^{(e)}=T^{(e)}-T^{(H)}+{}^1/_2\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}(|\varphi^{(e)}|^2-|\varphi^{(H)}|^2) \tag{1.5}$$

$$\nabla^2\chi^{(i)}=0,\quad \chi^{(i)}=T^{(i)}-T^{(H)}+{}^1/_2\left(\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}|\varphi^{(i)}|^2-\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}|\varphi^{(H)}|\right) \tag{1.6}$$

Ввиду малости неоднородности по сравнению со всеми внешними размерами можно при отыскании вносимого ею возмущения представить поля $T^{(H)}$ и $\varphi^{(H)}$ их разложениями вблизи центра неоднородности, который примем за начало декартовой системы координат

$$\varphi^{(H)}=-E_k x_k,\quad T^{(H)}=T_0+G_k x_k \tag{1.7}$$

Здесь E_k, G_k, T_0 — невозмущенные неоднородностью амплитуда напряженности электрического поля, градиент температуры и температура в центре эллипсоида (невозмущенный электрический потенциал в центре эллипсоида принят равным нулю). По одноименным нижним индексам здесь и далее производится суммирование от 1 до 3, если среди них встречаются два, не заключенные в скобки. Будем считать E_k и, следовательно, $\varphi^{(H)}$ действительными, что сводится просто к выбору фазы электрических колебаний при отсутствии неоднородности.

Решение задачи (1.1), (1.2) для φ с условием перехода на бесконечности φ в $\varphi^{(H)}$ известно [2, 3] (следует только в этом решении под проницаемостями внутри и вне неоднородности понимать комплексные величины).

С учетом (1.2), (1.3), (1.5)–(1.7) имеем следующие граничные условия для χ на поверхности эллипсоида:

$$\chi^{(e)}-\chi^{(i)}={}^1/_2\left(\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}-\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}\right)|\varphi_\Gamma|^2 \tag{1.8}$$

$$\lambda^{(e)}\chi_{,\nu}^{(e)}-\lambda^{(i)}\chi_{,\nu}^{(i)}=-(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})G_k\nu_k+{}^1/_2[\gamma^{(e)}(|\varphi^{(e)}|^2)_{,\nu}- \\ -\gamma^{(i)}(|\varphi^{(i)}|^2)_{,\nu}]-\gamma^{(e)}(1-\lambda^{(i)}/\lambda^{(e)})E_kE_j\nu_kx_j \tag{1.9}$$

Так как вдали от неоднородности создаваемое ею возмущение должно исчезать, функция $\chi^{(e)}$ должна стремиться к нулю на бесконечности.

С учетом этого условия и того, что решение для φ известно, первые уравнения (1.5), (1.6) и условия (1.8), (1.9) полностью определяют χ и, следовательно, возмущение температуры. Отметим, что в случаях, когда в разложении (1.7) для $T^{(H)}$ имеет смысл учитывать также квадратичные члены при сохранении в выражении для $\varphi^{(H)}$ только линейных членов, приходим к совершенно аналогичной задаче, но с измененными коэффициентами в (1.9) при ν_kx_j.

Если колебания электрического поля не чисто синусоидальные, а обладают спектром частот, то в уравнение теплопроводности должна подставляться мощность, представляющая собой сумму выражений Q по спектру (переходящую для непрерывного спектра в интеграл).

Поскольку ни в уравнения, ни в граничные условия время не входит, возмущение температуры в этом случае находится суммированием (интегрированием) по спектру возмущений температуры, найденных из решения сформулированной выше задачи для каждой частоты в отдельности. При этом частоты, отвечающие той части спектра, которая дает основной вклад в суммарную мощность тепловыделения, должны удовлетворять указанным выше ограничениям. Для материалов, близких по свойствам к изоляторам ($\varepsilon''/\varepsilon'$ — мало), эти ограничения имеют вид

$$\lambda^{1/2}(\rho c_T\omega)^{-1/2}\ll d\ll(\mu\varepsilon')^{-1/2}\omega^{-1} \tag{1.10}$$

Здесь μ, ρ, c_T — магнитная проницаемость, плотность, теплоемкость соответственно, d — характерный размер неоднородности, численное значение величины справа соответствует меньшей из получающихся для материала и неоднородности длин волн. При этом можно пользоваться усредненной по периоду колебаний мощностью тепловыделения как в неоднородности, так и в окружающем ее материале, если для величины слева берется большее значение из получающихся для материала и неоднородности.

Если в материале возможно протекание токов проводимости, функция $\varepsilon''(\omega)$ имеет особенность при $\omega\to0$ типа ω^{-1}; в проводниках с постоянной электропроводностью γ_0, когда весь ток представляет собой ток проводимости, имеем $\varepsilon''=\gamma_0\omega^{-1}$ [2].

Если последнее имеет место как вне, так и внутри неоднородности, то плотность тока всюду совпадает по фазе с напряженностью электрического поля и обе величины можно считать действительными. При этом во втором условии (1.2) $\varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(e)}$ заменяются на $\gamma_0^{(i)}$, $\gamma_0^{(e)}$ соответственно, выражение в правой части (1.9), заключенное в квадратные скобки, обращается в нуль, а вместо ограничений на частоты (1.10) имеем следующие

$$\lambda^{1/2}(\rho c_T\omega)^{-1/2}\ll d\ll(\mu\gamma_0)^{-1/2}\omega^{-1/2} \tag{1.11}$$

с замечаниями, аналогичными сделанным относительно ограничений (1.10).

Для постоянных или очень медленно меняющихся электрических полей, когда усиленное неравенство в левой части (1.11) заменяется на обратное, стационарное уравнение теплопроводности может быть записано уже не для усредненной за период, а для мгновенной мощности тепловыделения. В этом случае для проводника с постоянной электропроводностью γ_0 во втором уравнении (1.1) вместо γ стоит γ_0.

Установление электрического поля при наличии одних только токов проводимости можно считать мгновенным по сравнению с установлением температурного поля, если $(\mu\gamma_0\lambda/\rho c_T)\ll 1$, т. е. если электропроводность не очень велика.

Решение сформулированной выше задачи (1.5), (1.6), (1.8), (1.9) с условием обращения $\chi^{(e)}$ в нуль на бесконечности можно представить в виде суммы решений двух задач: первой — в которой E_k и φ равны нулю, и второй — в которой $G_k=0$. Решение первой задачи, с точностью до переобозначений, такое же, как для φ и поэтому известно. Решение второй задачи (так же как и решение первой) выражается через потенциалы. Необходимые соотношения для этих потенциалов с использованием преобразований, аналогичных выполненным в работе [4], рассматриваются ниже.

2. Потенциалы. Рассмотрим потенциалы

$$v=\int\limits_V\frac{dV'}{R},\quad v_j=\int\limits_S\frac{\nu_j\,dS'}{R},\quad v_{jk}=\int\limits_S\frac{x_j'\nu_k'\,dS'}{R},\quad R=[(x_l-x_l')^2]^{1/2}\qquad(2.1)$$

Здесь интегрирование производится по штрихованным координатам: в первом интеграле — по объему V, в остальных — по поверхности S эллипсоида. Очевидно

$$\nabla^2v^{(e)}=0,\quad \nabla^2v^{(i)}=-4\pi,\quad \nabla^2v_j^{(e),(i)}=0,\quad \nabla^2v_{jk}^{(e),(i)}=0\qquad(2.2)$$

Направим оси координат x_k по осям эллипсоида, длины его полуосей обозначим через a_j, введем единичный вектор $l_k=(x_k'-x_k)R^{-1}$. Если точка $\{x_k'\}$ лежит на поверхности эллипсоида, то R удовлетворяет уравнению $(x_k+Rl_k)^2a_k^{-2}=1$. Для точки $\{x_k\}$, лежащей внутри эллипсоида, отсюда находим

$$R=-f/g+\sqrt{(f^2/g^2+h/g)}\qquad(2.3)$$

$$f=l_mx_m/a_{(m)}^2,\quad g=l_m^2/a_{(m)}^2,\quad h=1-x_m^2/a_{(m)}^2\qquad(2.4)$$

Удобно пользоваться также обозначениями $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $l_1=l$, $l_2=m$, $l_3=n$.

Рассмотрим потенциал v. Внутри эллипсоида имеем [3, 4]:

$$v^{(i)}={}^1/_2(I_{(k)}a_k^2-I_{(k)}x_k^2)\qquad(2.5)$$

$$I_1=I_a=\int\limits_{(4\pi)}\frac{l^2}{a^2}\frac{d\Omega}{g}=2\pi abc\int\limits_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)^{3/2}[(b^2+s)(c^2+s)]^{1/2}}\qquad(2.6)$$

Здесь $d\Omega$ — элемент телесного угла с вершиной в точке наблюдения $\{x_j\}$ и осью, направленной по $\{l_j\}$. Выражения для $I_2=I_b$, $I_3=I_c$ получаются из (2.6) круговыми перестановками индексов 1, 2, 3, букв a, b, c и l, m, n. В дальнейшем для краткости в подобных случаях они будут называться просто круговыми перестановками.

Справедливо равенство [2–4]:

$$I_a+I_b+I_c=4\pi \tag{2.7}$$

Из (2.1) следует, что нормальная производная от v на границе эллипсоида непрерывна, причем с учетом (2.5)

$$v_{,\nu}^{(e)}=v_{,\nu}^{(i)}=-I_{(k)}x_k\nu_k \tag{2.8}$$

Рассмотрим потенциалы v_j. Переходя в выражении (2.1) для них к интегрированию по объему эллипсоида, имеем

$$v_j=\int\limits_V R_{,j'}^{-1}dV'=-\left(\int\limits_V R^{-1}\,dV'\right)_{,j}=-v_{,j} \tag{2.9}$$

Здесь и дальше дифференцирование по координате x_j обозначается индексом j. Отсюда и из (2.5) находим

$$v_j^{(i)}=I_{(j)}x_j,\quad v_{j,\nu}^{(i)}=I_{(j)}\nu_j,\quad v_{j,\nu}^{(e)}=v_{j,\nu}^{(i)}-4\pi\nu_j \tag{2.10}$$

Здесь первая формула с учетом непрерывности потенциала простого слоя справедлива также на границе эллипсоида, последняя записана на границе эллипсоида с учетом формулы для скачка нормальных производных потенциала простого слоя [5]. При помощи потенциалов v_j получается решение первой задачи.

Для функции

$$\Phi=B_jv_j \tag{2.11}$$

на границе эллипсоида с учетом (2.9) имеют место равенства

$$\Phi^{(e)}-\Phi^{(i)}=0,\quad \zeta^{(e)}\Phi_{,\nu}^{(e)}-\zeta^{(i)}\Phi_{,\nu}^{(i)}=[(\zeta^{(e)}-\zeta^{(i)})I_{(j)}-4\pi\zeta^{(e)}]B_j\nu_j \tag{2.12}$$

где B_j — произвольный постоянный вектор, $\zeta^{(e)}$, $\zeta^{(i)}$ — константы.

Решение для комплексной амплитуды электрического потенциала получается, если положить $\varphi=\Phi+\varphi^{(H)}$, $\zeta^{(i)}=\varepsilon^{(i)}(\omega)$, $\zeta^{(e)}=\varepsilon^{(e)}(\omega)$, а также (см. (1.2), (2.11), (2.12))

$$B_j=B_j^{(\varphi)}=L_{(j)}^{(\varphi)}E_j,\quad L_{(j)}^{(\varphi)}=\frac{\varepsilon^{(e)}-\varepsilon^{(i)}}{(\varepsilon^{(e)}-\varepsilon^{(i)})I_{(j)}-4\pi\varepsilon^{(e)}} \tag{2.13}$$

Отсюда, из первой формулы (2.10), и из (2.11) с учетом равенства $\Phi=$ $=\varphi-\varphi^{(H)}$, следует

$$\varphi^{(i)}=-\varkappa_{(j)}^{(\varphi)}E_jx_j,\quad \varkappa_j^{(\varphi)}=1-L_{(j)}^{(\varphi)}I_{(j)} \tag{2.14}$$

Для потенциала в случае проводника с постоянной электропроводностью в этих формулах следует заменить $\varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(e)}$ на $\gamma_0^{(i)}$ и $\gamma_0^{(e)}$ соответственно.

Решение первой задачи для температуры получается, если положить $\Phi=T-T^{(H)}$, $\zeta^{(i)}=\lambda^{(i)}$, $\zeta^{(e)}=\lambda^{(e)}$, а также (см. (1.8), (1.9), при $\varphi=0$, $E_j=0$ и (2.12)):

$$B_j=B_j^{(T)}=-L_{(j)}^{(T)}G_j,\quad L_j^{(T)}=\frac{\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)}}{(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})I_{(j)}-4\pi\lambda^{(e)}} \tag{2.15}$$

Отсюда, из первой формулы (2.10), и из (2.11) следует

$$T^{(i)}=T_0+\varkappa_{(j)}^{(T)}G_jx_j,\quad \varkappa_j^{(T)}=1-L_{(j)}^{(T)}I_{(j)} \tag{2.16}$$

Отметим, что, как это видно из (2.16), внесение эллипсоидальной неоднородности в однородное поле потока тепла не меняет температуры в центре неоднородности (то же, конечно, относится к случаю электрического потенциала и однородного электрического поля (см. (2.14)).

Рассмотрим потенциалы v_{jk}. Переходя к интегрированию по объему эллипсоида, имеем

$$v_{jk}=\int\limits_V (x_j'R^{-1})_{,k'}dV'=\delta_{jk}v-x_jv_{,k}-\frac{1}{2}J_{jk} \tag{2.17}$$

где δ_{jk} — единичный тензор и

$$J_{jk}=2\int\limits_V l_jl_kR^{-1}dV' \tag{2.18}$$

Перейдем в (2.18) к сферическим координатам, с центром в точке наблюдения. Учитывая, что $dV'=R^2d\Omega dR$, и производя интегрирование по R, приводим (2.18) к виду

$$J_{jk}=\int\limits_{(4\pi)} R^2l_jl_kd\Omega \tag{2.19}$$

где R — расстояние (2.3) от точки наблюдения внутри эллипсоида до точки на его поверхности; интегрирование производится по полному телесному углу. Подставляя (2.3) с учетом (2.4) в (2.19), получаем

$$J_{jk}=\int\limits_{(4\pi)}\left(2\frac{f^2}{g^2}+\frac{h}{g}\right)l_jl_kd\Omega=2x_px_qS_{jkpq}+ha_{(j)}^2I_{(j)}\delta_{jk} \tag{2.20}$$

$$S_{jkpq}=\overset{-2}{a}_{(p)}\overset{-2}{a}_{(q)}\overset{\circ}{S}_{jkpq},\quad \overset{\circ}{S}_{jkpq}=\int\limits_{(4\pi)}\frac{l_jl_kl_pl_q}{g^2}d\Omega \tag{2.21}$$

Здесь использована формула (2.6) и учтено, что интегралы, которые содержат квадратный корень, фигурирующий в (2.3), а также интегралы от $l_jl_kg^{-1}$ при $j\neq k$ обращаются в нуль вследствие нечетности подынтегральных функций. По этой же причине обращаются в нуль компоненты тензора $\overset{\circ}{S}_{jkpq}$, содержащие нечетное число одинаковых индексов. Сам этот тензор, очевидно, симметричен по всем индексам.

Из (2.21) с учетом (2.6) находим

$$\overset{\circ}{S}_{1111}=\int\limits_{(4\pi)}\frac{l^4}{g^2}d\Omega={}^1/{}_2a^3(a^2I_a)_{,a}={}^3/{}_2(I_a-a^2I_{aa}) \tag{2.22}$$

$$\overset{\circ}{S}_{1122}=\int\limits_{(4\pi)}\frac{l^2m^2}{g^2}d\Omega=\frac{a^2b^2}{4}[bI_{a,b}+aI_{b,a}]=\frac{a^2b^2}{4}[I_a+I_b-3(a^2+b^2)I_{ab}] \tag{2.23}$$

$$I_{aa}=2\pi abc\int\limits_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)^{5/2}[(b^2+s)(c^2+s)]^{1/2}}$$

$$I_{ab}=\frac{2}{3}\pi abc\int\limits_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)^{3/2}(b^2+s)^{3/2}(c^2+s)^{1/2}}\tag{2.24}$$

Остальные ненулевые компоненты тензора $\overset{\circ}{S}_{jkpq}$ получаются с учетом его симметрии по всем индексам из (2.22)—(2.24) при помощи круговых перестановок.

Интегралы I_{aa}, $I_{ab}, \ldots$ выражаются через $I_a, \ldots$ при помощи соотношений [4]:

$$I_{aa}=\frac{4\pi}{3a^2}-I_{ab}-I_{ac},\qquad I_{ab}=\frac{I_b-I_a}{3(a^2-b^2)}\tag{2.25}$$

и получающихся из них круговыми перестановками.

В дальнейшем понадобится лишь симметричный тензор $u_{jk}={}^1/_2(v_{jk}+$ $+v_{kj})$. Из (2.17), (2.5), (2.20), (2.21) находим

$$u_{jk}=D_{(j)}\delta_{jk}+D_{jkpq}x_px_q\tag{2.26}$$

$$D_j={}^1/_2[I_{(s)}a_s^2-I_{(j)}a_{(j)}^2]\tag{2.27}$$

$$D_{jkpq}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{(j)}^2}{a_{(s)}^2}I_{(j)}-I_{(s)}\right)\delta_{jk}\delta_{ps}\delta_{qs}+\frac{1}{4}(I_{(j)}+I_{(k)})(\delta_{jp}\delta_{kq}+\delta_{jq}\delta_{kp})-S_{jkpq}\tag{2.28}$$

Отсюда и из (2.21) видно, что компоненты D_{jkpq}, у которых какой-либо индекс встречается нечетное число раз, равны нулю. Используя (2.21)—(2.23) и (2.25), из (2.27), (2.28) находим

$$D_1={}^1/_2(I_bb^2+I_cc^2)\tag{2.29}$$

$$D_{1111}={}^1/_2(3a^2I_{aa}-I_a);\quad D_{1212}={}^3/_4(a^2+b^2)I_{ab}$$
$$D_{1122}=D_{2211}=[b^2I_b-a^2I_a]/2(a^2-b^2)\tag{2.30}$$

остальные компоненты получаются отсюда с учетом свойств симметрии D_{jkpq} при помощи круговых перестановок.

Из (2.26), учитывая (2.21) и формулу для скачка нормальной производной от потенциала простого слоя [5], находим, что на границе эллипсоида

$$\overset{(i)}{u}_{jk,\nu}=2D_{jkpq}\nu_px_q,\quad \overset{(e)}{u}_{jk,\nu}=\overset{(i)}{u}_{jk,\nu}-2\pi(x_j\nu_k+x_k\nu_j)\tag{2.31}$$

3. Решение задачи. Вернемся к задаче (1.5), (1.6), (1.8), (1.9) с условием обращения $\chi^{(e)}$ в нуль на бесконечности. Используя (2.14), запишем граничное условие (1.8) в виде

$$\chi^{(e)}-\chi^{(i)}={}^1/_2A_{(j)(k)}E_jE_kx_jx_k\tag{3.1}$$

$$A_{jk}=\left(\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}-\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}\right)|\varkappa_j^{(\varphi)}\varkappa_k^{(\varphi)}|\tag{3.2}$$

Положим (v определяется (2.1)):

$$\chi^{(e)}=\chi_*^{(e)}-(4\pi)^{-1}A_{(l)(l)}E_l^2v\tag{3.3}$$

$$\chi^{(i)}=\chi_*^{(i)}-(4\pi)^{-1}E_l{}^2 v-{}^1/_2 A_{(j)(k)}E_jE_kx_jx_k \tag{3.4}$$

Отсюда, из (2.2) и первых уравнений (1.5), (1.6) следует

$$\nabla^2\chi_*^{(e)}=0, \quad \nabla^2\chi_*^{(i)}=0 \tag{3.5}$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (1.9), (3.1) с использованием (2.5), (2.8), непрерывности v, а также второго граничного условия (1.2) для исключения из (1.9) величины $(|\varphi^{(e)}|^2)_{,\nu}$, имеем на границе эллипсоида

$$\chi_*^{(e)}-\chi_*^{(i)}=0, \quad \lambda^{(e)}\chi_{*,\nu}^{(e)}-\lambda^{(i)}\chi_{*,\nu}^{(i)}=-(Q_k+Q_{jk}x_j)\nu_k \tag{3.6}$$

$$Q_k=(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})G_k \tag{3.7}$$

$$Q_{jk}=\left\{\left[\gamma^{(e)}\left(1-\frac{\lambda^{(i)}}{\lambda^{(e)}}\right)+\lambda^{(i)}A_{(j)(k)}\right]-\right.$$

$$\left.-\operatorname{Re}\left[\left(\gamma^{(e)}\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}-\gamma^{(i)}\right)\varkappa_k^{(\varphi)}\varkappa_j^{(\varphi)*}\right]\right\}E_jE_k+\frac{1}{4\pi}(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})A_{(l)(l)}E_l{}^2I_{(k)}\delta_{jk} \tag{3.8}$$

где звездочка вверху означает комплексное сопряжение.

Ограничимся рассмотрением случая $Q_{jk}=Q_{kj}$. Положим

$$\chi_*=B_j^{(T)}v_j+X_{jk}u_{jk}+\psi, \quad u_{jk}={}^1/_2(v_{jk}+v_{kj}) \tag{3.9}$$

где X_{jk} — некоторый постоянный симметричный тензор; v_j, v_{jk}, $B_j^{(T)}$ определяются (2.1), (2.15). Согласно (2.2), (3.5), (3.9):

$$\nabla^2\psi^{(e)}=0, \quad \nabla^2\psi^{(i)}=0 \tag{3.10}$$

Подставляя (3.9) в (3.6), с учетом (3.7), (2.11), (2.12) (при $\zeta^{(e)}=\lambda^{(e)}$, $\zeta^{(i)}=\lambda^{(i)}$), (2.15), (2.31) и непрерывности v_j, u_{jk} находим, что на границе эллипсоида

$$\psi^{(e)}-\psi^{(i)}=0, \quad \lambda^{(e)}\psi_{,\nu}^{(e)}-\lambda^{(i)}\psi_{,\nu}^{(i)}=-S_{pq}\nu_px_q \tag{3.11}$$

$$S_{pq}=Q_{pq}+2[\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})D_{jkpq}-\lambda^{(e)}\pi(\delta_{jp}\delta_{kq}+\delta_{jq}\delta_{kp})]X_{jk} \tag{3.12}$$

Потребуем, чтобы тензор S_{pq} обращался в нуль за счет выбора тензора X_{jk}, оставшегося пока неопределенным. В результате приходим к следующей системе шести алгебраических линейных уравнений для шести компонент X_{jk}:

$$2[(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})D_{jkpq}-\pi\lambda^{(e)}(\delta_{jp}\delta_{kq}+\delta_{jq}\delta_{kp})]X_{jk}=-Q_{pq} \tag{3.13}$$

и к задаче (3.10), (3.11) с нулевой правой частью в последнем равенстве при условии обращения ψ в нуль на бесконечности, т. е. к однородной первой задаче с требованием, чтобы ее решение обращалось в нуль на бесконечности. Но такая задача имеет лишь тривиальное решение $\psi=0$. Поэтому и система (3.13) при нулевых правых частях имеет лишь тривиальное решение (если бы эта система удовлетворялась $X_{jk}^{(0)}\neq 0$, то функция $X_{jk}^{(0)}u_{jk}$ была бы нетривиальным решением только что рассмотренной однородной задачи для ψ, которого она иметь не может). Отсюда следует, что система (3.13) и вместе с ней вторая задача имеет единственное решение, выражаемое вторым слагаемым в выражении (3.9) для χ_*.

Решение системы (3.13) для недиагональных компонент находится сразу. Считая в (3.13), например, $p=1$, $q=2$, из (2.21), (2.29) видим, что отличными от нуля компонентами D_{jkpq} будут лишь $D_{1212}=D_{2112}$. В результате находим

$$X_{12}=X_{21}=-\frac{1}{4}\frac{Q_{12}}{(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})D_{1212}-\pi\lambda^{(e)}} \tag{3.14}$$

Формулы для $X_{23}=X_{32}$ и $X_{31}=X_{13}$ получаются из (3.14) при помощи круговых перестановок.

Для диагональных компонент X_{jk} из (3.13) находим уравнение

$$\begin{gathered}[(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})D_{1111}-2\pi\lambda^{(e)}]X_{11}+\\+(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})[D_{2211}X_{22}+D_{3311}X_{33})=-{}^1/_2Q_{11}\end{gathered} \tag{3.15}$$

и еще два уравнения, получающихся отсюда круговыми перестановками.

Таким образом, решать надо лишь систему (3.15) для диагональных компонент X_{jk}.

Найдя из (3.14), (3.15) компоненты X_{jk} и учитывая, что $\psi=0$, из (3.9) находим χ_*, а затем из (3.3), (3.4) находим $\chi^{(e)}$, $\chi^{(i)}$. Зная эти функции, из вторых соотношений (1.5), (1.6) находим распределение температуры. При этом следует учесть, что согласно (2.11)–(2.13)

$$\varphi=L_j^{(\varphi)}E_jv_j+\varphi^{(H)} \tag{3.16}$$

Распределение температуры внутри эллипсоида с учетом также (1.7), (2.5), (2.10), (2.13)–(2.16), (2.26), (3.2) принимает вид

$$T^{(i)}=T_*+\varkappa_{(j)}^{(T)}G_jx_j+M_{jk}x_jx_k \tag{3.17}$$

$$T_*=T_0+D_{(m)}X_{mm}-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}-\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}\right)I_{(s)}a_s^2|\varkappa_{(q)}^{(\varphi)}|^2E_q^2 \tag{3.18}$$

$$\begin{gathered}M_{jk}=\frac{1}{2}\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}(1-|\varkappa_{(j)}^{(\varphi)}\varkappa_{(k)}^{(\varphi)}|)E_jE_k+\\+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}-\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}\right)|\varkappa_{(q)}^{(\varphi)}|^2E_q^2I_{(s)}\delta_{js}\delta_{ks}+X_{pq}D_{pqjk}\end{gathered} \tag{3.19}$$

Таким образом, распределение температуры внутри эллипсоида описывается многочленом второй степени. Вследствие непрерывности температуры выражение (3.17) справедливо также на границе эллипсоида. Температура в центре эллипсоида изменяется под действием тепловыделения, связанного с электрическими потерями.

Распределение температуры вне эллипсоида, с учетом формулы (3.16) и указанных перед ней подстановок, принимает вид

$$\begin{gathered}T^{(e)}-T^{(H)}=-\frac{1}{2}\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}[2\varphi^{(H)}\operatorname{Re}(L_{(j)}^{(\varphi)})E_jv_j^{(e)}+L_{(j)}^{(\varphi)}L_{(k)}^{(\varphi)*}E_jE_kv_j^{(e)}v_k^{(e)}]-\\-\frac{A_{(l)(l)}}{4\pi}E_l^2v^{(e)}+X_{jk}u_{jk}^{(e)}+B_j^{(T)}v_j^{(e)}\end{gathered} \tag{3.20}$$

Отсюда можно найти изменение температуры на больших расстояниях от эллипсоида. Для этого достаточно воспользоваться асимптотикой при

$r=(x_q^2)^{1/2}\to\infty$ функции v, определяемой (2.1), и функции

$$v_*=\int\limits_V R\,dV',\qquad R=[(x_q-x_q')^2]^{1/2}\tag{3.21}$$

где интегрирование происходит по объему эллипсоида. Потенциал v_j выражается через v посредством (2.9), а для v_{jk}, принимая во внимание (2.17), (2.18) и то, что $l_j=(x_j'-x_j)R^{-1}$, имеем

$$v_{jk}=v_{*,\,jk}-x_jv_{,k}\tag{3.22}$$

При $r\to\infty$, из (2.1), (3.22) находим

$$v=Vr^{-1}+O(r^{-3}),\quad v_*=Vr+O(r^{-1})\tag{3.23}$$

Отсюда с учетом (2.9), (3.22) находим

$$v_j=Vn_jr^{-2}+O(r^{-4}),\quad v_{jk}=Vr^{-1}\delta_{jk}+O(r^{-3})\tag{3.24}$$

где n_j — единичный вектор, направленный из центра эллипсоида в точку наблюдения. Подставляя в правую часть (3.20) выражения (1.7) для $\varphi^{(H)}$ и (3.24), и принимая во внимание также (2.13), (2.15), находим для изменения температуры на большом расстоянии r от центра эллипсоида

$$T^{(e)}-T^{(H)}=\left[X_{jj}-\frac{A_{(l)(l)}}{4\pi}E_l^{\,2}+\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}\,\mathrm{Re}\,(L_{(j)}^{(\varphi)})E_jE_kn_jn_k\right]\frac{V}{r}-L_{(j)}^{(T)}G_{(j)}\frac{Vn_j}{r^2}\tag{3.25}$$

Отброшенные здесь малые слагаемые имеют более высокий порядок малости, чем r^{-2}.

4. Частные случаи. Решение рассматриваемой задачи упрощается в случае сфероида, сферы, цилиндра, трещиноподобной неоднородности (соответствующие выражения для $I_a,\ldots,I_{aa},\ldots$ приведены в [4, 2]).

Ограничимся, далее, рассмотрением случая, когда весь ток является током проводимости и постоянен, либо очень медленно меняется, так что $\gamma^{(e)}=\gamma_0^{(e)}$, $\gamma^{(i)}=\gamma_0^{(i)}$ — постоянные электропроводности (индекс нуль в дальнейшем будем опускать). В этом случае слагаемое $\mathrm{Re}\,[\ldots]$ в (3.8) обращается в нуль. Предположим, что неоднородность сферическая: $a=b=c$. Тогда (см. (2.7), (2.13)–(2.16), (2.24), (2.25))

$$I_a=I_b=I_c=4\pi/3,\quad I_{aa}=I_{bb}=I_{cc}=4\pi/5a^2\tag{4.1}$$

$$I_{ab}=I_{ac}=I_{bc}=4\pi/15a^2$$

$$I_{(j)}L_j^{(\varphi),(T)}=-\frac{\zeta^{(e)}-\zeta^{(i)}}{2\zeta^{(e)}+\zeta^{(i)}},\qquad \varkappa_j^{(\varphi),(T)}=\frac{3\zeta^{(e)}}{2\zeta^{(e)}+\zeta^{(i)}},\qquad \zeta=\gamma,\lambda\tag{4.2}$$

Очевидно, в данном случае все направления электрического поля равноправны. Поэтому будем считать его направленным по оси z; $E_z=E$, $E_x=E_y=0$. Подставляя (4.1) в (2.30) и полученные значения D_{jkpq} в (3.15), вычисляя также на основании (3.8) правые части (3.15), с использованием (2.13), (2.14), (3.2), (4.2) находим

$$X=X_{11}=X_{22}=\frac{E^2(\lambda^{(e)}-\lambda^{(i)})}{4\pi(3\lambda^{(e)}+2\lambda^{(i)})}\left[9\left(\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}-\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}\right)\left(\frac{\gamma^{(e)}}{2\gamma^{(e)}+\gamma^{(i)}}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\,\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}\left(1-\frac{\lambda^{(i)}}{\lambda^{(e)}}\right)\right]\tag{4.3}$$

$$X_{33}=\frac{E^2}{4\pi(3\lambda^{(e)}+2\lambda^{(i)})}\left[9\left(\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}-\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}\right)\left(\frac{\gamma^{(e)}}{2\gamma^{(e)}+\gamma^{(i)}}\right)^2(\lambda^{(e)}+4\lambda^{(i)})+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}\left(1-\frac{\lambda^{(i)}}{\lambda^{(e)}}\right)(13\lambda^{(e)}+2\lambda^{(i)})\right] \tag{4.4}$$

Недиагональные компоненты X_{jk} согласно (3.14) обращаются в нуль, поскольку из (3.8) следует, что в данном случае равны нулю недиагональные компоненты Q_{jk}.

При помощи (4.3), (4.4) из (3.17)–(3.20), (3.25) с учетом также (2.29), (2.30), (3.2), (4.2) можно найти температуру. В частности для изменения температуры в центре сферической неоднородности согласно (3.18) имеем

$$T_*-T_0=a^2E^2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\gamma^{(i)}}{\lambda^{(i)}}-\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}\right)\left(\frac{\gamma^{(e)}}{2\gamma^{(e)}+\gamma^{(i)}}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{\gamma^{(e)}}{\lambda^{(e)}}\left(1-\frac{\lambda^{(i)}}{\lambda^{(e)}}\right)\right] \tag{4.5}$$

Отсюда видно, что в зависимости от соотношения между тепло- и электропроводностями внутри и вне неоднородности, температура в ней может быть как больше, так и меньше температуры, которая была бы в данном месте при отсутствии неоднородности, причем это изменение температуры формально может быть сколь угодно большим по абсолютной величине.

Фактически, однако, должно учитываться, что одновременно происходит безграничное возрастание по абсолютной величине коэффициента при r^{-1} в формуле (3.25), выражающей распределение возмущения температуры на больших расстояниях от неоднородности. Поэтому безгранично будут расти расстояния от неоднородности, на которых возмущение температуры становится пренебрежимо малым. Но для применимости рассматриваемого решения эти расстояния должны быть гораздо меньше характерного масштаба L, на котором существенно изменяется внешнее поле и который определяет размер области, где справедливы выражения (1.7). Следовательно, этим решением уже нельзя будет пользоваться, когда указанные расстояния станут сравнимыми с L.

Предположим, что по теплопроводности среда однородна: $\lambda^{(e)}=\lambda^{(i)}=\lambda$. Решение системы (3.15) в этом случае с учетом (3.2), (3.8) имеет вид

$$X_{(j)(j)}=\frac{\gamma^{(e)}-\gamma^{(i)}}{4\pi\lambda}(\varkappa_{(j)}^{(\varphi)})^2E_{(j)}^2 \tag{4.6}$$

Если неоднородность представляет собой сфероид ($a=b$), а поле E_j направлено по его полярной оси z ($E_x=E_y=0$, $E_z=E$), то из (3.18) с учетом (2.29), (3.2), (4.6) для изменения температуры в центре сфероида находим

$$T_*-T_0=2\pi\frac{\gamma^{(i)}-\gamma^{(e)}}{\lambda}\left[\frac{c\gamma^{(e)}E}{4\pi\gamma^{(e)}-(\gamma^{(e)}-\gamma^{(i)})}\right]^2 I_c \tag{4.7}$$

Аналогично, с учетом также (2.30) и условия $a=b$, для ненулевых M_{jk} находим

$$M=M_{11}=M_{22}=\frac{6\pi(\gamma^{(e)}-\gamma^{(i)})}{\lambda}I_{ac}\left[\frac{c\gamma^{(e)}E}{4\pi\gamma^{(e)}-(\gamma^{(e)}-\gamma^{(i)})I_c}\right]^2 \tag{4.8}$$

$$M_{33}=M_z=\frac{E^2}{2\lambda}\left\{\gamma^{(e)}-4\pi\left[\frac{\gamma^{(e)}}{4\pi\gamma^{(e)}-(\gamma^{(e)}-\gamma^{(i)})I_c}\right]^2[4\pi\gamma^{(e)}-3c^2I_{cc}(\gamma^{(e)}-\gamma^{(i)})]\right\} \tag{4.9}$$

Если градиент внешнего температурного поля отсутствует ($G_j=0$) и $MM_z>0$, то, как видно отсюда и из (3.17), изотермы внутри неоднородности описываются сфероидами. В этом случае при надлежащем выборе отношения длин полуосей неоднородности ее поверхность будет представлять собой изотерму.

Отсюда следует, что в материале со скачкообразным изменением его характеристик типа фазовых переходов первого рода при действии электрического поля могут, наряду со стационарными состояниями, когда всюду характеристики имеют значения только до или только после перехода, существовать также стационарные локально неоднородные состояния. В этих состояниях в материале образуются малые области, внутри и вне которых характеристики материала имеют значения, лежащие по разные стороны от перехода. При этом там, где градиенты внешнего температурного поля пренебрежимо малы (например приосевая часть круглого цилиндра, ориентированного вдоль поля, или центральная часть слоя, ориентированного параллельно, либо перпендикулярно полю при условии одинаковости теплообмена на границах), указанные области имеют форму сфероидов с осью симметрии, ориентированной параллельно полю, и поверхностью, являющейся изотермой, соответствующей температуре перехода. В других местах форма этих областей искажается.

Такая картина возникает при скачкообразном возрастании электропроводности с температурой.

В состоянии материала с повышенной электропроводностью существование локальной неоднородности с пониженной электропроводностью оказывается возможным, вследствие обтекания такой неоднородности током и вызванного этим снижения температуры ниже точки перехода из-за уменьшения тепловыделения. Обратная картина может существовать благодаря повышению тепловыделения в неоднородности с более высокой электропроводностью, чем в окружающем ее материале. Анализ показывает, что при большой величине скачка электропроводности неоднородности последнего типа приобретают иглообразную форму. Такая картина, в сущности, аналогична явлению теплового пробоя [6].

Неоднородность температуры, связанная с неоднородностью электропроводности в результате описанного перехода, порождает механические напряжения, которые могут оказывать влияние на разрушение материала.

Так, иглообразные неоднородности с повышенной электропроводностью, вследствие имеющего место внутри них повышения температуры, будут распирать окружающий материал и породят в нем кольцевые растягивающие напряжения. Эти напряжения могут вызвать разрушение в виде розетки трещин, ось которой совпадает с осью неоднородности. Число трещин в розетке определяется условием, чтобы нигде между трещинами кольцевое напряжение не превосходило прочности материала на разрыв.

Отметим, что симметрия тензора (3.8) реализуется не только в случае одних лишь токов проводимости, но и в случае малости мнимых частей диэлектрических проницаемостей.

Поступила 14 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салганик Р. Л.* Термоупругое равновесие тела с трещинами при разогреве, вызванном пропусканием тока перпендикулярно трещинам. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
3. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.-М., ОНТИ, 1937.
4. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 4, изд. 5. М., Физматгиз, 1958.
6. *Франц В.* Пробой диэлектриков. М. Изд-во иностр. лит., 1961.