МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1980

УДК 539.419:624.074.4

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

И. Н. КАЛИНИН

(Горький)

Методы математического программирования, как правило, не позволяют учесть физические особенности изучаемых объектов для повышения надежности поиска экстремума и ускорения скорости сходимости. Прямое использование методов может приводить к огромным вычислительным затратам, что затрудняет проектирование систем с большим числом переменных. Поэтому представляет практический интерес выявление характерных особенностей задач и разработка приемов их эффективного использования в рамках стандартных методов математического программирования.

В данной работе рассматривается один класс задач оптимизации, к которому относятся многие практические задачи проектирования в механике твердого деформируемого тела, и дается простой алгоритм учета свойств для повышения эффективности и надежности поиска.

1. Формулировка задачи и обоснование подхода. Рассматривается *первая задача* оптимизации: определить $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ из условия

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)=\min_{\mathbf{x}\in E^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \quad (k\leqslant n) \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant 0 \quad (i=\overline{1, m}) \tag{1.2}$$

$$a_j\leqslant x_j\leqslant b_j \quad (j=\overline{1, n}) \tag{1.3}$$

где a_j, b_j — константы, задающие нижние и верхние пределы изменения переменных.

Пусть функции f, g_i удовлетворяют условиям

$$|\nabla f(\mathbf{x})|\geqslant\varepsilon, \quad \varepsilon=\text{const}>0, \quad \mathbf{x}\in D \tag{1.4}$$

$$|g_i(\mathbf{x})-g_i(\mathbf{y})|\leqslant L_i|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \quad (L_i>0, \ \mathbf{x}, \mathbf{y}\in D) \quad (i=\overline{1, m}) \tag{1.5}$$

где D задается ограничениями (1.2), (1.3).

Сформулируем *вторую задачу* оптимизации: определить $\mathbf{x}^*\in E^n$ из условия минимума функции

$$F(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+C\max_{i=\overline{1,m}} g_i(\mathbf{x}) \tag{1.6}$$

при ограничениях (1.2), (1.3). Справедлив следующий результат.

Теорема. Задачи 1, 2 имеют в оптимальных точках равные значения $f(\mathbf{x})$, если C в (1.6) удовлетворяет условию

$$C<\varepsilon/\max_{i=\overline{1,m}} L_i \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^*$ – решение первой задачи. Точка $\mathbf{x}^*$ – допустимая точка второй задачи, так как ограничения этих двух задач совпадают.

Очевидно, что нельзя найти такое δx, чтобы $f(x^*+\delta x)<f(x^*)$ и были выполнены все ограничения, так как это противоречит предположению о том, что x^* – решение первой задачи.

Следовательно, утверждение теоремы может быть несправедливо, если только найдется такое δx, когда $f(x^*+\delta x)>f(x^*)$, но $F(x^*+\delta x)<F(x^*)$, что возможно только при условии

$$\max_i g_i(x^*) > \max_i g_i(x^*+\delta x) \tag{1.8}$$

$$C|\max_i g_i(x^*) - \max_i g_i(x^*+\delta x)| > |f(x^*) - f(x^*+\delta x)| \tag{1.9}$$

Покажем, что при выборе C, согласно (1.7), неравенство (1.9) невозможно. Для этого найдем максимум левой части и минимум правой при $x\in D$.

По формуле конечных приращений $f(x^*)-f(x^*+\delta x)=\nabla f(x^*-\theta\delta x)(-\delta x)$ при $0<\theta<1$ и с учетом (1.4) будем иметь

$$|f(x^*)-f(x^*+\delta x)|\geqslant\varepsilon|\delta x| \tag{1.10}$$

Пусть $\max_i g_i(x^*)$ достигается при $i=p$, а $\max_i g_i(x^*+\delta x)$ – при $i=t$. Тогда в силу $g_p(x^*)-g_t(x^*+\delta x)>0$ из (1.8) справедливо

$$|g_p(x^*)-g_t(x^*+\delta x)|\leqslant|g_p(x^*)-g_p(x^*+\delta x)|\leqslant L_p|\delta x|$$

Но так как p может принимать любое значение из $\{1, 2, \ldots, m\}$, то

$$|g_p(x^*)-g_t(x^*+\delta x)|\leqslant \max_i L_i|\delta x| \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) с учетом (1.7) получаем $C\max_i L_i|\delta x|<\varepsilon|\delta x|$, т. е. (1.9) невозможно и, следовательно, утверждение теоремы справедливо.

Замена первой задачи второй наиболее целесообразна в том случае, если $k<n$ и (или) оптимум достигается на одном из ограничений (1.2). Так, в решении первой задачи методом внешних штрафных функций, когда $k<n$, могут быть непроизводительные затраты при текущей точке, лежащей внутри допустимой области, из-за того, что целевая функция не зависит от $x_{k+1}, \ldots, x_n$. В этом случае приращения $\delta x_{k+1}, \ldots, \delta x_n (x_{k+1}+\delta x_{k+1}, \ldots, x_n+\delta x_n\in D)$ не изменят значение $f(x)$ и не приведут к изменению траектории поиска. Между тем, если оптимум достигается на одном из ограничений из (1.2), было бы желательно за счет рассматриваемых шагов для создания «запаса» по ограничениям добиться уменьшения $\max_i g_i(x)$, что и будет происходить при решении второй задачи (если это вообще возможно).

Кроме того, комбинация метода внешних штрафных функций с некоторыми методами безусловной минимизации вообще может не привести к решению при $k<n$.

Известно, что одним из наиболее ценных свойств методов внутренней точки [1], применяемых для решения задачи с ограничениями, является именно управляемость траектории поиска по ограничениям. Но в методах внутренней точки приходится решать последовательность задач безусловной минимизации с ухудшающимися свойствами [2].

Предлагаемый подход помимо управляемости по ограничениям позволяет улучшить и структуру задачи за счет уменьшения овражности вдоль границ.

2. Численные результаты. *Рассмотрим задачу определения параметров ортотропной оболочки вращения минимального объема.* Требуется найти толщину h ($h(s)=\text{const}$), отношение модулей упругости E_1/E_2 и коэффициент поперечной деформации ν_1, доставляющие минимум объему материала оболочки

$$V(h)=2\pi h\int\limits_0^l r(s)\,ds \tag{2.1}$$

при ограничениях по прочности

$$\max_{\{s|0\leqslant s\leqslant l\}} \sigma(s,h,E_1/E_2,\nu_1)\leqslant 1 \tag{2.2}$$

и геометрических ограничениях

$$a_i\leqslant\nu_i\leqslant b_i,\ a_{2+i}\leqslant E_i\leqslant b_{2+i}\ {}_{(i=1,\,2)},\ 0<a_5\leqslant h\leqslant b_5 \tag{2.3}$$

где l — длина образующей оболочки, $r(s)$ — расстояние от точки с координатой s до оси вращения.

Пусть выполняются следующие предположения: D — не пусто, существует

$$[\partial \max_s \sigma(s,h,E_1/E_2,\nu_1)/\partial h]<0,\quad h,E_1/E_2,\quad \nu_1\in D,\quad s\in[0,l] \tag{2.4}$$

где h^*, E_1^*/E_2^*, ν_1^* — искомое решение, причем $a_5<h^*<b_5$. Справедлив следующий результат.

Лемма. Для сформулированной задачи при сделанных предположениях

$$\min_{E_1/E_2,\nu_1\in D}\ \max_{s\in[0,l]} \sigma(s,h^*,E_1/E_2,\nu_1)=\max_{s\in[0,l]}\sigma(s,h^*,E_1^*/E_2^*,\nu_1^*)$$

Доказательство. В силу предположения $a_5<h^*<b_5$, учитывая, что $dV/dh>0$, и имеет место условие (2.4), решение задачи достигается на границе по напряженному состоянию, т. е. $\max\limits_{s\in[0,l]}\sigma(s,\ h^*,\ E_1^*/E_2^*,\ \nu_1^*)=1$.

Используя полученный результат, утверждение леммы можно легко доказать методом от противного [3].

Так как решение достигается на ограничении и в данном случае $k<n$, то имеются все основания исследовать эффективность предлагаемой переформулировки задачи.

Условие (1.4), используемое в доказательстве теоремы, выполняется

$$\frac{dV}{dh}=2\pi\int\limits_0^l r(s)\,ds=K\quad (K=\text{const}>0)$$

Проверку (1.5) необходимо производить для конкретных данных решаемых задач.

Будем считать, что материал не может находиться в пластическом состоянии, а для оценки появления пластических деформаций используется обобщенный критерий энергии формоизменения для ортотропных материалов [4]:

$$\sigma\left(s,h,\frac{E_1}{E_2},\nu_1\right)=\frac{\sigma_1^2(s,h,E_1/E_2,\nu_1)}{\sigma_1^2(E_1/E_2,\nu_1)}-$$

$$-\frac{\sigma_1(s,h,E_1/E_2,\nu_1)\sigma_2(s,h,E_1/E_2,\nu_1)}{\sigma_1(E_1/E_2,\nu_1)\sigma_2(E_1/E_2,\nu_1)}+\frac{\sigma_2^2(s,h,E_1/E_2,\nu_1)}{\sigma_2^2(E_1/E_2,\nu_1)}\leqslant 1$$

где $\sigma_i(s,\ h,\ E_1/E_2,\ \nu_1)$, $\sigma_i(E_1/E_2,\ \nu_1)$ — напряжения и пределы текучести материала в меридиональном и окружном направлениях.

Рассматривалась оболочка, срединная поверхность которой образована вращением полуволны синусоиды $f\sin(\pi x/2L)$ вокруг оси Z, удаленной от оси синусоиды на расстояние c' [5]. Нагрузка — всестороннее внутреннее давление p, граничные условия — заглушка, допускающая перемещение в осевом направлении и условие симметрии.

Нетрудно видеть, что функция ограничения по напряженному состоянию удовлетворяет условию Липшица (1.5).

Численные исследования проводились при следующих значениях геометрических и физических величин: $L=2$ м, $c'=0.45$ м, $f=0.2$ м, $p=45.126\cdot10^5$ Па, $\sigma_1(E_1/E_2, \nu_1)=\sigma_2(E_1/E_2, \nu_1)=\mathrm{const}=1962\cdot10^5$ Па, $a_1=a_2=0.1$, $b_1=b_2=0.4$ (для остальных переменных геометрические ограничения были несущественны), $c=0.1$.

Для оптимизации применялся комбинированный алгоритм прямого поиска [6] в сочетании с методом внешних штрафных функций.

Процесс поиска повторялся из трех начальных точек: $E_1/E_2=1$, $\nu_1=0.2$, $h=0.02$ м; $E_1/E_2=1$, $\nu_1=0.2$, $h=0.006$ м; $E_1/E_2=1$, $\nu_1=0.2$, $h=0.035$ м.

Результаты приводятся в таблице, где V — объем материала оболочки; N — число вычисленной целевой функции, которое потребовалось для получения оптимального решения; h^*, E_1^*/E_2^*, ν_1^* — значения искомых параметров; k — относительные затраты на поиск (в процентах) к затратам при прямом подходе к определению оптимальных параметров.

h, м	f	h^*, м	ν_1^*	E_1^*/E_2^*	V, м³	N	k
0.006	V	0.01155	0.1	0.25	0.04093	625	100
	F	0.01114	0.1	0.25	0.03948	458	73.28
0.02	V	0.01114	0.1	0.25	0.03948	676	100
	F	0.01114	0.1	0.25	0.03948	440	65.09
0.035	V	0.01143	0.1	0.2623	0.04049	769	100
	F	0.01114	0.1	0.25	0.03948	475	63.07

Для двух случаев переформулировка задачи позволила получить лучшее решение, хотя улучшение и незначительно. Затраты на поиск при этом были намного меньшими (до 36.93%).

Следует отметить, что используемый алгоритм в большой степени обладает нелокальными свойствами и принципиально позволяет получить решение задачи без описанного здесь приема при определенном выборе управляющих параметров.

При использовании релаксационных методов оптимизации можно ожидать еще большего эффекта.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку постоянной толщины, подкрепленную одним (для простоты рассуждений) ребром заданной жесткости. Необходимо определить толщину оболочки h и координату s, определяющую место установки шпангоута, из условия минимума объема материала конструкции

$$V(h)=2\pi Rlh+2\pi RF' \tag{2.5}$$

где R — радиус оболочки, l — длина оболочки, F' — площадь поперечного сечения шпангоута, при ограничениях по прочности в оболочке и ребре жесткости

$$\sigma_1(h, s)\leqslant\sigma^*, \quad \sigma_2(h, s)\leqslant\sigma^* \tag{2.6}$$

и ограничениях на пределы изменения переменных: $h>0$, $0\leqslant s\leqslant l$.

Будем считать, что нагрузка и граничные условия в задаче таковы, что $[\partial\sigma_1(h, s)/\partial s]\neq0$ $(s\in[0, l])$.

Пусть в оптимальной точке существенным является первое из ограничений (2.6) и для учета нелинейных ограничений (2.6) используется метод внешних штрафных функций.

Если начальная точка удовлетворяет условиям $s^0 \neq s^*$, $\sigma_1(h^0, s^0) < \sigma^*$, $\sigma_1(h^0 - \delta h, s^0) > \sigma^*$, $\delta h > 0$, где δh — начальный шаг, то локальные методы поиска (координатный спуск, конфигураций, локальных вариаций и некоторые другие), использующие по крайней мере на начальном этапе шаги по координатным направлениям, не применимы для получения решения. Следует отметить, что подобная ситуация может получиться в любой текущий момент поиска.

Рассмотрим, например, процесс решения задачи в формулировках п. 1 методом координатного спуска.

Пусть начальная точка будет допустимой, т. е. $\sigma_1(h^0, s^0) \leqslant \sigma^*$, а параметры ребра таковы, что условие прочности всегда выполняется.

В постановке первой задачи, после минимизации по h в силу линейности целевой функции и принятых допущений получится $\sigma_1(h^1, s^0) = \sigma^*$.

Минимизация по s дает значение s^0, так как целевая функция от s не зависит, а текущая точка принадлежит допустимой области.

Очевидно, что в этом случае окончательный результат h^1, s^0 отличается от действительного оптимума.

В постановке второй задачи одномерная минимизация по h дает значение h^1 в силу выбора константы C согласно (1.7).

Минимизация F по s приведет к уменьшению $\sigma_1(h, s)$ на величину

$$\min_s \sigma(h^1, s) - \sigma(h^1, s^\circ), \quad |\min_s \sigma(h^1, s) - \sigma(h^1, s^\circ)| > 0$$

ввиду принятых допущений. За счет образовавшегося запаса прочности на следующем шаге получится $h^2 = h^1 - \delta h$ $(\delta h > 0)$ и т. д.

Приведенные рассуждения показывают, что формулировка второй задачи позволит при сделанных предположениях получить лучшее решение $(V(h^2) < V(h^1))$.

Совершенно очевидно, что подобная ситуация возникает и при использовании перечисленных выше методов. Если априорный выбор константы C затруднителен, то можно рекомендовать для учета ограничений метод внутренней точки или метод внешней точки в сочетании с нелокальными алгоритмами безусловной оптимизации (случайный поиск, методы деформируемого многогранника, оврагов и т. д.). Но если выбор C труда не представляет, то рассмотренный прием может быть полезен даже при $k=n$.

Укажем два достаточно широких класса задач механики твердого деформируемого тела, в которых предложенное преобразование может увеличить скорость сходимости алгоритмов оптимизации и повысить надежность поиска экстремума. Это задачи, в которых требуется определить положения некоторых (или всех) элементов конструкции и задачи с неизвестными физическими параметрами материала (например, нахождение углов армирования в конструкциях из стеклопластика).

Кроме того, для указанных классов задач расширяется множество алгоритмов оптимизации, которые можно использовать для поиска решения.

Поступила 13 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М., «Мир», 1975.
2. Численные методы условной оптимизации. Под ред. Ф. Гилла и У. Мюррея. М., «Мир», 1977.
3. *Калинин И. Н.* Поиск оптимальных параметров ортотропной оболочки. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Всес. межвуз. сб. изд. Горьковск. ун-та, 1980.
4. *Гольденблат И. И., Копнов В. А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М., «Машиностроение», 1968.
5. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
6. *Калинин И. Н., Ленкин И. Б.* Оптимизация оболочек кусочно-постоянной толщины при ограничениях по прочности. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6.