

РЕЗОНАНСНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА
С НЕКОНТАКТНЫМ ПОДВЕСОМ ПРИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ
ВИБРАЦИИ ОСНОВАНИЯ

Т. А. САВЧЕНКО

(Владимир)

Анализ поведения несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом при однокомпонентной гармонической вибрации основания проведен в работе [1]. В данной работе рассматривается гироскоп при двухкомпонентной поступательной вибрации. Исследуются резонансные явления, когда частота вибрации основания близка к одной из собственных частот углового движения ротора. Построены приближенные уравнения и проведен анализ резонансных эффектов в движении гироскопа.

1. Рассмотрим гироскоп с шаровым ротором, находящимся в вакууме в регулируемом силовом поле. Ротор предварительно раскручен вспомогательной системой и в рабочем режиме вращается по инерции. Ротор гироскопа имеет ось динамической симметрии, центр масс его не совпадает с центром сферической поверхности ротора.

Предположим, что сила тяготения отсутствует, а поступательная вибрация такова, что траектория, описываемая произвольной точкой основания, есть эллипс.

Используя обозначения работ [1, 2], запишем уравнения движения гироскопа в следующей форме:

уравнения движения центра масс

$$D^2 r_{\xi_1} = f_{\xi_1} + c_1 \cos \gamma, \quad D^2 r_{\xi_2} = f_{\xi_2} + c_2 \sin \gamma, \quad D^2 r_{\xi_3} = f_{\xi_3}, \quad D\gamma = \omega \quad (1.1)$$

уравнения моментов

$$lD\rho = \varepsilon m_{\xi_1}, \quad l \sin \rho D\sigma = \varepsilon m_{\xi_2}, \quad Dl = \varepsilon m_{\xi_3} \quad (1.2)$$

кинематические уравнения

$$D\psi = l - \frac{\varepsilon}{l} (m_{\xi_1} \cos \psi + m_{\xi_2} \sin \psi) \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{\varepsilon}{l} m_{\xi_3} \operatorname{ctg} \rho \quad (1.3)$$

$$D\vartheta = \frac{\varepsilon}{l} (m_{\xi_2} \cos \psi - m_{\xi_1} \sin \psi)$$

$$D\varphi = -\frac{l\kappa \cos \vartheta}{1+\kappa} + \frac{\varepsilon}{l \sin \vartheta} (m_{\xi_1} \cos \psi + m_{\xi_2} \sin \psi)$$

уравнения следящей системы подвеса

$$f_{\xi_i} = -q(D) (r_{\xi_i} + e_{\xi_i}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad q(D) = q_0 a(D) / b(D) \quad (1.4)$$

проекции моментов и вспомогательные соотношения

$$m_{\xi_1} = e_{\xi_2} f_{\xi_3} - e_{\xi_3} f_{\xi_2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

$$e_{t_1} = (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi) \cos \beta + \sin \psi \sin \vartheta \sin \beta$$

$$e_{t_2} = (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi) \cos \beta - \cos \psi \sin \vartheta \sin \beta$$

$$e_{t_3} = \sin \vartheta \sin \varphi \cos \beta + \cos \vartheta \sin \beta$$

Здесь $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ — система координат с началом в центре кожуха O гироскопа и осями, неизменно ориентированными в пространстве (ось ξ_3 направлена перпендикулярно к «плоскости» вибрации, а оси ξ_1 и ξ_2 — оси симметрии эллипса вибрации), $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ — система координат, связанная с вектором кинетического момента l . Матрица ориентации трехгранника ξ относительно ζ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sigma \cos \rho & -\sin \sigma & \cos \sigma \sin \rho \\ \sin \sigma \cos \rho & \cos \sigma & \sin \sigma \sin \rho \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1)–(1.5) записаны в безразмерном виде. Связь с размерными переменными определяется соотношениями [1, 2]:

$$L = L_0 l, \quad R = E r, \quad E = E e, \quad F = F_0 f, \quad t = T_0 \tau, \quad I_3 = I_1 (1 + \kappa)$$

$$\Omega = T_0^{-1} \omega, \quad T_0 = L_0^{-1} I_1, \quad F_0 = M E T_0^{-2}, \quad q_0 = M^{-1} T_0^{-2} Q_0,$$

$$\varepsilon = M E^2 I_1^{-1}, \quad c_j = P_j T_0^2 E^{-1} \quad (j=1, 2)$$

Здесь L — вектор кинетического момента ротора, R — вектор смещения центра масс ротора O_2 относительно центра кожуха O , E — вектор дебаланса, т. е. вектор, проведенный из центра масс O_2 в геометрический центр ротора O_1 , I_1, I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции ротора, M — масса ротора, F — вектор равнодействующей силового поля подвеса ротора, Q_0 — «жесткость» подвеса, Ω — частота вибрации, P_1, P_2 — ускорения основания по осям ξ_1, ξ_2 ($P_1 \leq P_2$), D — оператор дифференцирования по безразмерному времени τ , $a(D)$ и $b(D)$ — полиномы от D с постоянными коэффициентами. Величины L_0 и F_0 выбираются так, чтобы в рассматриваемом движении модули векторов l, f были близки к единице. В качестве нормализующего множителя для вектора R выбран модуль дебаланса E , так как после затухания «собственных» составляющих движения смещение центра масс имеет порядок величины дебаланса [3]. Углы ρ и σ определяют положение вектора кинетического момента l относительно трехгранника ξ , углы ψ, ϑ, φ определяют угловое положение ротора относительно трехгранника ξ, β — угол между вектором дебаланса и экваториальной плоскостью центрального эллипсоида инерции ротора.

2. Для приближенного анализа уравнений (1.1)–(1.5) используем наличие в рассматриваемой системе составляющих движения, имеющих различные временные масштабы. Для реальных конструкций числовая величина ε имеет порядок 10^{-8} – 10^{-10} , поэтому в системе (1.1)–(1.5) переменные $r, f, \psi, \varphi, \gamma$ являются «быстрыми» а $l, \rho, \vartheta, \sigma$ — «медленными». При этом, конечно, предполагается, что $\vartheta \neq 1/2\pi$, так как при ϑ , близких к $1/2\pi$, переменная φ становится медленной и проводимое ниже осреднение становится некорректным.

Для разделения медленных и быстрых переменных применим общую схему осреднения, которая позволяет построить приближенные дифференциальные уравнения для медленных составляющих движения при помощи оператора осреднения по времени τ вдоль решения порождающей системы, получаемой из (1.1)–(1.5) при $\varepsilon=0$, когда $l, \rho, \vartheta, \sigma$ — постоянные величины, а быстрые переменные определяются соотношениями

$$\psi = l\tau + \psi_0, \quad \varphi = -v\tau + \varphi_0, \quad \gamma = \omega\tau + \gamma_0 \quad (2.1)$$

$$f_{t_1} = -v(D) (c_1 \cos \gamma \cos \sigma + c_2 \sin \gamma \sin \sigma) \cos \rho - w(D) \{1/2 [(1 - \cos \vartheta) \cos (\psi - \varphi) +$$

$$+ (1 + \cos \vartheta) \cos (\psi + \varphi)] \cos \beta + \sin \psi \sin \vartheta \sin \beta\} + f_{t_1}^{(0)}$$

$$f_{t_2} = -v(D) (-c_1 \cos \gamma \sin \sigma + c_2 \sin \gamma \cos \sigma) - w(D) \{1/2 [(1 - \cos \vartheta) \sin (\psi - \varphi) +$$

$$+ (1 + \cos \vartheta) \sin(\psi + \varphi) \cos \beta - \cos \psi \sin \vartheta \sin \beta \} + f_{t_2}^{(0)}$$

$$f_{t_3} = -v(D) (c_1 \cos \gamma \cos \sigma + c_2 \sin \gamma \sin \sigma) \sin \rho + w(D) (\sin \vartheta \sin \varphi) \cos \beta + f_{t_3}^{(0)}$$

$$v = \frac{l\kappa \cos \vartheta}{1 + \kappa}, \quad v(D) = \frac{q_0 a(D)}{q_0 a(D) + D^2 b(D)} \quad w(D) = D^2 v(D)$$

$f_{t_j}^0$ — общее решение однородного уравнения, получающегося из (1.1)–(1.5) при $e_{t_j} = 0$ ($f_{t_j}^0 \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$).

Таким образом, в рассматриваемом случае невозмущенное угловое движение есть регулярная прецессия Эйлера—Пуансо, невозмущенное движение центра масс — сумма гармонических колебаний, амплитуды и частоты которых зависят от величин $l, \rho, \vartheta, \sigma$.

Процедура осреднения вдоль решения (2.1) встречает затруднения из-за наличия в системе (1.1)–(1.3) четырех резонансных соотношений

$$\omega \approx l_0 - v_0, \quad \omega \approx l_0, \quad \omega \approx v_0, \quad \omega \approx l_0 + v_0 \quad (2.2)$$

возникающих, когда частота вибрации основания близка к частотам изменения углов $\psi + \varphi, \psi, \varphi, \psi - \varphi$.

Следуя [4, 5], введем новую переменную — фазовую расстройку α , описывающую отклонение движения от чисто резонансного вращения. Например, в случае первого резонанса (2.2) переменная α определяется по формуле

$$\alpha = \gamma - \psi - \varphi \quad (2.3)$$

В окрестности резонанса $\omega \approx l_0 - v_0$ фазовая расстройка α является медленной переменной.

Подставим (2.1) в правые части уравнений для медленных переменных системы (1.2), (1.3) и проведем операцию осреднения с учетом (2.3). Получим систему осредненных уравнений первого приближения

$$D\rho = \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2l} [(A_1 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha) \cos \sigma - (A_2 \cos \alpha - B_2 \sin \alpha) \sin \sigma] \sin \rho$$

$$D\sigma = \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2l} [(A_1 \cos \alpha - B_1 \sin \alpha) \cos \sigma + (A_2 \sin \alpha + B_2 \cos \alpha) \sin \sigma]$$

$$Dl = \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2} [(A_1 \cos \alpha - B_1 \sin \alpha) \sin \sigma - (A_1 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha) \cos \sigma \cos \rho -$$

$$- (A_2 \sin \alpha + B_2 \cos \alpha) \cos \sigma + (A_2 \cos \alpha - B_2 \sin \alpha) \sin \sigma \cos \rho] - \quad (2.4)$$

$$- \frac{\varepsilon}{4} [(1 - \cos \vartheta)^2 \operatorname{Im} w(il + iv) + (1 + \cos \vartheta)^2 \operatorname{Im} w(il - iv)] \cos^2 \beta -$$

$$- \varepsilon \sin^2 \vartheta \operatorname{Im} w(il) \sin^2 \beta$$

$$D\vartheta = \varepsilon \frac{\sin \vartheta}{2l} [(A_1 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha) \cos \sigma \cos \rho - (A_1 \cos \alpha - B_1 \sin \alpha) \sin \sigma +$$

$$+ (A_2 \sin \alpha + B_2 \cos \alpha) \cos \sigma - (A_2 \cos \alpha - B_2 \sin \alpha) \sin \sigma \cos \rho] +$$

$$+ \varepsilon \frac{\sin \vartheta}{4l} \{ [(1 + \cos \vartheta) \operatorname{Im} w(il - iv) - (1 - \cos \vartheta) \operatorname{Im} w(il + iv) -$$

$$- 2 \operatorname{Im} w(iv)] \cos^2 \beta - 4 \cos \vartheta \operatorname{Im} w(il) \sin^2 \beta \}$$

$$\begin{aligned}
 D\alpha = & -l + \frac{l\kappa \cos \vartheta}{1+\kappa} + \omega + \varepsilon \frac{\cos \vartheta}{l} [(A_1 \cos \alpha - B_1 \sin \alpha) \cos \sigma + \\
 & + (A_2 \sin \alpha + B_2 \cos \alpha) \sin \sigma] \cos \rho + \varepsilon \frac{1 - \cos \vartheta}{2l} [(A_1 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha) \sin \sigma - \\
 & - (A_2 \cos \alpha - B_2 \sin \alpha) \cos \sigma] - \varepsilon \frac{1 - \cos \vartheta}{4l} \{ [(1 + \cos \vartheta) \operatorname{Re} w(il - iv) - \\
 & - (1 - \cos \vartheta) \operatorname{Re} w(il + iv) - 2 \cos \vartheta \operatorname{Re} w(iv)] \cos^2 \beta - 4 \cos \vartheta \operatorname{Re} w(il) \sin^2 \beta \} \\
 & A_j = {}^{1/2} c_j \operatorname{Re} v(i\omega) \cos \beta, B_j = {}^{1/2} c_j \operatorname{Im} v(i\omega) \cos \beta \quad (j=1, 2).
 \end{aligned}$$

Система (2.4) описывает поведение гироскопа в окрестности резонанса $\omega \approx l_0 - v_0$, для других резонансов (2.2) усредненные системы уравнений имеют вид, аналогичный (2.4), и здесь не приводятся из-за громоздкости. Из уравнений (2.4) вытекает, что вибрация оказывает влияние на точность гироскопа только в том случае, когда частота вибрации основания близка к частотам углового движения ротора, так как в нерезонансном случае α будет быстрой переменной и средний уход гироскопа обращается в нуль.

Уравнения (2.4) дают возможность оценить средний уход гироскопа

$$\begin{aligned}
 N = T_0^{-1} \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2l} [(A_1^2 + B_1^2) \cos^2 \sigma + (A_2^2 + B_2^2) \sin^2 \sigma]^{1/2} \sin \rho \leq \\
 \leq T_0^{-1} \frac{\varepsilon c_2 |v(i\omega)|}{2l}
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уход имеет наибольшую величину, когда вектор кинетического момента лежит в «плоскости» вибрации ($\rho = {}^{1/2}\pi$), угол нутации мал, вибрация круговая ($c_1 = c_2$).

3. Исследуем частное решение системы (2.4). Стационарные резонансные значения переменных ρ , σ , l , ϑ , α определяются как значения, обращающие в нуль правые части уравнений системы (2.4)

$$\rho = \rho_* = 0, \quad \sigma = \sigma_*, \quad l = l_* = \omega(1 + \kappa), \quad \vartheta = \vartheta_* = 0, \quad \alpha = \alpha_* \quad (3.1)$$

Величины σ_* и α_* определяются из соотношения

$$(3.2)$$

$$[(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2]^{1/2} \sin \left(\sigma_* - \alpha_* - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} v(i\omega)}{\operatorname{Re} v(i\omega)} \right) = \operatorname{Im} w(il_* - iv_*) \cos^2 \beta$$

Исследуем устойчивость стационарного режима (3.1) в случае круговой вибрации ($c_1 = c_2$). Составим с учетом (3.2) уравнение в вариациях

$$D(\Delta\rho) = -\frac{\varepsilon}{l_*} \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin \delta_* \Delta\rho \quad (\Delta\rho = \rho - \rho_*) \quad (3.3)$$

$$D(\Delta\vartheta) = -\frac{\varepsilon}{2l_*} [\operatorname{Im} w(iv_*) \cos^2 \beta + 2 \operatorname{Im} w(il_*) \sin^2 \beta] \Delta\vartheta \quad (\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_*)$$

$$D(\Delta l) = -\varepsilon \Psi(l_*) \cos^2 \beta \Delta l + \varepsilon 2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cos \delta_* \Delta \delta \quad (\Delta l = l - l_*)$$

$$D(\Delta \delta) = \Delta l / (1 + \kappa) \quad (\Delta \delta = \delta - \delta_*)$$

$$\delta = \sigma - \alpha - \operatorname{arctg} (\operatorname{Im} v(i\omega) / \operatorname{Re} v(i\omega))$$

Отметим, что при некруговой вибрации ($c_1 \neq c_2$) первое уравнение (3.3) имеет более сложный вид, а остальные уравнения те же самые.

Условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения системы (2.2) при $\beta \neq 1/2\pi$ имеют вид

$$\operatorname{Im} w(i\omega) > 0, \quad 1/2 \operatorname{Im} w(iv_*) \cos^2 \beta + \operatorname{Im} w(il_*) \sin^2 \beta > 0$$

$$\Psi(l_*) = \frac{\partial}{\partial l} \operatorname{Im} w \left(\frac{il}{1+\kappa} \right) \Big|_{l=l_*} > 0, \quad \cos \delta_* > 0 \quad (3.4)$$

Первое условие (3.4) обеспечивает устойчивость перпендикулярного положения вектора кинетического момента «плоскости» вибрации, второе условие — устойчивость нутационных колебаний. Третье и четвертое условия можно рассматривать как условия синхронизации частоты вращения ротора с частотой вибрации основания.

4. Рассмотрим частный случай задачи, когда выполняется условие

$$\operatorname{Im} v(ip) = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Im} w(ip) = 0 \quad (p \neq 0) \quad (4.1)$$

Условие (4.1) имеет место в консервативной системе, например в случае «чисто упругого» подвеса ротора, когда равнодействующая силового поля подвеса пропорциональна смещению геометрического центра относительно кожуха.

При выполнении (4.1) система уравнений (2.4) примет вид

$$D\rho = \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2l} (A_1 \sin \alpha \cos \sigma - A_2 \cos \alpha \sin \sigma) \sin \rho \quad (4.2)$$

$$D\sigma = \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2l} (A_1 \cos \alpha \cos \sigma + A_2 \sin \alpha \sin \sigma)$$

$$Dl = \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2} [(A_1 \cos \alpha \sin \sigma - A_2 \sin \alpha \cos \sigma) - (A_1 \sin \alpha \cos \sigma - A_2 \cos \alpha \sin \sigma) \cos \rho]$$

$$D\vartheta = -\varepsilon \frac{\sin \vartheta}{2l} [(A_1 \cos \alpha \sin \sigma - A_2 \sin \alpha \cos \sigma) - (A_1 \sin \alpha \cos \sigma - A_2 \cos \alpha \sin \sigma) \cos \rho]$$

$$D\alpha = \omega - l + \frac{l\kappa \cos \vartheta}{1+\kappa} - \varepsilon \frac{1 - \cos \vartheta}{2l} (A_1 \sin \alpha \sin \sigma + A_2 \cos \alpha \cos \sigma) +$$

$$+ \varepsilon \frac{\cos \vartheta}{l} (A_1 \cos \alpha \cos \sigma + A_2 \sin \alpha \sin \sigma) \cos \rho - \varepsilon \frac{1 - \cos \vartheta}{4l} \{ [(1 + \cos \vartheta) \times \\ \times w(il - iv) - (1 - \cos \vartheta) w(il + iv) - 2 \cos \vartheta w(iv)] \cos^2 \beta - 4 \cos \vartheta w(il) \sin^2 \beta \}$$

Система (4.2) и аналогичные ей системы при других резонансах имеют по два первых интеграла

$$J_1 = l(1 - \cos \vartheta), \quad J_2 = \langle H \rangle - \omega l \quad \text{при} \quad \omega \approx l_0 - v_0$$

$$J_1 = l \cos \vartheta, \quad J_2 = \langle H \rangle - \omega l \quad \text{при} \quad \omega \approx l_0$$

$$J_1 = l, \quad J_2 = \langle H \rangle + \omega l \cos \vartheta \quad \text{при} \quad \omega \approx v_0$$

$$J_1 = l(1 + \cos \vartheta), \quad J_2 = \langle H \rangle - \omega l \quad \text{при} \quad \omega \approx l_0 + v_0$$

где $\langle H \rangle$ — осредненная функция Гамильтона ($H = T - U$; T — безразмерная кинетическая энергия ротора, U — безразмерная силовая функция). Ниже приведены соответствующие значения осредненных функций Гамильтона

при резонансах (2.2)

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2} [A_1 (\cos \alpha \cos \sigma \cos \rho + \sin \alpha \sin \sigma) + \\ &+ A_2 (\cos \alpha \cos \sigma + \sin \alpha \sin \sigma \cos \rho)] + Y \quad \text{при } \omega \approx l_0 - \nu_0 \\ \langle H \rangle &= \varepsilon \sin \vartheta [A_1 (\cos \alpha \sin \sigma - \sin \alpha \cos \sigma \cos \rho) + \\ &+ A_2 (\cos \alpha \sin \sigma \cos \rho - \sin \alpha \cos \sigma)] + Y \quad \text{при } \omega \approx l_0 \\ \langle H \rangle &= -\varepsilon \sin \vartheta (A_1 \sin \alpha \cos \sigma \sin \rho + A_2 \cos \alpha \sin \sigma \sin \rho) + Y \quad \text{при } \omega \approx \nu_0 \\ \langle H \rangle &= \varepsilon \frac{1 - \cos \vartheta}{2} [A_1 (\cos \alpha \cos \sigma \cos \rho + \sin \alpha \sin \sigma) + \\ &+ A_2 (\cos \alpha \cos \sigma + \sin \alpha \sin \sigma \cos \rho)] + Y \quad \text{при } \omega \approx l_0 + \nu_0 \end{aligned}$$

здесь используется обозначение

$$\begin{aligned} Y &= l^2 \frac{1 + \kappa \sin^2 \vartheta}{2(1 + \kappa)} + \frac{1}{8} \varepsilon [(1 - \cos \vartheta)^2 w(il + iv) + 2 \sin^2 \vartheta w(iv) + \\ &+ (1 + \cos \vartheta)^2 w(il - iv)] \cos^2 \beta + \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \vartheta w(il) \sin^2 \beta \end{aligned}$$

Механический смысл интеграла J_1 меняется в зависимости от рассматриваемого резонанса: при резонансе $\omega \approx \nu_0$ постоянен вектор кинетического момента, при резонансе $\omega \approx l_0$ постоянна его проекция на ось динамической симметрии ротора, при резонансах $\omega \approx l_0 \pm \nu_0$ постоянна сумма или разность указанных величин (при этом конец вектора кинетического момента l во время движения находится на поверхности некоторого параболоида [5]). Интеграл J_2 является «интегралом энергии».

Выпишем решение системы (4.2) при круговой вибрации ($c_1 = c_2$, т. е. $A_1 = A_2 = A$), используя методы, примененные в [1, 5]. Введем новую переменную $\delta = \sigma - \alpha$ и из (4.2) получим

$$\begin{aligned} D\rho &= -\varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2l} A \sin \delta \sin \rho, & Dl &= \varepsilon \frac{1 + \cos \vartheta}{2} A \sin \delta (1 + \cos \rho) \quad (4.3) \\ D\vartheta &= -\varepsilon \frac{\sin \vartheta}{2l} A \sin \delta (1 + \cos \rho), & D\delta &= l - \omega - \frac{l\kappa \cos \vartheta}{1 + \kappa} - \\ & - \frac{\varepsilon}{l} A \cos \delta (1 - \cos \rho \cos \vartheta) + \varepsilon \frac{1 - \cos \vartheta}{4l} \{ [(1 + \cos \vartheta) w(il - iv) - \\ & - (1 - \cos \vartheta) w(il + iv) - 2 \cos \vartheta w(iv)] \cos^2 \beta - 4 \cos \vartheta w(il) \sin^2 \beta \} \end{aligned}$$

Стационарные резонансные значения переменных l , ρ , δ , ϑ , обращающие в нуль правые части уравнений (4.3), имеют вид

$$\rho_* = \rho_0 + \varepsilon \rho_1, \quad l_* = l_0 + \varepsilon l_1, \quad \vartheta_* = \vartheta_0 + \varepsilon \vartheta_1 \quad (4.4)$$

$$\delta_* = \pi n \quad (n=0, 1), \quad \rho_1 = \frac{\cos \rho_0 - 1}{l_0 \sin \rho_0} l_1, \quad \vartheta_1 = \frac{\cos \vartheta_0 - 1}{l_0 \sin \vartheta_0} l_1$$

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{1 + \kappa}{l_0} A (1 - \cos \rho_0 \cos \vartheta_0) \cos \delta_* - \frac{1 - \cos \vartheta_0}{4l_0} \{ [(1 + \cos \vartheta_0) w(il_0 - iv_0) - \\ & - (1 - \cos \vartheta_0) w(il_0 + iv_0) - 2 \cos \vartheta_0 w(iv_0)] \cos^2 \beta - 2 \cos \vartheta_0 w(il_0) \sin^2 \beta \} (1 + \kappa) \end{aligned}$$

Учитывая интегралы J_1 и J_2 , выпишем решение системы (4.3) в окрестности (4.4) аналогично [1]:

$$\begin{aligned} \Delta l &= k\sqrt{\varepsilon} 2(1+\kappa) \omega_* \operatorname{cn} u, & \sin \frac{\delta - \delta_*}{2} &= k \operatorname{sn} u & (4.5) \\ \Delta \vartheta &= k\sqrt{\varepsilon} 2(1+\kappa) \frac{\cos \vartheta_* - 1}{l_* \sin \vartheta_*} \omega_* \operatorname{cn} u, & u &= \sqrt{\varepsilon} \omega_* (\tau - \tau_0) \\ \Delta \rho &= k\sqrt{\varepsilon} 2(1+\kappa) \frac{\cos \rho_* - 1}{l_* \sin \rho_*} \omega_* \operatorname{cn} u \\ \omega_*^2 &= [A(1 + \cos \vartheta_*)(1 + \cos \rho_*)] / [2(1 + \kappa)] \\ k^2 &= \sin^2 \frac{\delta_0 - \delta_*}{2} + \frac{1}{4\varepsilon \omega_*^2} \left(\frac{\Delta l}{1 + \kappa} \right)^2 \Big|_{\tau = \tau_0} \end{aligned}$$

Используя решение (4.5) и второе уравнение из (4.3), выпишем решение для переменной σ :

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{A(1 + \cos \vartheta_*)}{l_*} \left[\varepsilon \left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} \right) \tau + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega_*} \operatorname{zn} u \right] \quad (4.6)$$

Здесь $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, k — модуль эллиптических функций, $\operatorname{zn} u$ — функция Якоби. Оценим уход гироскопа

$$N = T_0^{-1} \varepsilon A \frac{1 + \cos \vartheta_*}{2l_*} \sin \rho_* \leq T_0^{-1} \varepsilon \frac{c|v(i\omega)|}{2} = \frac{MEP}{2L} |v(i\omega)| \quad (4.7)$$

Выпишем решение систем осредненных уравнений, аналогичных (4.2), при остальных резонансах (2.2).

При резонансе $\omega \approx l_0$:

$$\begin{aligned} \Delta l &= k\sqrt{\varepsilon} 2\omega_* \operatorname{cn} u, & \Delta \vartheta &= k\sqrt{\varepsilon} 2 \frac{\operatorname{ctg} \vartheta_*}{l_*} \omega_* \operatorname{cn} u \\ \Delta \rho &= k\sqrt{\varepsilon} 2 \frac{\cos \rho_* - 1}{l_* \sin \rho_*} \omega_* \operatorname{cn} u, & \omega_*^2 &= A \sin \vartheta_* (1 + \cos \rho_*) \\ \sigma - \sigma_0 &= \frac{2A \sin \vartheta_*}{l_*} \left[\varepsilon \left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} \right) \tau + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega_*} \operatorname{zn} u \right] \\ N &= T_0^{-1} \varepsilon \frac{A \sin \vartheta_*}{l_*} \sin \rho_*, & A &= \frac{1}{2} c |v(i\omega)| \sin \beta \end{aligned}$$

При резонансе $\omega \approx \nu_0$:

$$\begin{aligned} \Delta l &= 0, & \Delta \vartheta &= k\sqrt{\varepsilon} \frac{2(1+\kappa)}{l_* \kappa \sin \vartheta_*} \omega_* \operatorname{cn} u \\ \Delta \rho &= -k\sqrt{\varepsilon} \frac{2(1+\kappa)}{l_* \kappa \sin \rho_*} \omega_* \operatorname{cn} u, & \omega_*^2 &= A \frac{\kappa \sin \vartheta_*}{1 + \kappa} \sin \rho_* \\ \sigma - \sigma_0 &= \frac{2A \sin \vartheta_* \cos \rho_*}{l_* \sin \rho_*} \left[\varepsilon \left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} \right) \tau + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega_*} \operatorname{zn} u \right] \\ N &= T_0^{-1} \varepsilon A \frac{\sin \vartheta_*}{l_*} \cos \rho_* \end{aligned}$$

При резонансе $\omega \approx l_0 + \nu_0$:

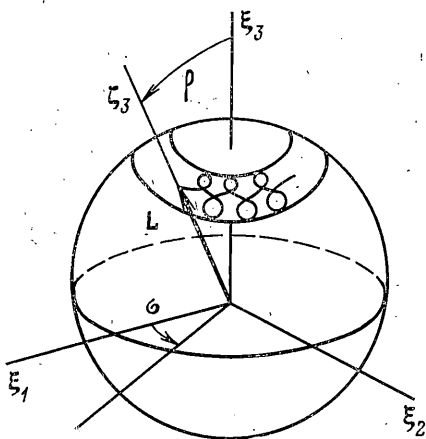
$$\Delta l = k\sqrt{\varepsilon} 2(1+\kappa) \omega_* \operatorname{cn} u, \quad \Delta \vartheta = k\sqrt{\varepsilon} 2(1+\kappa) \frac{1+\cos \vartheta_*}{l_* \sin \vartheta_*} \omega_* \operatorname{cn} u$$

$$\Delta \rho = k\sqrt{\varepsilon} 2(1+\kappa) \frac{\cos \rho_* - 1}{l_* \cos \rho_*} \omega_* \operatorname{cn} u, \quad \omega_*^2 = \frac{A(1-\cos \vartheta_*)(1+\cos \rho_*)}{2(1+\kappa)}$$

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{A(1-\cos \vartheta_*)}{l_*} \left[\varepsilon \left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} \right) \tau + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega_*} \operatorname{zn} u \right]$$

$$N = T_0^{-1} \varepsilon \frac{A(1-\cos \vartheta_*) \sin \rho_*}{2l_*}$$

Используя приведенные решения, получим полное представление о движении вектора кинетического момента, которое приведено на фигуре.



Движение состоит из «вековой» прецессии вектора l (слагаемые, пропорциональные $\varepsilon \tau$) и некоторого «восьмеркообразного» движения.

Отметим, что при $\vartheta=0$ для резонансов $\omega \approx l_0$, $\omega \approx \nu_0$, $\omega \approx l_0 + \nu_0$ уходы гироскопа обращаются в нуль, как и в случае однокомпонентной вибрации [1]. Это объясняется тем, что при $\vartheta=0$ угловые движения ротора имеют только одну частоту, равную $l-\nu$. В рабочем режиме обычно имеет место ситуация, когда угол ϑ мал или равен нулю, т. е. ось симметрии ротора совпадает с вектором кинетического момента. Поэтому для практики основное значение имеет резонанс $\omega \approx l_0 - \nu_0$. При этом из (4.7) получаем, что уход становится максимальным, когда вектор кинетического момента лежит в «плоскости» вибрации ($\rho = \frac{1}{2}\pi$), и обращается в нуль, когда вектор l перпендикулярен указанной плоскости ($\rho=0$).

Поступила 29 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Маргынченко Ю. Г., Савченко Т. А. Резонансные движения гироскопа с неконтактным подвесом на вибрирующем основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6.
2. Маргынченко Ю. Г. Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
3. Данилин В. П., Маргынченко Ю. Г., Новожилов И. В. Зависимость времени выбега электростатического гироскопа от дебаланса ротора. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.
4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
5. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Изд-во МГУ, 1975.