

НЕОДНОРОДНЫЙ СТЕРЖЕНЬ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Н. А. ЛАВРОВ, К. А. ЛУРЬЕ, А. В. ЧЕРКАЕВ

(Ленинград)

Дано решение задачи о распределении упругого материала по сечению призматического стержня с целью максимизации жесткости кручения. Задача оказывается разрешимой благодаря введению специальной микроструктуры материала, делающей его анизотропным¹.

1. Постановка задачи. Рассматривается призматический стержень, сечение которого G односвязно и ограничено замкнутой кривой Γ . Материал стержня считается неоднородным; в качестве управления выбирается упругая податливость материала $u(x, y) > 0$, принадлежащая замкнутому выпуклому множеству

$$0 < u_- \leq \text{vrai} \max u(x, y) \leq u_+ < \infty \quad (1.1)$$

пространства $L_\infty(G)$. Дополнительно зададим интегральную податливость стержня u_0 соотношением

$$u_- < \frac{1}{\text{mes } G} \int_G u(x, y) dx dy = u_0 < u_+ \quad (1.2)$$

Жесткость кручения стержня равна

$$I = 2 \int_G \varphi(x, y) dx dy \quad (1.3)$$

где φ — функция Прандтля, т. е. решение краевой задачи

$$\text{div } u \text{ grad } \varphi = -2, \quad \varphi|_{\Gamma} = 0 \quad (1.4)$$

Составляющие напряжения τ_{xx} , τ_{zy} определяются формулами $\tau_{xx} = \varphi_{yy}$, $\tau_{zy} = -\varphi_x$. Требуется так подобрать функцию податливости $u(x, y)$, удовлетворяющую (1.1), (1.2), чтобы функционал (1.3) достигал экстремума. Задача о минимуме (1.3) изучалась в [2], где доказано существование оптимального решения и дана характеристика оптимального управления. Оказалось, что оптимальная податливость u либо находится на ограничениях u_+ , u_- , либо принимает промежуточные значения.

Зона промежуточных значений разделяет области, где управление максимально или минимально.

Задача о максимуме (1.3) оказалась более сложной. В [3] (см. также [4]) показано, что в каждой точке сечения стержня податливость может принимать только максимальное или минимальное значение. С другой стороны, там же было обнаружено, что не существует гладкой кривой, разде-

¹ Часть публикуемых результатов составила содержание доклада [1].

ляющей эти режимы управления. Предположение о существовании такой кривой приводит к противоречию между необходимыми условиями Вейерштрасса

$$u = u_+, \text{ если } \kappa - \frac{u_+}{u_-} (\text{grad } \varphi_+)^2 \geq 0$$

$$u = u_-, \text{ если } \kappa - \frac{u_-}{u_+} (\text{grad } \varphi_-)^2 \leq 0$$
(1.5)

и условием Вейерштрасса — Эрдманна

$$\kappa - (\varphi_t)^2 - \frac{u_-}{u_+} (\varphi_{n-})^2 = 0$$
(1.6)

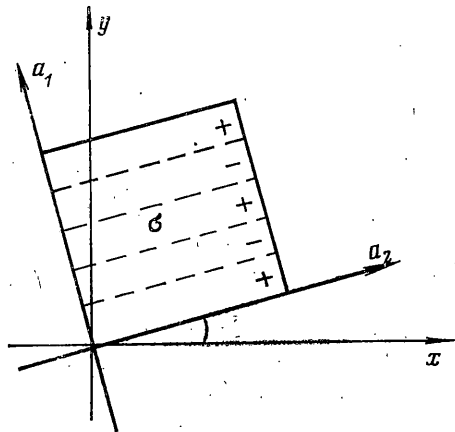
где $\kappa = \text{const}$, а n и t — орты нормали и касательной к границе раздела областей, занятых разными управлениями.

В последнем равенстве φ_t и φ_{n-} представляют предельные значения соответствующих производных на границе раздела, взятые с той стороны области, где $u = u_-$.

Чтобы убедиться в упомянутом противоречии, вычтем из второго неравенства (1.5) равенство (1.6) почленно; получим $(1 - u_-/u_+) \varphi_t^2 \leq 0$.

Этому условию можно удовлетворить лишь когда $\varphi_t = 0$, т. е. в том исключительном случае, когда линия переключения u оказывается линией уровня φ ; последнее требование, вообще говоря, переопределяет задачу, ибо оно должно выполняться на линии переключения независимо от (1.6).

Описанное положение является следствием того, что в процессе приближения к оптимальному решению области, занятые материалом максимальной и минимальной податливости, разделяет линия, совершающая все более частые колебания около своего предельного положения [4], т. е. оптимальный режим характеризуется бесконечно часто чередующимися слоями материалов максимальной и минимальной податливости. Такое предельное расположение двух материалов делает жесткость стержня анизотропной.



Фиг. 1

Приведенные качественные соображения показывают, как нужно изменить постановку задачи для того, чтобы она имела решение.

2. Описание микроструктуры материала. Рассмотрим стержень, поперечное сечение которого состоит из материалов двух типов, характеризующихся податливостями u_+ и u_- . Допуская, что распределение материалов представляет собой часто чередующуюся последовательность слоев, рассмотрим эквивалентную этой последовательности анизотропную среду, описываемую тензором податливости d .

Чтобы построить тензор d , выделим из области G малый элемент o (фиг. 1). Он состоит из конечного числа прямолинейных, параллельных сторонам элемента слоев материала первого типа, перемежающихся слоями материала второго типа. Области, занятые материалами первого и второго типа, назовем σ_+ и σ_- . Отношение площади, занятой первым мате-

риалом, к площади элемента назовем концентрацией m :

$$0 \leq m = \frac{\text{mes } \sigma_+}{\text{mes } \sigma} \leq 1 \quad (2.1)$$

На границе раздела слоев остаются непрерывными нормальное напряжение

$$[\tau_{zx}y_i - \tau_{zy}x_i]_{-}^{+} = [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}]_{-}^{+} = 0$$

и касательная деформация

$$[\gamma_{zx}x_i + \gamma_{zy}y_i]_{-}^{+} = [\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}]_{+}^{-} = 0 \quad (2.2)$$

где x_i и y_i — направляющие косинусы касательной \mathbf{t} к границе раздела, \mathbf{n} — нормаль к границе, \mathbf{e} — вектор с компонентами $(-\gamma_{zy}, \gamma_{zx})$, $\boldsymbol{\tau} = \text{grad } \varphi$.

Напряжения и деформации в слоях σ_+ и σ_- связаны законом Гука

$$\mathbf{e}^+ = u_+ \boldsymbol{\tau}^+, \quad \mathbf{e}^- = u_- \boldsymbol{\tau}^- \quad (2.3)$$

При уменьшении элемента σ векторы \mathbf{e} и $\boldsymbol{\tau}$ внутри каждого слоя стремятся к своим средним значениям \mathbf{e}_0 , $\boldsymbol{\tau}_0$:

$$\frac{1}{\text{mes } \sigma_+} \int_{\sigma_+} \mathbf{e}^+ dx dy \xrightarrow{\sigma_+ \rightarrow 0} \mathbf{e}_0^+, \quad \frac{1}{\text{mes } \sigma_+} \int_{\sigma_+} \boldsymbol{\tau}^+ dx dy \xrightarrow{\sigma_+ \rightarrow 0} \boldsymbol{\tau}_0^+ \quad (2.4)$$

и аналогично для \mathbf{e}_0^- , $\boldsymbol{\tau}_0^-$.

Определим средние по элементу значения величин \mathbf{e} и $\boldsymbol{\tau}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \frac{1}{\text{mes } \sigma} \int_{\sigma} \mathbf{e} dx dy = m \mathbf{e}_0^+ + (1-m) \mathbf{e}_0^- \\ \boldsymbol{\tau}_0 &= \frac{1}{\text{mes } \sigma} \int_{\sigma} \boldsymbol{\tau} dx dy = m \boldsymbol{\tau}_0^+ + (1-m) \boldsymbol{\tau}_0^- \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эквивалентное описание среды при уменьшении площади элемента σ сводится к описанию связи между векторами \mathbf{e}_0 и $\boldsymbol{\tau}_0$. Ясно, что эта связь должна выражаться линейным соотношением (\mathbf{d} — симметричный тензор второго ранга).

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\tau}_0, \quad \mathbf{d} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \quad (2.6)$$

Используя (2.2) — (2.6), можно вычислить элементы тензора \mathbf{d} : его собственные векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 направлены по нормали и касательной к слоям, а собственные числа равны

$$\lambda_1 = [m u_+^{-1} + (1-m) u_-^{-1}]^{-1}, \quad \lambda_2 = m u_+ + (1-m) u_- \quad (2.7)$$

Исключая из (2.7) параметр m и учитывая неравенство (2.1), найдем, что λ_1 и λ_2 связаны соотношениями

$$u_- \leq \lambda_1 = \frac{u_+ u_-}{u_+ + u_- - \lambda_2} \leq \lambda_2 \leq u_+ \quad (2.8)$$

причем λ_1 и λ_2 могут лишь одновременно принимать значения u_+ и u_- , что соответствует отсутствию одного из материалов. Во всех остальных случаях среднее неравенство (2.8) выполняется в строгом смысле.

3. Формулировка регуляризованной задачи и необходимые условия оптимальности. Допуская к сравнению анизотропные среды, составлен-

ные из часто чередующихся слоев материалов первого и второго типа, переформулируем оптимальную задачу (1.1)–(1.4).

Требуется выбрать тензор $\mathbf{d}(x, y)$ для максимизации функционала (1.3) при дифференциальной связи

$$\operatorname{div}(\mathbf{d} \cdot \operatorname{grad} \varphi_0) = -2, \quad \varphi_0|_{\Gamma} = 0 \quad (3.1)$$

ограничении (2.8) и изопериметрическом условии

$$u_0 = \frac{1}{\operatorname{mes} G} \int_G \lambda_2(x, y) dx dy = \frac{1}{\operatorname{mes} G} \int_G [m u_+ + (1-m) u_-] dx dy \quad (3.2)$$

Будем считать элементы тензора \mathbf{d} управлениями: α – угол наклона собственного вектора \mathbf{a}_1 к оси x и собственное число λ_2 .

В [5, 6] показано, что введение тензора податливости со связанными, согласно (2.8), собственными числами регуляризует оптимальную задачу, гарантируя существование оптимального управления.

Задача (1.3), (2.8), (3.1), (3.2) является самосопряженной. Условия стационарности по управлениям λ_2 и α имеют вид

$$\delta \lambda_2 \left[\kappa - \frac{\lambda_1^2}{u_+ u_-} (\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_0)^2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_0)^2 \right] \leq 0 \quad (3.3)$$

$$\delta \alpha (\lambda_1 - \lambda_2) (\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_0) (\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_0) = 0 \quad (3.4)$$

где $\kappa = \operatorname{const}$ – множитель Лагранжа при ограничении (3.2). Равенство (3.4) показывает, что возможны изотропные режимы управления

$$\lambda_1 = \lambda_2 = u_+, \quad \text{если } \kappa - \frac{u_+}{u_-} (\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_0)^2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_0)^2 \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = u_-, \quad \text{если } \kappa - \frac{u_-}{u_+} (\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_0)^2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_0)^2 \leq 0$$

Эти неравенства должны выполняться при произвольном выборе единичных векторов \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 . Поскольку $u_- < u_+$, необходимым и достаточным условием этого будет выполнение (3.5) при коллинеарности векторов \mathbf{a}_1 и $\boldsymbol{\tau}_0$. В результате получаем неравенства, совпадающие с (1.5). Теперь, однако, зоны изотропных режимов не граничат одна с другой, как в первой задаче, а разделяются областью анизотропного управления, которое осуществляется при условии $(\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_0) (\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_0) = 0$, выражающем коллинеарность вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ одному из собственных векторов тензора \mathbf{d} (этот результат согласуется с [4, 7]).

В анизотропной зоне возможны два стационарных режима управления

$$\kappa = \frac{\lambda_1^2}{u_+ u_-} |\boldsymbol{\tau}_0|^2 = \frac{1}{u_+ u_-} (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\tau}_0)^2, \quad \text{если } \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \quad (3.6)$$

$$\kappa = |\boldsymbol{\tau}_0|^2, \quad \text{если } \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \quad (3.7)$$

Для выделения из этих режимов оптимального применим условие Вейерштрасса. Пользуясь методикой [4], составим приращение функционала при варьировании в полоске G_ε , ориентированной по $\boldsymbol{\tau}_0$. Можно убедиться, что приращение функционала при такой (наиболее «опасной») ориентации полоски имеет вид

$$\Delta I = \int_{G_\varepsilon} \left[-|\boldsymbol{\tau}_0|^2 \left(\frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{D_{nn}} - \lambda_i \right) + \kappa (\Lambda_2 - \lambda_2) \right] dx dy \quad (i=1,2) \quad (3.8)$$

где Λ_1 и Λ_2 — собственные числа допустимого тензора D , а D_{nn} — его nn -компонента. Параметр λ_i представляет собственное число тензора \mathbf{d} , соответствующее собственному вектору, коллинеарному τ_0 ; в режиме (3.6) $\lambda_i = \lambda_1$, в режиме (3.7) $\lambda_i = \lambda_2$.

Исследуем отдельно режимы (3.6) и (3.7). Можно показать, ссылаясь на [4] и выбирая ориентацию главных осей допустимого тензора D , что в режиме (3.6):

$$\Delta I = - \int_{G_e} |\tau_0|^2 (\Lambda_2 - \lambda_2)^2 \Lambda_1 \frac{\lambda_1^2}{(u_+ u_-)^2} dx dy \leq 0$$

Таким образом, этот режим оптимален по отношению к вариациям данного вида.

В режиме (3.7) приращение функционала выбором ориентации главных осей D может быть сделано равным

$$\Delta I = \int_{G_e} (\Lambda_2 - \Lambda_1) |\tau_0|^2 dx dy$$

в силу (2.8) оно будет неотрицательно, т. е. режим (3.7) неоптимален.

Учитывая описание тензора \mathbf{d} , видим, что чередующиеся слои материалов направлены перпендикулярно τ_0 . По этой причине в задаче о максимуме жесткости существенно только собственное число λ_1 : материал ведет себя как изотропный с податливостью λ_1 .

Согласно (3.6), модуль вектора τ_0 сохраняет свое значение в зоне анизотропии. Подставляя (3.6) в уравнение состояния (2.6), найдем, что в этой зоне задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} (\cos \alpha) + \frac{\partial}{\partial y} (\sin \alpha) = - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1 u_+ u_-}}$$

В изотропных же зонах ($u = u_+$ и $u = u_-$) приходим к уравнению Пуассона с правой частью, равной $-2/u_+$ и $-2/u_-$ соответственно.

4. Задача о минимуме жесткости. В [2], где изучалась эта задача, необходимость введения анизотропных зон не возникла. Выведенные там условия оптимальности соответствуют, в частности, режиму (3.7), который реализуется путем выбора изотропного материала с промежуточной податливостью, считавшегося допустимым. Последнее требование, однако, не является обязательным. Та же задача может быть поставлена для стержня, составленного лишь из двух материалов с податливостями u_+ и u_- . Регуляризация по описанному методу и здесь приведет к анизотропной зоне, в пределах которой необходимое условие оптимальности будет иметь вид (3.7). В этом случае образующие микроструктуру слои располагаются вдоль вектора τ_0 , поэтому существенно только собственное число λ_2 .

5. Необходимые условия оптимальности в фазах слоистых композитов. Выше было показано, что введение слоистых материалов приводит к тому, что условие Вейерштрасса для регуляризованной задачи выполняется. Точнее, это условие оказывается выполненным для осредненной по элементарному объему деформации e_0 и напряжения τ_0 , связанных законом Гука (2.6) для анизотропного композита. С другой стороны, поля деформаций и напряжений, возникающих в самих фазах, сильно отличаются от соответствующих осредненных значений и определяются законом Гука (2.3) для фаз. Покажем, как будет удовлетворяться условие Вейерштрасса в самих фазах.

Согласно формулам (1.5), величина $(\nabla\varphi)^2 = \tau^2$ в фазах не должна принадлежать «запрещенному» интервалу

$$\kappa \frac{u_-}{u_+} < \tau^2 < \kappa \frac{u_+}{u_-}$$

Вычислим значения τ_+ , τ_- в фазах через среднее значение τ_0 . Пользуясь формулами (2.2) – (2.5), получим для режима (3.6)

$$\tau_+ = \frac{u_-}{mu_+ + (1-m)u_-} \tau_0, \quad \tau_- = \frac{u_+}{mu_- + (1-m)u_+} \tau_0$$

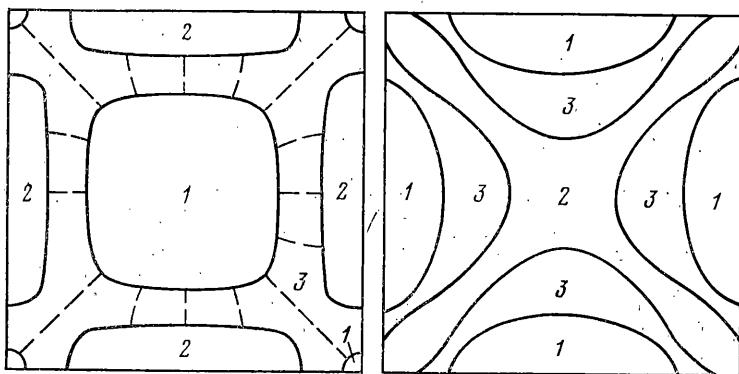
Учитывая определение собственного числа λ_1 (2.7), будем иметь

$$(\tau_+)^2 = \frac{\lambda_1^2}{u_+^2} (\tau_0)^2, \quad (\tau_-)^2 = \frac{\lambda_1^2}{u_-^2} (\tau_0)^2 \quad (5.1)$$

Необходимое условие стационарности (3.6) анизотропного режима в регуляризованной постановке позволяет исключить $(\tau_0)^2$ из формул (5.1); в результате получаем

$$(\tau_+)^2 = \kappa \frac{u_-}{u_+}, \quad (\tau_-)^2 = \kappa \frac{u_+}{u_-}$$

Эти равенства показывают, что напряжения в фазах постоянны по величине и принадлежат границам «запрещенного» интервала повсюду, где реализован анизотропный режим управления. Величина осредненного напряжения τ_0 изменяется в этом режиме лишь вследствие изменения концентрации.



Фиг. 2

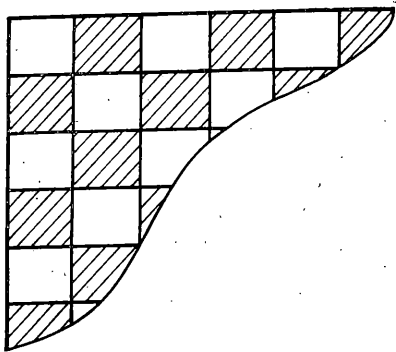
Направления же слоев в каждой точке анизотропной зоны совпадают с линиями уровня функции φ . Как видим, введение слоев устраняет противоречие, отмеченное в конце п. 1: случай, который там оказывался исключительным, теперь становится регулярным.

Таким образом, условие Вейерштрасса в задаче о максимуме жесткости выполнено как для осредненных величин, так и для самих фаз. Для задачи о минимуме жесткости (при необходимости регуляризации) доказательство будет аналогичным.

Замечание. При исследовании необходимых условий для композитного материала приходится иметь дело с двумя стремящимися к нулю последовательностями:

размерами полоски варьирования и шириной слоев, составляющих композит. Условие Вейерштрасса для осредненных величин получается варьированием в полоске, которая стягивается к своему центру медленнее, чем стремится к нулю ширина слоев. Условия, проверенные в п. 5, отвечают обратной ситуации: полоска уменьшается быстрее ширины слоев.

6. Задача о максимуме жесткости квадратного сечения была решена численно на ЭВМ. Прямая задача (3.1) решалась методом локальных вариаций с переменным шагом варьирования [8] второго порядка точности на сетке 20×20 . Для поиска экстремума применялся градиентный метод первого порядка.



Фиг. 3

Результаты приведены на фиг. 2.

Пределы u_+ и u_- выбирались равными 1.5 и 0.5 соответственно, изопериметрическое ограничение (3.2) отвечало средней концентрации мягкого (u_+) материала, равной 0.5. Фиг. 2, а показывает расположение и форму изотропных зон мягкого (1) и жесткого (2) материалов, а также анизотропной переходной зоны (3). В пределах этой зоны штриховыми линиями отмечены направления нормалей к слоям изотропных фаз; эти направления ортогональны линиям уровня функции Прандтля.

При расчете выигрыша по функционалу сравнение производилось со стержнем, сечение которого заполнено мягким и жестким материалом в шахматном порядке (20×20 ячеек). Выигрыш благодаря оптимизации составил 59%.

Для сравнения на фиг. 2, б приведено расположение зон максимальной (1), минимальной (2) и промежуточной (3) податливостей в задаче о минимуме жесткости при тех же ограничениях. Относительно уменьшение значения функционала благодаря оптимизации составило 19% по сравнению с распределением материала, показанным на фиг. 3.

Поступила 25 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А., Черкаев А. В. Неоднородный стержень экстремальной крутильной жесткости. В сб.: Нелинейные задачи строительной механики. Оптимизация конструкций. Киевский инж.-строит. ин-т, 1978.
2. Sea J., Malanowski K. An example of a max-min problem in partial differential equations. SIAM J. Control, 1970, vol. 8, No. 3.
3. Klosowicz B., Lurie K. A. On the optimal non-homogeneity of a torsional elastic bar. Arch. mech. stosowanej, 1971, vol. 24, No. 2.
4. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М., «Наука», 1975.
5. Tartar L. Problèmes de contrôle des coefficients dans des équations aux dérivées partielles. In Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 107, 420, Berlin, Springer, 1975.
6. Райтум У. Е. Распирение экстремальных задач, связанных с линейным эллиптическим уравнением. Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 2.
7. Баничук Н. В. Об оптимальной анизотропии скручиваемых упругих стержней. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4.
8. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.